Д. В. АНОСОВ

ОТ НЬЮТОНА К КЕПЛЕРУ

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 521.1
ББК 22.62
А69

Аносов Д. В.

А69 От Ньютона к Кеплеру. — М.: МЦНМО, 2006. — 272 с.: ил.

ISBN 5-94057-229-4

В книге рассказывается, как можно объяснить законы Кеплера движения планет на основе законов механики. Это объяснение впервые было дано И. Ньютоном, что в своё время стало событием эпохального значения. В книге излагается другой вывод законов Кеплера, доступный учащимся старших классов.

При этом автор счёл нужным заново остановиться на математических понятиях, которые в принципе могли бы быть известны учащимся, подчёркивая их связь с наглядными представлениями, относящимися к физике и даже к повседневной жизни.

Наряду с этой основной частью в книге затронут ряд смежных вопросов, включая и исторические сведения.

Для удобства читателя, который хотел бы ограничиться минимумом, в книге использованы три шрифта — обычный шрифт для основной части и два других шрифта для дополнительного материала.

ББК 22.62

Аносов Дмитрий Викторович

От Ньютона к Кеплеру

Подписано в печать 21.02.2006 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Печ. л. 17.
Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-229-4

Предисловие

В этой книжке я рассказываю, как из известных школьникам законов механики (включая закон всемирного тяготения) можно вывести открытые Кеплером законы движения планет. Как известно, это сделал Ньютон, и это было эпохальным достижением, поднявшим точные науки на качественно более высокий уровень. Школьникам сообщают о достижении Ньютона, как и о других достижениях теоретической науки, но говорят о них голословно. Дескать, умные дяди сделали то-то и то-то, а как сделали — не говорят. По большей части это неизбежно: для понимания соответствующих научных исследований нужна подготовка, которой нет не только у школьников, но и у начинающих студентов. А хотелось бы дать им возможность хоть в некоторых случаях приобщиться к важнейшим событиям в истории науки.

К сожалению, для понимания рассуждений Ньютона требуются знания, слишком выходящие за пределы школьной программы. Но известны другие подходы к той же задаче. Я расскажу о довольно простом подходе, который был предложен полтора века спустя У. Гамильтоном и который позволяет почти не выходить за эти пределы; а там, где всё-таки чуть-чуть приходится выходить, все нужные сведения легко сообщить дополнительно, что я и делаю. Дополнительные сведения и сами по себе имеют значение, но я останавливаюсь на них почти исключительно только в той степени, в какой они мне нужны. Однако и в такой степени они будут способствовать расширению кругозора читателя.

С той же целью расширения его кругозора я привожу этот вывод не просто сам по себе, но привожу его в исторической перспективе. В основном, конечно, я говорю об истории развития науки, но не избегаю и некоторых сведений об её творцах. Я также упоминаю порой о том, какое значение то или иное научное положение имеет с современной точки зрения.

Основу данной книжки составляет текст лекции, которую я прочёл несколько лет назад для школьников. Но в лекции мне не могло хватить времени рассказать обо всём так подробно, как хотелось бы, а в книжке я смог это сделать. Из-за этого книжка стала в несколько раз длиннее, за что, надеюсь, читатель на меня не посетует. Однако часть читателей может пожелать ограничиться (особенно вначале, если и пока они не заинтересуются) только тем минимумом, который составил содержание лекции. Поэтому я довольно близко воспроизвёл здесь лекционный текст и отделил от него некоторые из сделанных добавлений, отчасти вынеся их в приложения (из-за этого план книги оказался необычным — объём приложений даже чуть больше объёма основного текста), а отчасти прибегая к петиту. Об этом см. ниже в разделе «Как читать эту книгу».

Я благодарю тех, с кем я имел случай обсуждать те или иные места из этой книжки: Г. Кархера (который заставил меня задуматься о геометрическом подходе к обратной задаче Кеплера ещё до того, как я познакомился с соответствующей литературой), А. Альбуйи (которому я обязан некоторыми историческими указаниями), О. Д. Аносову, В. М. Закалюкина, А. В. Клименко, А. В. Кочергина (который, в частности, сообщил мне геометрический вывод уравнения Кеплера (конец § 6)), а также Н. А. Шихову за изготовление рисунков.

Д. В. Аносов

Как читать эту книгу

Читатель, конечно, знает, что книгу научного (часто и научно-популярного) содержания нельзя читать, как роман, пропуская страницы и заглядывая в конец, чтобы узнать, чем всё кончилось. (Впрочем, при таком чтении хорошего романа можно много потерять.) Данная книга — не роман (хотя, как во многих романах, в ней есть немало «ответвлений» от «основной линии»), но из сказанного выше о её структуре ясно, что в какой-то степени её можно читать примерно таким же способом. Этому способствует использование трёх шрифтов в её основной части. Обычным шрифтом (как в этом месте) набран преимущественно слегка расширенный и обработанный текст моей упомянутой выше лекции; это, так сказать, «минимальная часть» книги.

Петит на шпонах — это, так сказать, следующий круг чтения. Он адресован читателю, который настолько заинтересуется предметом, что будет готов читать и о смежных вопросах, возникающих в пределах той же тематики. Например, известно, что небесные тела могут двигаться не только по эллипсам, о которых говорил Кеплер, но и по параболам или гиперболам. Однако основные идеи выступают уже при обсуждении эллиптического движения, а раз движение планет именно таково, то эллиптическое движение особенно важно практически, и потому Кеплер только с ним и имел дело; стало быть, стоявшая перед Ньютоном задача объяснения законов Кеплера тоже сама по себе не требовала выхода за рамки эллиптического движения. По всем этим причинам для нас параболическое и гиперболическое движения менее важны, и для посвящённого им текста я нередко использовал петит на шпонах. Тем же шрифтом набрана часть текста, относящаяся к такой постановке вопроса, когда мы исходим из законов Кеплера и спрашиваем, что в таком случае можно сказать о силе притяжения планет к Солнцу. Петит на шпонах может использоваться также и там, где подразумевается несколько бóльшая подготовка читателя.

Наконец, петитом набрано изложение различных дополнительных вопросов более специального характера. Например, такой характер имеет обсуждение движения по гиперболе или параболе в § 7, который и сам по себе является как бы дополнением к основной части книги. Специальными являются также математические уточнениия, которые можно пропустить. Я останавливаюсь на них ради полноты, строгости и т. п., но, честно говоря, нередко делаю это без особого энтузиазма. Дело в том, что при использовании более серьёзной математики ответ на многие из этих вопросов можно дать в два слова, а на более элементарном уровне это получается длиннее. А ведь если читатель заинтересуется «тонкостями», то, скорее всего, он либо уже студент вуза с солидной математической программой, либо скоро станет таковым. Потому я в некоторых случаях только объясняю, что по таким-то причинам остаются ещё такие-то вопросы, ответ на которые даётся в стандартных курсах высшей математики или сразу получается с их помощью.

Подчёркиваю: те рассуждения о законах Кеплера, которые я привожу в основном тексте, хотя и являются элементарными по уровню используемых средств, но по своим идеям весьма и весьма нетривиальны, какую бы подготовку ни имел читатель. А когда я ссылаюсь на сведения из вузовских курсов высшей математики, я ссылаюсь только на сведения, которые для студента должны быть совершенно стандартными.

Три типа шрифтов используются только в основной части книги. Приложения же, по самому смыслу этого слова, отнюдь не предлагаются вниманию читателя как нечто первоочередное и как единое целое. Здесь он без всяких подсказок сам может сделать выбор.

Введение

Одно из самых великих достижений науки приходится на XVII век, когда И. Ньютону (1643—1727) удалось понять движение планет на основании законов механики, открытие которых и само по себе было грандиозным достижением того же времени, опять-таки связанным с именем Ньютона (хотя здесь у него были выдающиеся предшественники). В этой книжке я попытаюсь объяснить, как одно связано с другим, а сперва остановлюсь на том, почему установление этой связи (которую, я надеюсь, можно сделать понятной старшекласснику) было эпохальным достижением.

О том, каким было значение этого достижения для мировоззрения, читателю, полагаю, известно, и говорить об этом ещё раз незачем. Что же касается собственно науки, то тогда впервые удалось понять некий сложный природный процесс на основании отчётливо сформулированных общих законов природы, в которых непосредственно о самом этом процессе не говорится и применимость которых им отнюдь не ограничивается. Понять удалось не только благодаря открытию этих законов, но и благодаря прогрессу в математике (в котором тоже был огромный вклад Ньютона). «Впервые» могло произойти только один раз и произошло именно тогда. Это было не началом науки, но переходом её на современный, качественно новый уровень. Возникла надежда, что в будущем удастся достичь понимания и других явлений, иногда, быть может, с привлечением ещё более сложной математики и (или) с открытием новых законов природы, а иногда и без этого. Излишне напоминать, что эта надежда стала важнейшим стимулом развития науки и что с тех пор она неоднократно оправдывалась, хотя случалось и гоняться за миражами. Слова Сократа: «Я знаю только то, что я ничего не знаю», выражавшие в его время мудрость, в наши дни выражали бы только смесь невежества с претензией на глубокомыслие. Мы, конечно, отнюдь не стали всеведущими, но кое-что мы знаем.

На современников не могли не произвести впечатление и два поставленных при этом «рекорда». Рекорд исторический: загадка планетных движений стояла перед наукой около 2000 лет. Рекорд по части масштабов: Солнечная система намного больше любых других объектов, о которых хоть что-то тогда было известно. (Только насчёт расстояний до звёзд было известно, что они больше размеров Солнечной системы, но тогда об этих расстояниях ничего больше не знали.)

Наука, исследующая движение небесных тел (естественных и искусственных) под действием всемирного тяготения, называется «небесной механикой»[1]. Ради полноты надо добавить, что кроме тяготения теперь приходится учитывать и другие силы. Для космических аппаратов это, конечно, тяга их двигателей, но, кроме того, при длительном движении в космосе по инерции может сказываться давление света и солнечного ветра (т. е. испускаемых Солнцем потоков заряжённых частиц) на антенны и солнечные панели. В некоторых других вопросах приходится считаться с геофизическими свойствами Земли или аналогичными свойствами другого небесного тела; тогда небесная механика соприкасается с другими ветвями науки, и едва ли стоит пытаться предписать, куда именно надо относить подобные вопросы. Под «движением» может подразумеваться не только перемещение по орбите, но и вращение вокруг центра масс данного тела, а для длинных космических аппаратов, состыкованных из нескольких модулей, надо стремиться к тому, чтобы различные колебания этих модулей относительно друг друга были достаточно малыми, в связи с чем приходится изучать колебательные движения и работу устройств, демпфирующих эти колебания.

В этой книжке речь идёт о простейшей задаче небесной механики, так называемой задаче Кеплера. Вообще же небесная механика — весьма обширная дисциплина, изложение основных положений которой требует нескольких томов, причём конкретные вычисления приводятся в них только как примеры. (К счастью, немалую часть вычислительной работы теперь берут на себя ЭВМ, но это не избавляет от необходимости теоретических исследований, без которых даже с чисто утилитарной точки зрения не обойдёшься — только они и позволяют «препарировать» ту или иную задачу к пригодному для ЭВМ виду.)

Как уже говорилось, я излагаю не первоначальные соображения И. Ньютона, а более простой подход, предложенный У. Гамильтоном (1805—1864) в 1846 г. [17]. К моему удивлению, этот вывод законов планетных движений не приводится не только в школьных учебниках физики (включая и учебники повышенной сложности, вроде популярного в мои школьные годы трёхтомного «Элементарного учебника физики» под редакций Г. С. Ландсберга), но и в большинстве университетских курсов общей физики или примыкающих к ним более полных учебниках по механике (но тоже рассчитанных на студентов первого курса) вроде «Механики» С. Э. Хайкина[2]. До недавнего времени един-

[1]Это название предложил П. Лаплас (1749—1827) век с небольшим спустя после фактического возникновения этой науки, которому посвящена настоящая книжка.

[2]Для обычного школьного курса физики мой рассказ всё-таки получается слишком длинным, так что едва ли его когда-нибудь там будут воспроизводить. Для специализированной школы с физико-математическим уклоном он, может быть, и подойдёт. Что же касается вузовского курса общей физики, в котором уже можно

ственным известным мне исключением на русском языке был учебник А. Зоммерфельда [29] (но это уже курс несколько более высокого уровня); недавно к нему добавилась ещё книжка Дж. К. Максвелла [41] (но это вообще не учебник; тот факт, что обе эти книги переводные, подтверждает, что у нас предложенный Гамильтоном подход почему-то не популярен). Обычно такой вывод делается на базе более мощных математических методов, нежели требуется для одного только данного вопроса. Отчасти в этом есть резон: эти методы нужны для многих других целей; применяя их к законам Кеплера, мы знакомим учащегося с тем, как эти методы работают, на сравнительно простом и в то же время исторически важном примере. Но, по-моему, этот резон не препятствует тому, чтобы ещё ранее вывести законы Кеплера планетных движений на более скромной (практически почти школьной) основе. Как я уже сказал, учащийся тем самым получает редкую возможность приобщиться к одному из важнейших событий в истории науки без серьёзной специальной подготовки.

Я упоминаю также с различной степенью подробности о других подходах к задаче Кеплера. Изложение одного из них («обратная задача Кеплера») однажды тоже «обкатывалось» на лекции.

В формулировке законов механики используются понятия (мгновенной) скорости и ускорения, которое есть скорость изменения скорости. Поэтому нам надо уточнить наше понимание того, что такое скорость. Этому посвящён § 4. Перед ним напоминаются свойства эллипса (§ 3). Нам всё время придётся пользоваться координатами; о них говорится в § 2. Наконец, в §§ 5, 6, 7, 8 я объясню связь между законами Кеплера и законами механики. Основная часть здесь — это изложение подхода Гамильтона в § 6. В § 7 намечен другой (предложенный Максвеллом) подход к вопросу о связи законов Кеплера с законами механики, при котором, впрочем, сохраняется и идея Гамильтона. При этом непосредственно решается не сама задача Кеплера, а несколько иная задача, которую можно назвать «обратной» по отношению к предыдущей. Я рассматриваю материал § 7 как дополнительный. Но при

использовать кое-что из «высшей математики», то туда это можно включить без труда. Длинноты в моём рассказе получаются главным образом из-за дополнительных сведений, которые студентам первого курса уже известны, или из-за обходных манёвров, с помощью которых я избегаю «высшей математики»; если ею пользоваться, то моя страница сжимается до строчки формул. Тогда для полного вывода (разумеется, без исторических описаний и прочих «общих разговоров») потребуется что-то вроде одной-полутора страниц. Так что уже для студентов первого курса содержание данной книжки должно не просто быть доступным, но и казаться простым. Для школьников оно труднее, но я надеюсь, что найдётся немало школьников, которые прочитают эту книжку или хотя бы некую её минимальную часть.

желании читатель может, наоборот, сосредоточиться на § 7 (обращаясь по мере надобности к вспомогательному материалу из предыдущих параграфов). Параграф 5, посвящённый II закону Кеплера, предшествует как § 6, так и § 7. В § 8 обсуждается связь между результатами § 6 и § 7.

За исключением приложений VII и VIII, в приложениях изложение научных вопросов (поскольку оно там даётся) обычно имеет описательный характер. Основное содержание приложений I, II, IV — историческое. Исторический элемент присутствует и в других приложениях, но даже в самом историческом из них приложении III на первый план в конце концов выходит физика. Ещё более физично приложение V. В приложении VI истории науки не меньше, чем собственно науки, но если говорить о последней, то обращаю внимание на то, что здесь приводится формулировка ньютоновских законов динамики в том виде, как они были сформулированы самим Ньютоном. По существу, они должны быть известны из школьного курса физики, но, возможно, в другой форме (и, может быть, без названий: I закон Ньютона, II закон, III закон). Приложение VIII, рассчитанное (как уже говорилось и как видно из его заглавия) на более подготовленных читателей, имеет математический характер.

Книга содержит ряд литературных указаний по поводу рассматриваемых или бегло упоминаемых в ней вопросов. Не надо удивляться (и тем более ужасаться), что их много: в большинстве своём они предназначены для знатоков, — я надеюсь, что таковые тоже найдутся среди читателей. Часто литературные ссылки в тексте даются вместе с некоторыми замечаниями по поводу упоминаемых книг или статей; кроме того, ряд замечаний сопровождает список литературы.

§ 1. Задача Кеплера

Позднее я более конкретно поясню, с какими новыми достижениями механики и математики было связано объяснение основных законов планетных движений, опубликованное И. Ньютоном в 1687 г. в книге «Математические начала натуральной философии»[1]. Сперва же укажу, о каких законах планетных движений идёт речь.

В начале XVII в. Иоганн Кеплер (1571—1630), обрабатывая наблюдения Тихо де Браге (1546—1601), открыл три закона планетных движений, известные как законы Кеплера.

I. *Каждая планета движется в пространстве по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Эллипс — это кривая на плоскости, представляющая собой как бы сплюснутую окружность (рис. 1); точное определение эллипса см. в § 3. У эллипса имеются центр O и два фокуса F_1, F_2. Центр — это центр симметрии (в данном случае мы ссылаемся на известное общее понятие). На рис. 1 изображена также так называемая большая ось эллипса; её длина обозначается через $2a$. Об оси и о фокусах тоже говорится в § 3.

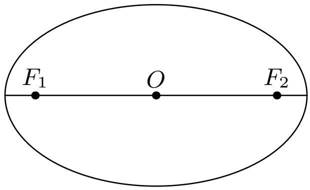


Рис. 1

Первый закон Кеплера сообщает нам об орбите планеты (т. е. о кривой, по которой эта планета движется). О том, как происходит движение по орбите, сообщает II закон Кеплера. Точнее, II закон информирует нас (несколько косвенным образом) о скорости данного движения.

II. *Радиус-вектор планеты (т. е. отрезок, соединяющий Солнце с нею), описывает равные площади в равные промежутки времени.*

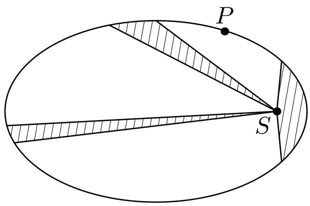


Рис. 2

На рис. 2 заштрихованы три сектора, которые планета P проходит за одинаковое время; S — Солнце. Чтобы плоскости секторов были одинаковыми, дуга эллипса, проходимого планетой за данное время, должна быть, грубо говоря, тем больше, чем ближе P к S. Поэтому планета движется с неравномерной скоростью: скорость всего больше, когда P всего ближе к S, и всего меньше, когда P всего дальше от S.

[1] «Натуральная философия» — обычное в то время название естествознания, особенно физики. В Англии оно употреблялось ещё в конце XIX века.

Первые два закона относятся к движению одной планеты. В III законе Кеплера сравниваются движения двух различных планет.

III. *Квадраты периодов обращения двух планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

На рис. 3 условно изображены орбиты двух планет; a_i — большие полуоси[2]. Если планета P_1 делает один оборот вокруг S за время T_1 (это T_1 и называется периодом обращения первой планеты), а P_2 — за время T_2, то

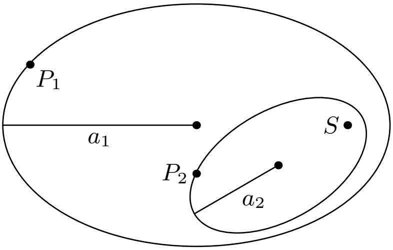


Рис. 3.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{1}$$

Грубо говоря, чем дальше планета от Солнца, тем больше период её обращения. От такой качественной формулировки II закон Кеплера отличается не только тем, что он указывает количественное соотношение между T_i, но и тем, что это соотношение зависит только от отношения больших полуосей. Если орбита $Э_1$ заметно более «сплюснута», чем вторая орбита $Э_2$, то вполне можно представить себе, что заметная часть $Э_1$ лежит внутри $Э_2$, тогда как

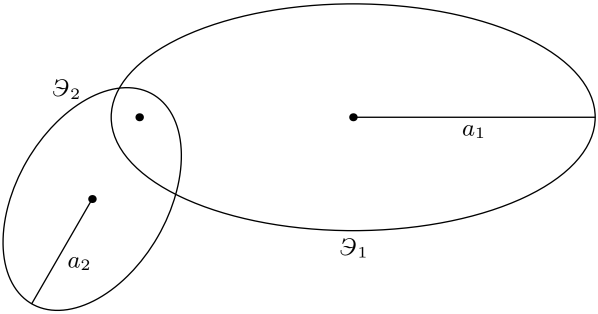


Рис. 4

только малая часть $Э_2$ попадает внутрь $Э_1$; какую же из них считать более близкой к S? Согласно III закону, если мы хотим сравнить периоды, то об этом незачем думать; важно только, что на рис. 4 полуось a_1 вдвое больше a_2, и потому $T_1/T_2 = \sqrt{8} = 2{,}83\ldots$

[2]Большая полуось, как объясняется в § 3, откладывается не от фокуса, а от центра орбиты. На рис. 3 две орбиты имеют общий фокус S (Солнце), но центры этих орбит различны.

Первый закон был открыт в 1608 г., второй — в 1602 г.; опубликованы они были в 1609 г. Третий закон был опубликован в 1617 г. и открыт, видимо, незадолго до того. Используя эти законы и доступные ему наблюдательные данные, Кеплер составил и в 1628 г. издал астрономические таблицы, названные им «Рудольфовыми» в память о немецком императоре Рудольфе II (1552—1612 гг., царствовал с 1576 г.), оказывавшем некоторую поддержку Кеплеру и Тихо де Браге. Они позволяют определить положения планет, Луны и Солнца и, в частности, указывают солнечные и лунные затмения на много лет вперёд. Эти таблицы оставались в употреблении и давали практически достаточную точность примерно 100 лет, пока в астрономии не наступила новая эра, связанная с использованием при измерениях телескопов с угломерными приспособлениями[3] и при расчётах — механики Ньютона. Для сравнения можно сказать, что до того наиболее точными были «Прусские таблицы», опубликованные в 1551 г. Эразмом Рейнгольдом (1511—1553 гг.), работа которого финансировалась прусским герцогом. Рейнгольд основывался уже на системе Коперника. В близкие ко времени опубликования годы эти таблицы давали ошибку в координатах планет[4] порядка $10'$, что в то время было неплохо. (Невооружённый глаз с трудом замечает изменение взаимного расположения близких небесных светил на $4'$. Правда, Тихо де Браге достиг в несколько раз бо́льшей точности, но это было уникальным достижением.) Однако к 1600 г. таблицы Рейнгольда расходились с наблюдениями на несколько градусов.

Ради точности надо сказать, что в теоретическом отношении Кеплер при своей работе опирался не только на открытые им законы планетных движений. Были ещё два важных фактора, которые он учитывал, — атмосферная рефракция (т. е. изменение направления световых лучей в земной атмосфере) и предварение равноденствий, — и были серьёзные проблемы с Луной, движение которой вокруг Земли недостаточно точно описывается законами Кеплера. Описательно об этом говорится в приложении I. Что касается первых двух факторов, то Кеплер принципиально нового тут не внёс и учитывал их так же, как его предшественники, так что высокая точность его таблиц связана не с ними. Что касается Луны, то Кеплер модернизировал теорию её движения, но здесь он работал в духе прежних теорий с эпициклами и деферентами, только у него они могли быть эллипсами. Здесь его успехи были более скромными, чем с планетами, а в некотором отношении он даже сделал шаг назад по сравнению с Тихо де Браге [30]. Поэтому «лунная» деятельность Кеплера не имела такого большого значения, как открытие трёх законов, но, конечно, исследования Тихо де Браге и Кеплера движения Луны облегчили работу Ньютона и его непосредственных последователей, которые исследовали движение Луны уже на основании механики Ньютона.

[3] Первые телескопы появились ещё в 1610 г., но устройства для измерения углов к ним приспособили несколькими десятками лет позже.

[4] То есть в углах, определяющих направление на планеты. Точнее о том, что такое координаты небесного светила, говорится в приложении I.

Описательно можно сказать, что так называемая задача Кеплера состоит в том, чтобы получить эти три закона как следствия законов механики. Разумеется, сам Кеплер такой задачи ставить не мог, ибо Ньютон, давший чёткую общую формулировку законов механики, родился после смерти Кеплера. Но она назрела к 80-м гг. XVII в.

Учёные древности и средневековья хорошо представляли себе равномерное прямолинейное и круговое движения, по крайней мере в кинематическом отношении[5]. (В других отношениях дело обстояло хуже — об инерции в лучшем случае стали догадываться в конце средних веков, а с полной отчётливостью закон инерции указал Галилей.) Но о кинематике неравномерного движения у них не было отчётливых представлений, если не считать отдельных, так сказать, «проблесков», остававшихся без последствий. В этом отчасти была причина их трудностей — установленные Ньютоном законы механики относятся к мгновенным состояниям движущихся тел и являются довольно простыми по формулировке, но о них и говорить нечего, пока нет правильных кинематических понятий и закона инерции Галилея.

Другая причина трудностей состояла в догме, провозглашённой древнегреческими философами, прежде всего наиболее знаменитыми

[5]Кинематика — раздел механики, который изучает движения тел только с геометрической стороны и не вникает во взаимодействия тел (силы), определяющие эти движения. По своему характеру кинематика весьма геометрична; это, так сказать, «геометрия плюс время»; динамика же, которая рассматривает движения тел в связи с силами, более физична. Если статика — третий раздел механики, который рассматривает условия взаимного равновесия тел, — уже в древности сделала немалые успехи, то кинематика почти целиком (а динамика — целиком) является творением нового времени. (Определение кривой, теперь называемой «спиралью Архимеда», было кинематическим, и в связи с указанным Архимедом (ок. 287—212 до н. э.) построением касательной к ней имеется подозрение, что он знал о сложении скоростей при сложении движений. Но, по-видимому, он считал эти соображения только эвристическими и оставил их «для себя». У средневековых мыслителей можно найти отдельные высказывания, не связанные специфически с равномерными прямолинейными или круговыми движениями; в литературе встречается и более высокая оценка их достижений в кинематике, не сводящаяся к «отдельным высказываниям [52]. Однако независимо от того, как оценивать эту деятельность, она, по-видимому, не имела последствий.) Основное для кинематики понятие мгновенной скорости ввёл Галилей (1564—1642; публикация относится к 1638 г.), и он же в частном случае прямолинейного движения ввёл второе основное понятие — ускорение. Для круговых движений ускорение ввёл Гюйгенс (1629—95)(см. ниже), а в общем случае это понятие фактически установил Ньютон одновременно с законами динамики (хотя формально он не говорил об ускорении, см. приложение VI). Однако название «кинематика» появилось позднее — его предложил в 1834 г. А. Ампер (1775—1836), имя которого присвоено единице силы электрического тока, поскольку Ампер — один из основоположников электродинамики. (Ампер предложил также название «кибернетика». Не знаю, что он относил к кибернетике в то время, но уверен, что он не мог предвидеть, как это название будет употребляться спустя более чем полтора века.)

из них — Платоном (428—348 до н. э.) и Аристотелем (384—322 до н. э.)[6]. Догма утверждает, что окружность является самой совершенной из линий. Поэтому движение небесных тел, которые тоже совершенны, может быть связано только с равномерным движением по окружности (хотя допускалось комбинировать такие «совершенные» движения). Если Платон и не был автором этой идеи — она, по-видимому, возникла раньше среди последователей Пифагора (ок. 580—ок. 500 до н. э.), — то в любом случае важную роль сыграла её поддержка Платоном. Но не выражал ли Платон точку зрения тогдашних учёных-астрономов, по своему обыкновению возводя её в непререкаемый догмат, поскольку она гармонировала с его философским мироощущением[7]? И не было ли такое убеждение астрономов просто следствием полнейшей невозможности в то время описывать математически какие бы то ни было другие движения? На идею о совершенстве окружности и сферы могло также повлиять открытие шарообразности Земли и Луны, но подозреваю, что главным образом здесь произошло возведение нужды в добродетель по схеме: «только равномерные круговые движения доступны для науки — только они и являются объектами, достойными внимания, — они совершенны». В действительности ещё при жизни Платона математики начали исследовать линии, отличные от прямых и окружностей, так что «нужда» если не отпала, то по крайней мере смягчилась. Но «добродетель» осталась — идея, овладевшая умами философов, обрела значительную силу, тем более что Аристотель, во многом расходившийся с Платоном, в данном вопросе принял ту же точку зрения. На много веков она стала господствующей, хотя в арсенале математиков появился

[6] Должен сразу же оговориться: Аристотель также и великий естествоиспытатель, он внёс немалый вклад в биологию. Кроме того, он дал первое систематическое изложение логики, по-видимому в значительной степени на основании собственных изысканий. Но с нашей темой он соприкасался только как философ и ещё, как мы бы теперь сказали, энциклопедист, причём популяризатор. Что касается Платона, то его основные интересы относились к морали и социальной жизни. Это, казалось бы, ещё дальше от математики и астрономии, но Платону они нравились, — вероятно, он от занятия ими получал интеллектуальное наслаждение. Кроме того, он считал, что математика развивает ум (в чём мы с ним согласны) и что возвышенные размышления о мироздании способствуют тому, чтобы человек склонился к его общественному идеалу. Такая позиция Платона придавала математике и отчасти астрономии респектабельный характер.

[7] Ведь когда он столь же категорическим образом утверждал, что существуют только числа, которые мы теперь называем натуральными, а те, кто заикается о числе $1/2$ (о числе $\sqrt{2}$ даже и не заикались), суть невежды, то он определённо выражал (и возводил в философскую догму) точку зрения тогдашних математиков-теоретиков (похоже, что тогда же имелись люди, искусные в практических вычислениях, которые могли иметь на сей счёт иное мнение, но Платон попросту не считал их мыслителями).

ряд других хорошо изученных кривых. Даже Коперник не решился с ней порвать, комбинируя равномерные круговые движения на манер Птолемея. Что же касается неравномерности движения, то подходящая система понятий была выработана только в XVII веке.

Тем не менее уже в древности умели довольно точно представлять запутанные движения небесных светил в виде комбинации равномерных круговых движений, что делалось сперва с помощью некоей системы вращающихся сфер, затем с помощью деферентов и эпициклов, которые и были положены в основу системы Птолемея (см. приложение I). Вероятно, читатель об этом слышал. С математической точки зрения античные круговые модели связаны с так называемыми рядами Фурье (1772—1837). Я не буду объяснять точно это понятие, но скажу описательно, что речь идёт о способе представлять движения довольно общего типа посредством комбинации равномерных круговых движений. В небесной механике пишут формулы, определяющие направление с Земли на планету; оказывается, геометрические построения старинных астрономов были равносильны некоторым формулам такого типа. Так что, образно выражаясь, древние и средневековые астрономы обращались к Фурье, минуя жившего веком раньше Ньютона. Неудивительно, что такой «большой скачок» не мог оказаться вполне успешным. (Удивительно, что отчасти он всё-таки был успешным.)

Ряды Фурье широко используются и современными астрономами, но, конечно, теперь это делается совершенно иначе, чем у древних астрономов или Коперника, — эти ряды строятся с помощью известных законов механики в сочетании с данными наблюдений, тогда как в старину они (точнее, равносильная им геометрическая картина с эпициклами) могли подбираться только эмпирически. В этом одна из причин достигнутого за последние века огромного увеличения точности (другая причина, конечно, состоит в повышении точности наблюдательных данных).

Но теперь обращаться к рядам Фурье приходится тогда, когда мы учитываем такие факторы, как взаимное притяжение планет или — в случае спутников — некоторые особенности внутреннего строения планет. В этой книжке мы останемся на более раннем (и менее точном) уровне, и нам ряды Фурье не понадобятся, потому что независимо от них мы, следуя Ньютону, получим точное решение более простой задачи о движении, в которой указанными факторами пренебрегают. Это как раз та задача, к которой относятся законы Кеплера.

Кеплеру удалось получить точное математическое описание для некоторого встречающегося в природе неравномерного движения, происходящего не по прямой и не по кругу. Но кеплеровское описание относится именно к этому движению и ни к какому другому. Заметьте, что в формулировках законов Кеплера нет основных кинематических понятий «скорость», «ускорение». (В то время они уже встречались, но применительно опять-таки к конкретному и притом более простому движению — движению падающего тела — у его современника Галилея.) Для механики типична такая постановка задачи: имеются тела, которые в некий начальный момент расположены таким-то образом и имеют такие-то скорости; на тела действуют такие-то силы; как эти тела будут двигаться? Ответ мог бы давать правило движения этих тел, непосредственно определяющее их положение в зависимости от времени. Так это и есть для прямолинейного равномерно ускоренного движения (из школьного курса физики известна формула $s = v_0t + at^2/2$, где s — путь, пройденный за время t, v_0 — скорость в начальный момент времени $t = 0$, a — ускорение). Однако может случиться, что ответ нельзя сформулировать в таком простом виде, и всё же можно указать некие правила, которые несколько косвенным образом полностью характеризуют движение тел. Именно такой характер имеют законы Кеплера. С точки зрения динамики, Кеплер нашёл ответ к ещё не сформулированной задаче! А до него для той же задачи был эмпирическим путём найден менее удовлетворительный приближённый ответ. И обратите ещё внимание, на то что описать неравномерное движение по эллипсу Кеплеру удалось в терминах некоторой вспомогательной величины — площади, заметаемой радиус-вектором, — которая изменяется с постоянной скоростью. Конечно, если в механической задаче удаётся поступить таким образом, то это очень полезно. Но в исходных формулировках законов механики об этом нет речи, хочешь не хочешь, а надо прямо говорить о неравномерном движении, и только при исследовании некоторых конкретных задач с использованием какой-то их специфики каким-то образом иногда удаётся свести дело к изменению каких-то вспомогательных величин с постоянной скоростью, причём в различных случаях это может делаться по-разному.

В чём же состоит задача, которую теперь называют «задачей Кеплера» и решение которой даётся его законами? В ней спрашивается: каким образом будет двигаться материальная точка P («планета») с массой m_P в поле тяготения, создаваемом неподвижной точкой S («Солнце») с массой m_S? (Материальная точка — это тело столь малых размеров, что ими в интересующей нас задаче можно пренебречь. Одно и то же тело в одних задачах можно считать материальной точкой, а в других нельзя. Планеты огромны по сравнению с теми размерами, которые нам привычны из повседневной жизни, — не только с размерами нашего тела, но и с размерами города, — но по сравнению с межпланетными расстояниями они столь малы, что в большинстве задач о движении небесных тел их можно считать материальными точками[8].) Второй закон механики Ньютона[9] гласит, что ускорение точки P связано с действующей на P силой по формуле

$$m_P \cdot (\textit{ускорение}) = \textit{сила},$$

а закон всемирного тяготения — что сила, действующая на P, направлена от P к S и равна по величине fm_Pm_S/r^2, где r — расстояние $|SP|$, а f — «постоянная тяготения», одинаковая для всех тел. Чтобы в формуле записалась не только величина, но и направление этой силы, воспользуемся векторами (т. е. направленными отрезками), с которыми учащийся в какой-то степени имел дело на уроках если не математики, то физики. Обозначим вектор $\overrightarrow{SP}$ через $\mathbf{r}$, а его длину $|SP| = |\mathbf{r}|$ — через r. Сразу же предупредим, что в дальнейшем точка S будет играть особую роль (как оно и должно быть в гелиоцентрической системе мира[10]) и математически это отразится, в частности, в том, что мы примем её за «начало отсчёта». Когда некая точка S — не обязательно в нашей задаче — играет роль «начала отсчёта», то вектор $\overrightarrow{SP} = \mathbf{r}$ называют радиус-вектором точки P (этот термин уже встречался в формулировке II закона Кеплера.) Тогда вектор единичной длины, направленный от P к S, можно записать как $-\mathbf{r}/r$ (разделить вектор на положительное число r — это значит взять вектор того же направления, но длина которого в r раз меньше; вектор со знаком минус — это вектор, направление которого изменено на противоположное). Мы будем часто

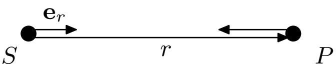


Рис. 5

[8]Однако в механике успешно решаются и задачи, в которых размерами тела пренебрегать нельзя. В подобных случаях тело разбивают на столь малые части, что их уже можно считать материальными точками. Только тогда надо ещё подумать, как эти части связаны друг с другом, т. е. как они друг на друга действуют, так что задача существенно усложняется. Но в принципе всё снова сводится к движению некоторой системы материальных точек.

[9]Формулировку законов механики Ньютона в том виде, как это было сделано им самим, см. в приложении VI.

[10]Напомню, что гелиоцентрическими называются представления о нашей планетной системе, согласно которым в её центре находится Солнце, а вокруг него наряду с другими планетами вращается и Земля; прежние же представления, по которым Земля находится в центре и неподвижна, называются геоцентрическими. Хотя речь идёт только о Солнечной системе — крохотной частице огромной Галактики (насчитывающей помимо Солнца ещё 100 миллиардов звёзд) и сама Галактика — только одна их многих галактик (в доступной наблюдению части Вселенной их тоже десятки миллиардов), по традиции при обсуждении строения Солнечной системы сохраняют название «система мира».

обозначать вектор $\mathbf{r}/r$ через $\mathbf{e}_r$. Поэтому у нас

$$\textit{сила, действующая на } P = -f\frac{m_P m_S}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -f\frac{m_P m_S}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

и получается, что

$$\textit{ускорение } P = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{2}$$

где $k = f m_S$ не зависит от m_P и r, т. е. k одно и то же для всех планет. (Но k зависит от массы m_S центрального притягивающего тела. Когда мы рассматриваем вращение планет вокруг Солнца, k одно, а когда рассматриваем вращение спутников вокруг Юпитера — другое.)

Теперь мы можем точно сформулировать задачу Кеплера: исследовать движение точки P, происходящее по закону (2).

На самом деле это не совсем то же самое, что раньше было описательно названо «задачей Кеплера», потому что, как мы в общих чертах увидим, из равенства (2) следует не то, что движение происходит по эллипсу, как утверждает I закон Кеплера, а что оно происходит по одной из так называемых кривых второго порядка: эллипсу, параболе или гиперболе, к чему в качестве своего рода вырожденного или предельного случая добавляется ещё движение по прямой. (Для движения по отличным от эллипса кривым II закон Кеплера остаётся без изменений, а III закон определённым образом видоизменяется.) Но мы ведь интересуемся планетами, а они не только движутся согласно закону (2), но и остаются на ограниченном расстоянии от Солнца. Из названных мной кривых ограниченным является только эллипс. Правда, можно спросить: а не могло бы движение происходить, скажем, по гиперболе, но не по всей гиперболе, а только по некоторой её дуге? Ведь тогда расстояние до Солнца тоже оставалось бы ограниченным. По-моему, это кажется неправдоподобным, и вы легко поверите, что можно доказать невозможность такого странного движения. Доказательство несложное; оно содержится в том материале, который я «ради очистки совести» добавил к тексту своей лекции. Но подозреваю, что если бы я не обратил на это внимание, читатель едва ли подумал бы, что такие вещи, в принципе, тоже надо доказывать. Если он пропустит соответствующую вставку, то едва ли много потеряет. Ньютона, как я понимаю, это тоже не волновало.

Сделаю ещё несколько замечаний по поводу условий задачи Кеплера.

1. В задаче Кеплера мы считаем планеты и Солнце точками. Это можно мотивировать двумя независимыми доводами.

1а. Планеты и Солнце с большой точностью имеют правильную сферическую форму. Ньютон доказал, что если шарообразное тело состоит из однородных концентрических слоёв (так что в каждом слое плотность всюду одинакова; она, стало быть, зависит только от расстояния до центра тела), то вне этого тела создаваемое им поле тяготения такое же, какое создавалось бы, если бы вся его масса была сосредоточена в его центре. Об этом говорится в приложении VII. Что форма Солнца и планет близка к правильной сферической, известно из наблюдений. А предположение, что плотность с большой точностью зависит только от расстояния до центра, мотивируется так: в противном случае внутри тела под действием взаимного притяжения его частей возникли бы внутренние напряжения, намного превышающие те, которые могут выдерживать самые прочные материалы, и под действием этих напряжений произошло бы перераспределение вещества.

1б. Если расстояние между телами T_1, T_2 намного больше их размеров, то их взаимное притяжение с большой точностью оказывается таким же, как если бы они были материальными точками такой же массы. Действительно, сила притяжения тела T_2 к телу T_1 является суммой сил притяжения всех частиц $Ч_2$ второго тела к частицам $Ч_1$ первого тела. Мы хотим как бы переместить все частицы $Ч_1$ тела T_1 в его центр масс O_1, а все частицы $Ч_2$ тела T_2 — в его центр масс O_2. Ясно, что если тела T_1, T_2 достаточно далеки друг от друга, то от такого перемещения как направления от $Ч_2$ к $Ч_1$, так и расстояния между $Ч_1$ и $Ч_2$ практически не изменятся, а значит, почти не изменится и суммарное притяжение всех этих частиц. (Данное рассуждение годилось бы и в том случае, если бы притяжение было обратно пропорционально не второй, а, скажем, третьей степени расстояния. Рассуждение 1а же специфически связано именно с ньютоновским законом.)

В рассуждении 1б молчаливо подразумевалось, что сила, действующая на тело T в поле тяготения, создаваемом несколькими телами $T_1, T_2, \ldots$, равна сумме сил притяжения T к T_1, T к T_2,... Это может показаться само собою разумеющимся, но «очевидность» здесь основана на «принципе»: результат совместного действия нескольких причин «складывается» из результатов действия каждой причины по отдельности. В такой общей форме (не всегда достаточно определённой: что значит «складывается», но в нашем случае речь идёт действительно о математическом сложении) данный «принцип» часто подтверждается и в науке, и в обычной житейской практике, отчего мы и склонны относиться к нему с доверием и использовать его бессознательно, но всё же он не универсален. (С чисто математической точки зрения он означает примерно то же самое, что и утверждение, будто все функции линейны.) Справедливость сделанного утверждения о всемирном тяготении — это некоторое дополнение к закону Ньютона. (Оно не нужно для самой задачи Кеплера, но нужно в ряде других вопросов, в том числе и в связи с её мотивировкой. Мы использовали его в рассуждении 1б, а позднее будем использовать в связи со сказанным в рассуждении 1а.) Согласно более точной теории тяготения Эйнштейна данное «самоочевидное» утверждение является приближённым. Оно справедливо с высокой степенью точности для тех сравнительно слабых (по меркам этой теории) гравитационных полей, которые имеются в Солнечной системе, но должно ощутимым образом нарушаться для значительно более сильных гравитационных полей. Прямых наблюдательных данных на сей счёт не имеется, но, поскольку имеются другие подтверждения теории Эйнштейна, сомневаться не приходится.

В конце XVIII в. началась разработка методов, позволяющих количественно определить, какое влияние оказывает распределение масс внутри двух тел T_1, T_2 (в том числе размеры и форма этих тел) на их взаимное притяжение. В наши дни это оказалось необходимым для космонавтики, а до того подобные уточнения были нужны для анализа движения естественного спутника Земли — Луны. Но когда Ньютон писал «Математические начала натуральной философии», их ещё не требовалось[11].

2. Другое упрощающее предположение, сделанное в задаче Кеплера, состоит в том, что притягивающий центр неподвижен, т. е. мы пренебрегаем силой, действующей со стороны планеты на Солнце. В какой степени это оправдано? В полном соответствии со II законом механики Ньютона эта сила такая же, как и сила притяжения планеты к Солнцу. Но так как m_S намного больше m_P, ускорение, которое под действием этой силы приобретает Солнце, намного меньше, чем ускорение планеты. Теперь известно, что даже у самой массивной из планет, Юпитера, масса m_P в 1000 раз меньше m_S, а суммарная масса всех остальных планет не дотягивает и до половины массы Юпитера.

Ньютон помимо задачи Кеплера исследовал «задачу двух тел» — задачу о движении двух материальных точек под действием их взаимного притяжения. Оказалось, что в основном эта задача сводится к задаче Кеплера. А именно, в задаче двух тел «планета» P движется так же, как она двигались бы в задаче Кеплера вокруг воображаемого неподвижного центра, находящегося в центре масс C системы двух материальных точек S, P и создающего поле тяготения, отвечающее массе $m_S^2/(m_S + m_P)$; для этой вспомогательной задачи в формуле (2) значение k уменьшено в $1 + m_P/m_S$ раз (по сравнению с введённым выше $k = fm_S$)[12]. (Это, кстати, доказывается не так уж сложно, проще, чем проведенное Ньютоном исследование задачи Кеплера. У меня просто не было времени говорить о сведе́нии задачи двух тел к задаче Кеплера.) Данный результат не зависит от соотношения между m_P и m_S, он с успехом применяется к движению двойных звёзд, компоненты которых могут иметь близкие массы. Но применительно к Солнечной системе оказывается, что даже для пары «Солнце—Юпитер» центр масс находится внутри Солнца, так что

[11]И всё же в «Началах» можно найти также некоторые первые шаги такого характера, связанные с задачами о приливах, форме Земли и её вращении, которые в настоящей книжке не рассматриваются.

[12]Сказанное о «планете» относится также и к «Солнцу» — S тоже движется так, как это получилось бы во вспомогательной задаче Кеплера с притягивающим центром в C. Только для S эта задача не та же, что для P: во вспомогательной задаче для S коэффициент k равен

$$\frac{fm_P}{1 + m_S/m_P}.$$

орбита Юпитера при учёте движения Солнца изменяется незначительно, оставаясь эллипсом, близким к тому, каким она была бы в задаче Кеплера. Обращение к задаче двух тех необходимо при исследовании двойных звёзд, массы компонент которых различаются друг от друга гораздо меньше, чем массы Солнца и планет.

3. Но движение планет в Солнечной системе не сводится полностью ни к задаче Кеплера, ни к задаче двух тел: надо принимать во внимание взаимное притяжение планет. Оно мало по сравнению с играющим главную роль притяжением к Солнцу, однако его влияние сказывается на протяжении большого времени. Учёт взаимного притяжения планет, а также других факторов, которые были упомянуты при объяснении смысла выражения «небесная механика», и делает эту науку сложной. Но в задаче Кеплера об этом нет речи. В дотелескопическую эру все эти факторы можно было не учитывать. (Правда, на самом деле кое-что из этого сказывается уже и при той точности, какая была у Кеплера, усложняя движение Луны и приводя к предварению равноденствий. Но, как говорилось, трактовка этих двух вопросов у Кеплера оставалась чисто эмпирической, как у его предшественников.)

Замечание 1.1. Собственно говоря, знание орбиты планеты ещё не даёт полного ответа на вопрос о движении этой планеты, потому что надо знать ещё, какое положение она занимает на этой орбите в тот или иной момент времени. В описании движения планеты по орбите, доставляемом II законом Кеплера, непосредственно даётся точная (хотя и чуть косвенная) информация о скорости данного движения в зависимости от положения планеты, но не о самом положении. Уже Кеплер и Ньютон, в общем, нашли способ определять, каким будет это положение в тот или иной момент времени. Но этот вопрос остаётся вне рамок настоящей книжки, и я только вкратце сообщу кое-что по этому поводу в замечании 6.2.

§ 2. Координаты

Начиная с XVII в. в математике и её приложениях систематически используется координатный метод, связывающий геометрию и алгебру гораздо теснее, чем это было до того. Полагаю, что какое-то представление о нём читатель имеет, но считаю не лишним рассказать о нём с самого начала.

Ещё до того, как школьник услышит о координатах на плоскости, он узнаёт о координатах на земном шаре. Например, Москва имеет координаты 55,5° северной широты и 37,5° восточной долготы. Зная об этом, можно сразу найти на немой карте, где нет никаких названий, но нанесена сетка параллелей и меридианов, то место, где находится Москва. Исторически и были сперва введены географические координаты на Земле и координаты нескольких типов на небесной сфере. И только потом появились более простые координаты на плоскости. Нам понадобятся координаты двух типов, первый из которых уже должен быть известен читателю.

Декартовы координаты[1], названные так в честь Р. Декарта (1596—1650), сыгравшего наиболее заметную роль в открытии и пропаганде «координатных методов» в геометрии[2]. Возьмём две перпендикулярные линии на рассматриваемой плоскости, пересекающиеся в некоторой точке O («начале координат»), и назовём одну из них (на рисунке она обычно изображается горизонтальной) «осью иксов» Ox или «осью абсцисс», а другую — «осью игреков» Oy или «осью ординат». Выбрав на первой оси некоторое направление, которое мы будем условно называть «положительным», мы можем охарактеризовать положение любой точки A на оси Ox одним числом x («абсциссой») — расстоянием $|OA|$, которое берётся со знаком плюс, если направление от O к A является положительным, и со знаком минус — в противном случае; точка O имеет абсциссу 0. (Пока что я описал известную в алгебре «числовую

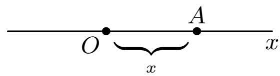


Рис. 6

[1] На самом деле под «декартовыми координатами» часто понимаются координаты более общего типа, но я определяю только тот частный их случай, который нам нужен, и позволю себе понимать название «декартовы координаты» только как относящееся к этому случаю.

[2] Наряду с Декартом здесь надо упомянуть о П. Ферма (1601—1665), хотя его имя ни в какой системе координат не увековечено. (Кажется, среди геометрических понятий оно использовано только в названии одной малоизвестной спирали.) Широкой публике Ферма известен как автор «великой теоремы (на самом деле скорее гипотезы) Ферма», которую удалось доказать только спустя 350 лет после того, как она была сформулирована.

ось», или «числовую прямую».) Аналогично положение любой точки y на второй оси характеризуется одним числом y («ординатой»). Наконец,

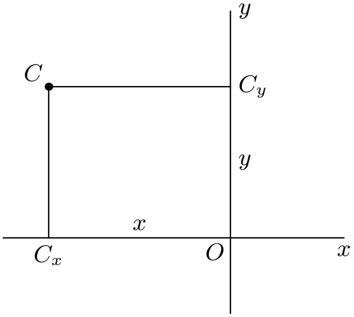


Рис. 7

для любой точки C на плоскости мы опускаем из C перпендикуляры на наши оси; скажем, $CC_x \perp Ox$ и $CC_y \perp Oy$. Можно ещё сказать, что мы проводим через C прямые линии, параллельные осям, и обозначаем пересечения этих линий с осями Ox и Oy через C_x и C_y. Это даже несколько лучше, потому что охватывает и тот случай, когда C лежит на одной из осей или даже на обеих осях, — в последнем случае $C = O$. Говорят, что C_x (соответственно C_y) — это проекция C на ось абсцисс (соответственно ординат). Абсцисса x точки C_x и ордината y точки C_y полностью характеризуют положение точки C; говорят, что (x, y) суть (декартовы) координаты (абсцисса и ордината) точки C.

До сих пор речь шла о координатах на плоскости. Сходным образом вводятся декартовы координаты в пространстве. Проведём через какую-нибудь точку O

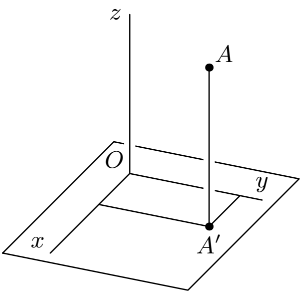


Рис. 8

(«начало координат») три взаимно перпендикулярные прямые, которые будем называть осями абсцисс (ось x), ординат (ось y) и аппликат (ось z). Выберем на каждой из них положительное направление. Через оси x, y проходит плоскость, которую так и будем называть плоскостью (x, y). Я хочу объяснить, что такое координаты (x, y, z) какой-нибудь точки A. Опустим из A перпендикуляр на плоскость (x, y); обозначим через A' его основание. Первые две координаты точки A — это координаты точки A' в плоскости (x, y). Третья координата — это длина отрезка AA', взятая со знаком плюс или минус, который выбирается так. Плоскость (x, y) делит пространство на два полупространства. Аппликата z равна $|AA'|$, если AA' лежит в том же полупространстве, что и положительная полуось z; в противном случае $z = -|AA'|$. Здесь неявно подразумевалось, что A не лежит в плоскости (x, y); если же лежит, то $z = 0$.

Сейчас третья координата была определена не так, как первые две. Но можно сказать ещё так. Назовём проекцией A_z точки A на ось z точку пересечения этой оси с проходящей через A плоскостью, параллельной плоскости (x, y). Тогда аппликата z точки A — это координата точки A_z на оси z, т. е. $z = \pm|OA_z|$, где знак берётся в зависимости от того, положительно ли направление от O к A_z или нет. Аналогично определяются проекции A_x, A_y точки A на оси x и y. Например, A_x — это точка пересечения оси x с проходящей через A плоскостью, параллельной плоскости (y, z), которая содержит оси y и z. После этого можно сказать, что координаты x и y точки A — это координаты точек A_x и A_y на соответствующих осях. Что новое определение координаты z равносильно прежнему — это очевидно. Что новое определение координат x и y равносильно прежнему — это, может быть, не так очевидно, но становится очевидным, если обратить внимание, на то что при пересечении проходящих через A плоскостей, параллельных плоскостям (y, z) и (x, z), получается прямая, которая параллельна оси z (поскольку та получается при пересечении плоскостей (x, z) и (y, z)) и проходит через точку A'.

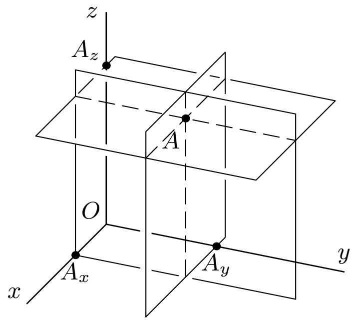


Рис. 9

Значение координат состоит не только в том, что они позволяют задавать при помощи чисел положения точек на плоскости или в пространстве, но и в том, что они позволяют охарактеризовать алгебраическим образом различные линии, а в пространстве — также и поверхности. (Для самой математики важнее именно алгебраическое описание геометрических образов.) Например, биссектриса одного из углов между осями Ox и Oy на плоскости состоит из всех тех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y = x$. А что можно сказать о точках C, для которых $x^2 + y^2 = a^2$? В прямоугольнике OC_yCC_x сто-

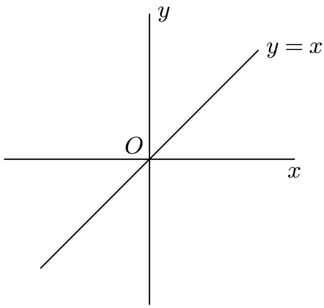


Рис. 10

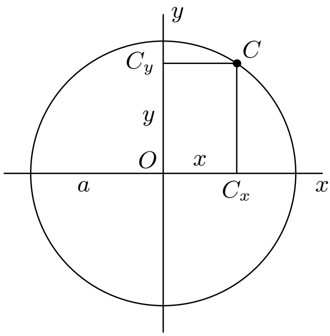


Рис. 11

роны $|OC_y|$ и $|C_xC|$ равны $|y|$, а в треугольнике $\triangle OCC_x$ квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е. $|OC|^2 = |OC_x|^2 + |C_xC|^2 = x^2 + y^2 = a^2$. Мы приходим к выводу, что интересующие нас точки C — это те точки, расстояние от которых до O равно a, т. е. они лежат на окружности радиуса a с центром в O. Говорят, что $x^2 + y^2 = a^2$ есть уравнение этой окружности, а $x = y$ есть уравнение прямой линии, являющейся биссектрисой угла yOx.

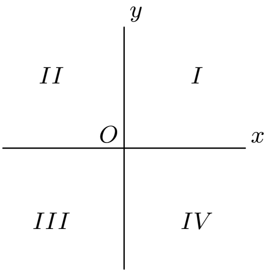


Рис. 12

При интенсивном использовании координат часто позволяют себе как бы забывать о различии между геометрическими точками и парами чисел (x, y) и в соответствии с этим писать $A = (x, y)$, имея в виду, что точка A имеет координаты (x, y) (подразумевается, что либо из контекста известно, какая именно система координат используется, либо это не важно). В том же смысле могут говорить о «точке (x, y)». Множество[3] точек с каким-нибудь свойством С часто обозначают так:

$$\{A;\ A \text{ имеет свойство С}\}.$$

(В школьном курсе геометрии то же самое множество называют «геометрическим местом точек со свойством С».) Например, окружность, о которой шла речь выше, — это множество

$$\{A = (x, y);\ x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Никакой особой науки о множествах в подобных случаях не привлекается, речь идёт просто о довольно удобном обозначении.

Введем ещё одно название. Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называют квадрантами и нумеруют римскими цифрами от I до IV, начиная с квадранта, ограниченного положительными полуосями абсцисс и ординат, и далее против часовой стрелки.

Другие координаты на плоскости, которые нам понадобятся, — это полярные координаты.

[3]Вероятно, это слово знакомо читателю, но я всё же напомню, что множество — это совокупность (система, класс, собрание, коллекция) каких-нибудь объектов (не обязательно чисел). Наглядно можно представить себе, что эти объекты как бы сложены в мешок, причём он прозрачный — мы как бы «видим» сложенные в мешок предметы и можем говорить не только о мешке как о некоем едином целом, но и о его содержимом. Примеры: множество натуральных чисел; множество слушателей в аудитории. В отличие от употребления слова «множество» в обычном языке, в математике при его употреблении вовсе не имеют в виду, что в A входит много объектов.

Полярные координаты. Возьмём какую-нибудь точку O (на сей раз её называют полюсом) и проведём какой-нибудь луч (полупрямую) Ox, начинающийся в полюсе. Общепринятого названия для этого луча нет; я буду называть его начальным лучом. Положение любой точки A на плоскости можно охарактеризовать, указав расстояние r от этой точки до полюса O («полярное расстояние») и угол φ между начальным лучом Ox и лучом OA. Здесь надо договориться, как отсчитывать этот угол, который называют «полярным углом». Условимся отсчитывать его в направлении против часовой стрелки. Тогда, конечно, надо допустить, что угол может принимать значения от $0°$ до $360°$, или, если измерять угол в радианах, от 0 до 2π. Пара (r, φ) — это и есть «полярные координаты» точки A. Координату r называют полярным радиусом или радиальной координатой точки A, а координату φ — полярным углом или угловой координатой этой точки. В терминах полярных координат $r = a$ — это уравнение окружности радиуса a с центром в полюсе, а $\varphi = \alpha$ (с постоянным α) — это уравнение некоторого луча с началом в O.

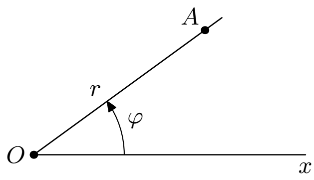


Рис. 13

Здесь есть ещё одна условность. Если точка A вращается вокруг O, скажем, в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, и пересекает начальный луч, то придётся признать, что при этом пересечении полярный угол скачком меняется от 2π до 0, а потом опять начинает возрастать. Иметь дело со скачком неприятно, и чтобы этого избежать, часто принимают, что при пересечении точкой A луча Ox полярная координата не делает скачка, а продолжает увеличиваться. А при вращении в противоположном направлении мы должны были бы считать, что полярный угол φ уменьшился до 0, скачком принял значение 2π и затем вновь убывает. Вместо этого удобно допустить для φ отрицательные значения. Поскольку A может сделать сколько угодно оборотов вокруг O, приходится принять, что полярный угол φ может быть любым числом. Но, конечно, два угла, различающиеся на целочисленное кратное 2π, геометрически соответствуют одному и тому же направлению, т. е. одному и тому же лучу с началом в O.

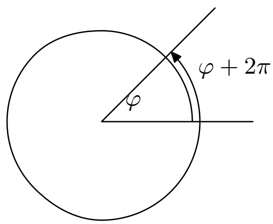


Рис. 14

Отметим простую связь между декартовыми и полярными координатами. Пусть начало декартовой системы координат совпадает с полюсом, начальный луч — с положительной полуосью Ox, а положительное направление на перпендикулярной к ней оси Oy таково, что при повороте на 90° в положительном направлении положительная полуось оси Ox переходит в положительную полуось Oy. При обычном рисунке координатных осей ось Ox горизонтальна и её положительное направление — это направление направо, а ось Oy вертикальна и её положительное направление — это направление вверх. Тогда для точки C с декартовыми координатами (x, y) и полярными координатами (r, φ) выполняются равенства

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{3}$$

Когда C лежит в первом квадранте, в равенствах (3) легко убедиться, рассматривая прямоугольный треугольник $\triangle OCC_x$ (где опять имеем $CC_x \perp Ox$), в котором угол с вершиной O равен φ, $|OC| = r$ и $|OC_x| = x$, $|C_xC| = y$. В других квадрантах получаются другие рисунки, x и y могут быть отрицательными, а угол $\angle COA$ равен $180° - \varphi$, $\varphi - 180°$ или $360° - \varphi$, так что надо вспомнить, как связаны друг с другом синусы и косинусы таких углов; однако окончательный результат такой же. (Что и не удивительно. Косинус и синус угла, бо́льшего 90°, определяются таким образом, чтобы у той точки единичной окружности с центром O, полярный угол которой равен φ, декартовы координаты были $(\cos\varphi, \sin\varphi)$; возможно, читатель знаком именно с таким определением тригонометрических функций. А у точки, расположенной в r раз дальше от O (но тоже лежащей на луче с данным φ), x и y должны быть в r раз больше.)

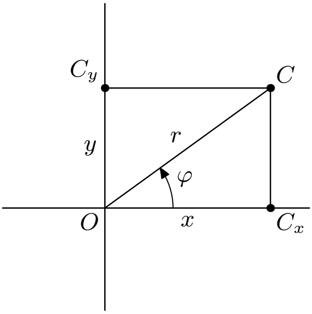


Рис. 15

Теперь поговорим о том, что такое координаты не точки, а вектора.

Если мы пользуемся декартовыми координатами, это совсем просто. Спроектируем рассматриваемый вектор $\overrightarrow{C_1C_2}$ на координатные оси, понимая под проекцией этого вектора на какую-нибудь прямую d вектор, имеющий своим началом проекцию точки C_1 на эту ось и концом — проекцию туда же точки C_2. Если C_i^x суть проекции точек C_i на ось абсцисс, а C_i^y — на ось ординат, то проекции вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$ на эти оси суть $\overrightarrow{C_1^xC_2^x}$ и $\overrightarrow{C_1^yC_2^y}$. Их называют также компонентами этого вектора, направленными по координатным осям; при обычном расположении осей (горизонтальная и вертикальная) можно говорить о горизонтальной и вертикальной компонентах. Вектор на ориентированной оси однозначно определяется числом — своей длиной, взятой со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадает ли направление вектора с положительным направлением на прямой или противоположно ему. Это число можно назвать координатой вектора на ориентированной прямой d. Координаты вектора $\overrightarrow{C_1C_2}$ суть координаты его проекций на координатные оси. Эти координаты тоже нередко называют компонентами вектора. Легко видеть, что они суть разности $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ координат точек C_2 (вычитаемые) и C_1 (уменьшаемые). Поскольку сумму двух векторов можно построить, отложив один из них от конца другого, отсюда легко следует, что координаты суммы векторов суть суммы их координат. Несложно показать также, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на то же число. Заметим ещё, что вектор равен сумме своих компонент по координатным осям (рис. 16).

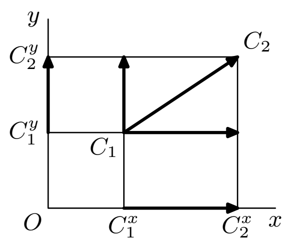


Рис. 16

Здесь говорилось о координатах вектора на плоскости. Определение координат вектора в пространстве — простая перефразировка сказанного: они суть разности координат проекций его начала и конца на координатные оси.

Сделаем ещё несколько очевидных замечаний. Координаты равных векторов, отложенных от разных точек, совпадают (рис. 17). Если отложить вектор от начала координат O (т. е. взять вектор с началом в O, равный рассматриваемому вектору), то его координаты будут равны координатам его конца. В частности, координаты точки A и координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ — это одно и то же (рис. 18), и часто от A переходят к $\overrightarrow{OA}$ и обратно, даже не отмечая этого особо. Но в одном отношении координаты векторов отличаются от координат точек: если

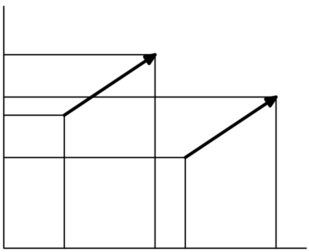


Рис. 17

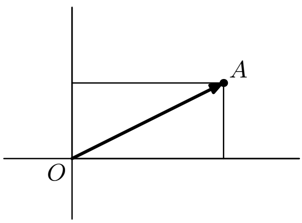


Рис. 18

перенести начало координат в точку O_1 с координатами (a, b), не меняя направления координатных осей, то координаты точки уменьшатся на числа a и b, тогда как координаты вектора (будучи разностями координат его конца и начала) не изменятся.

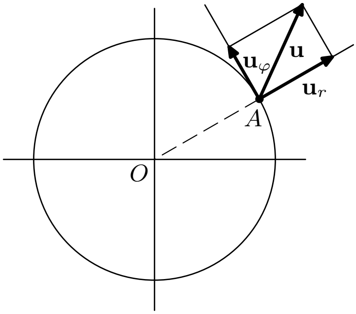


Рис. 19

Допустим теперь, что мы работаем с полярными координатами и у нас имеется некоторый вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Имеет ли смысл говорить о его координатах или компонентах по отношению к нашей полярной системе координат? Точнее говоря, какое разложение вектора $\mathbf{u}$ на компоненты было бы самым тесным образом связано с используемыми координатами? Едва ли можно представить себе что-нибудь более наглядное, чем ввести на минуту декартову систему координат с началом координат в точке A, первой осью, идущей по прямой OA в сторону возрастания r, и с перпендикулярной к ней второй осью (идущей, следовательно, по прямой, касательной к окружности радиуса $r = |OA|$), за положительное направление на которой принято направление в сторону возрастания φ. Как проекции $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\varphi$ вектора $\mathbf{u}$ на эти оси, так и координаты u_r, u_φ этого вектора в этой системе декартовых координат называют радиальной и угловой компонентами вектора $\mathbf{u}$[4].

Обычно в геометрии равные векторы совершенно одинаковы по своим свойствам. Может показаться странным, что координаты (u_r, u_φ) для равных векторов, имеющих различные начала, вообще говоря, различны. Но тут можно провести некоторую аналогию с физикой, где начало вектора, или, как ещё говорят, точка его приложения, может быть существенным. Так, сила — это векторная величина, однако вес в 1 кГ, приложенный к плечу, почти незаметен, а что, если его приложить к уху?[5]

[4]Должен предупредить, что в математике координаты вектора в «криволинейной» (в частности, полярной) системе координат могут пониматься и в другом смысле. (Школьник едва ли с этим встретится, но студент со временем, вероятно, встретится, потому я и делаю это предупреждение.)

[5]Кстати, с этим связан один терминологический оттенок. Мы можем сказать, что «вектор $\mathbf{u}$ лежит на прямой L», — в этом случае вектор рассматривается скорее как направленный отрезок, расположенный на этой прямой, а не как «свободный» вектор, который можно перенести в любую точку A (в том числе и не лежащую на L), т. е. который можно заменить равным ему вектором с начальной точкой A.

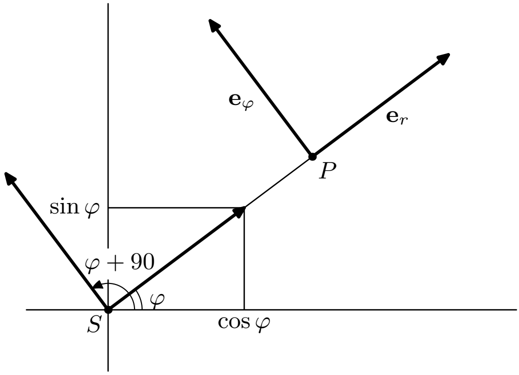


Рис. 20

Мы уже знаем, что декартовы и полярные координаты точки связаны соотношениями (3). Теперь мы укажем соотношение между декартовыми и полярными координатами вектора $\mathbf{v}$. (Сейчас последний может быть каким угодно вектором, исходящим из точки P с декартовыми координатами $(x,\ y)$ и полярными координатами $(r,\ \varphi)$, но нам соотношение между различными координатами будет нужно только для вектора скорости, поэтому я сразу обозначил рассматриваемый вектор через $\mathbf{v}$.) Пусть он имеет декартовы координаты $(v_x,\ v_y)$ и полярные координаты $(v_r,\ v_\varphi)$ (как и в формулах (3), подразумевается, что начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной, причём теперь эта точка будет обозначаться через S, ибо далее она будет расположена в «Солнце»). Тогда, оказывается,

$$v_x = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi, \qquad v_y = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi. \tag{4}$$

Равенства (4) можно усмотреть из чертежа, но это несколько громоздко, к тому же для полноты доказательства надо было бы рассматривать несколько чертежей, отвечающих различным вариантам расположения начала вектора и его направления. Простое общее доказательство получается так. Обозначим через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ единичные векторы (векторы единичной длины), направленные в положительном направлении по осям той вспомогательной декартовой системы, с помощью которой вводятся координаты $(v_r,\ v_\varphi)$ вектора $\mathbf{v}$. Иными словами, вектор $\mathbf{e}_r$ направлен по оси SP в сторону от S к P, так что можно сказать, что $\mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (как обычно, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки $(x,\ y)$ и $r = |\mathbf{r}|$), а вектор $\mathbf{e}_\varphi$ получается поворотом вектора $\mathbf{e}_r$ на прямой угол в положительном направлении (рис. 20). Тогда

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \tag{5}$$

Когда же вектор $\mathbf{u}$ подразумевается «свободным», то лучше говорить: «вектор $\mathbf{u}$ параллелен прямой L».

(Действительно, компонента вектора $\mathbf{v}$ по оси $\overrightarrow{SP}$ имеет координату v_r, а это и значит, что данная компонента (как вектор) равна $v_r\mathbf{e}_r$. Аналогично компонента вектора $\mathbf{v}$ по другой оси (которая перпендикулярна предыдущей и соответственно направлена) есть $v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. А вектор является суммой своих компонент по координатным осям.) Если отложить вектор $\mathbf{e}_r$ от S, то из формул (3) видно, что его концом будет точка с декартовыми координатами $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ (ведь для неё $r = 1$, а полярный угол равен φ). Значит, таковы и декартовы координаты вектора $\mathbf{e}_r$. Отложив вектор $\mathbf{e}_\varphi$ от S, получим, что его концом будет точка с полярным радиусом $r = 1$ и с угловой координатой $\varphi + 90°$. Из формул (3) видно, что координаты этой точки суть $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. (Надо вспомнить, что происходит с синусом и косинусом при возрастании угла на 90°. Можно и не обращаться к тригонометрии, см. ниже.) Таковы же декартовы координаты вектора $\mathbf{e}_\varphi$. Теперь проектирование правой части равенства (5) на оси декартовой системы координат (x, y) сразу приводит к соотношениям (4).

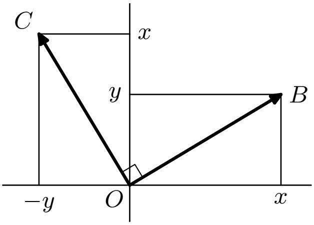


Рис. 21

Замечание в связи с координатами вектора $\mathbf{e}_\varphi$: вместо ссылки на тригонометрию достаточно доказать следующее:

при повороте радиус-вектора $\overrightarrow{OB}$ точки B с координатами (x, y) на 90° против часовой стрелки получается радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$ точки C с координатами $(-y, x)$. (6)

Например, это видно из рис. 21. Но если обращаться к рисунку, то придётся отдельно рассматривать те случаи, когда B лежит в различных квадрантах, так что помимо рис. 21 надо будет рассмотреть ещё три рисунка. Мне кажется, проще рассуждать так. Повернём вместе с $\overrightarrow{OB}$ координатные оси на 90° в том же направлении. В новой координатной системе (x', y') повёрнутый вектор $\overrightarrow{OC}$ и точка C будут иметь те же координаты, какие $\overrightarrow{OB}$ и B имеют в прежней системе. Но новая ось x' совпадает с прежней осью y, причём обе имеют одно и то же положительное направление, а новая ось y' совпадает с прежней осью x, но их положительные направления противоположны. Значит, если в новой системе координат точка имеет координаты (x', y'), то в прежней системе её координаты суть $(-y', x')$. Для точки C новые координаты $x' = x$, $y' = y$, а значит, её прежние координаты суть $(-y, x)$.

Когда применение координат стало достаточно распространённым, в геометрии сложился новый тип рассуждений, новый «стиль», получивший (довольно условное) название «аналитического». Греческое слово «анализис» означает разложение, расчленение, разбор. Соответственно, под «анализом» понимают метод исследования путём рассмотрения отдельных сторон, свойств, составных частей предмета или явления. Но в геометрии это слово приобрело иной смысл. «Аналитическое исследование» проводится с использованием координат (или, по крайней мере, каких-то родственных приёмов) и последующим привлечением соображений из алгебры, дифференциального или интегрального исчисления; при этом открывается возможность использования методов, понятий и результатов, которые подчас было бы затруднительно сформулировать чисто геометрическим образом, но в то же время ослабляется или исчезает возможность обращения к геометрической интуиции, «подсказка» которой могла бы быть полезной. Дабы отличить прежние приёмы от аналитических, их назвали «синтетическими», что ещё менее отвечает смыслу соответствующего греческого слова («синтезис» — соединение, сочетание, составление). Синтетические рассуждения в геометрии проводятся с непосредственным использованием геометрических понятий и предложений, причём все этапы рассуждения являются геометрическими. (Условность названий видна хотя бы из того, что разбиение фигуры на треугольники является «анализом» в обычном смысле слова, но это типичный «синтетический» приём. Кроме того, в геометрии имеется выражение «анализ задачи на построение»: предполагая построение нужной фигуры выполненным, мы пытаемся найти какие-нибудь характерные особенности этой фигуры и различных связанных с нею других фигур; обдумывание этих особенностей позволит наметить ход искомого построения.) Обычно в «высшей» математике рассуждения являются «комбинированными», т. е. в них сочетаются аналитические и синтетические соображения и приёмы, но всё-таки при этом нередко одна из этих двух сторон преобладает, и тогда рассуждение тоже можно квалифицировать как аналитическое или синтетическое, хотя и не вполне «чистое».

§ 3. Эллипс и другие кривые второго порядка

Геометры древности оставили довольно богатую коллекцию кривых. Особенно важны для астрономии конические сечения. Они называются так потому, что эти кривые получаются при пересечении прямого кругового конуса с плоскостью. В зависимости от расположения конуса и плоскости получаются кривые различных типов — эллипс, парабола, гипербола (а иногда также одна или две прямых). При этом парабола — это как бы переходный случай от эллипса к гиперболе, он получается, когда плоскость параллельна одной из касательных плоскостей к конусу. В совсем уж исключительном случае, когда плоскость проходит через вершину конуса, получается пара пересекающихся прямых или даже всего одна прямая (сверх того, бывает, что пересечение такой плоскости с конусом сводится к одной только вершине последнего).

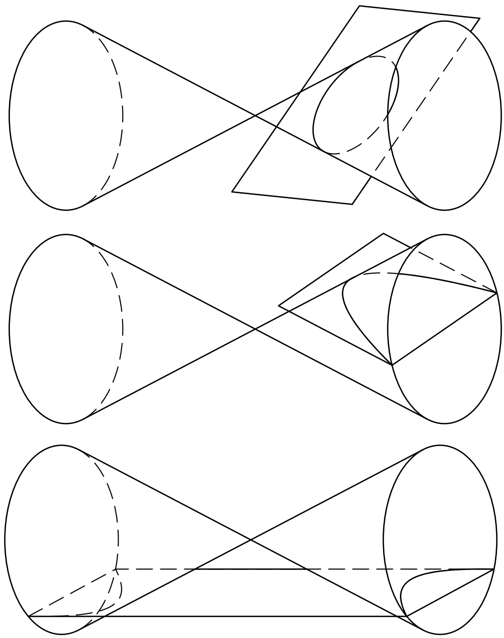


Рис. 22

Другое название конических сечений — кривые второго порядка. Это связано с использованием декартовых координат — оказывается, тогда конические сечения описываются уравнениями второго порядка. Такая трактовка данных кривых, в отличие от их определения как пересечений плоскости с прямым круговым конусом, не требует «выхода» из плоскости в пространство, но связана с использованием вспомогательного аппарата — декартовых координат, что поначалу может показаться менее геометричным.

Изучение конических сечений, насколько известно, начал Менехм в IV веке до н. э. Как математик и астроном, он был учеником одного из величайших учёных античности Евдокса (ок. 408—ок. 355 до н. э.), о котором немного говорится в приложении I. В том же, что относится к общему образованию и социальным вопросам, Менехм считается учеником или последователем Платона. О Менехме есть сведения, что он усовершенствовал предложенную Евдоксом кинематическую модель планетных движений, а также писал о политике в духе Платона. Ещё ему приписывают такой же разговор с Александром Македонским (356—323 до н. э.), какой по другой версии произошёл у Евклида (жившего около 300 г. до н. э.) с Птолемеем I (царствовавшим в Египте в 305—285 до н. э.): Александр якобы спросил его, нет ли более короткого пути к геометрии, нежели изучение учебника, а Менехм ответил, что в геометрии для всех одна дорога. Впрочем, о его трудах мы знаем только по сообщениям позднейших авторов.

Зато до нас дошло почти целиком (7 книг из 8) более позднее сочинение о конических сечениях Аполлония Пергского (ок. 250—ок. 170 г. до н. э.)[1]. Он был младшим современником Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.). Архимед и Аполлоний — это высшие точки развития древнегреческой математики в её классическом виде, после них оно если и не совсем остановилось, то существенно замедлилось. (Значительное развитие имело место в другом направлении, представленном Диофантом[2], — нечто среднее между алгеброй и теорией чисел. Кроме того, для нужд астрономии некоторое время развивалось то, что мы теперь называем тригонометрией, только в непохожем на нынешний её вид геометрическом облике. Это направление включало и более сложную сферическую тригонометрию.) Огромным счастьем для первых европейских учёных нового времени было то, что сохранились основные труды Архимеда и Аполлония, вместе с «Началами» Евклида, «Альмагестом» Птолемея и половиной «Арифметики» Диофанта; благодаря этому сохранилась основная часть древнегреческих достижений в математике и астрономии.

[1] Ему посвящена недавно вышедшая книга [49]. Биографические сведения об Аполлонии незначительны — всё, что имеется на сей счёт в [49], не займёт и полстраницы. (Основное же содержание книги [49] — модернизированное изложений дошедших до нас сочинений Аполлония и сведений о не дошедших до нас его трудах, имеющихся у античных и средневековых авторов, обсуждение связей исследований Аполлония с работами его предшественников, современников и более поздних учёных, вплоть до XIX в.)

[2] Предположительно он жил в середине II в. н. э., но о нём известно так мало, что предлагались и датировки, сдвигающие время его жизни на ± 100 лет. Высказывалось мнение, что Диофант был не настоящим греком, а эллинизированным вавилонянином.

Нам нужен будет в первую очередь эллипс, и я часто выношу информацию о других кривых второго порядка (конических сечениях) в упражнения. При этом эллипс я буду определять не как коническое сечение, а иначе, т. е. ни о каком конусе и его сечениях в определении не будет речи. Так что название «коническое сечение» мы могли бы употреблять только условно: дескать, почему-то принято так называть такие-то кривые, и всё тут. Напротив, название «кривая второго порядка» будет прямо связано с нашими определениями эллипса, параболы и гиперболы, — я говорю «определениями», потому что у нас будет несколько эквивалентных определений.

Но прежде чем переходить к этому, я хочу сказать, в чём уже в древности усматривали «родство» эллипса с параболой и гиперболой, а заодно пояснить, с чем связаны их названия. Если определять эти кривые как конические сечения, то «родство» очевидно, и не приходится удивляться, что какие-то их свойства оказываются сходными. Но «родство» проявляется и при другом подходе, который для нас будет основным, — координатном. Аполлоний доказал, что эти кривые имеют в подходящих декартовых системах координат следующие уравнения:

$$\begin{gathered} y^2 = px \text{ — парабола;} \\ y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2 \text{ — гипербола или эллипс, в зависимости от знака } + \text{ или } -. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь p и d — положительные числа, постоянные для каждой конкретной кривой. Аполлоний не пользовался координатами, но у него была некая эквивалентная, хотя и более громоздкая, геометрическая формулировка. С этими уравнениями связаны и предложенные Аполлонием названия этих кривых. По-гречески «парабола» означает что-то вроде «приложение»; в древнегреческой геометрии «приложение квадрата со стороной y к основанию p» (причём y и p здесь понимались как отрезки) означало построение равновеликого этому квадрату прямоугольника, одной из сторон которого является p. «Гипербола» по-гречески — это «преувеличение, избыток» (в русском литературном языке «гиперболой» как раз и называется приём литературной или разговорной речи, состоящий в чрезмерном преувеличении

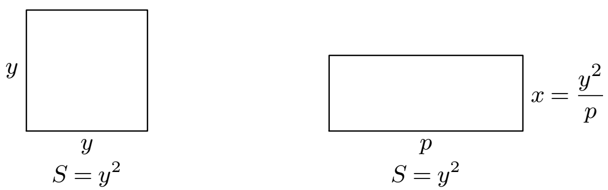


Рис. 23

с целью усиления впечатления). У Аполлония «гипербола» означала «приложение с избытком», а «эллипс» (по-гречески «недостаток») — «приложение с недостатком».

Почти 2000 лет конические сечения оставались «чистой наукой», которую можно было бы назвать «оторванной от жизни»[3]. А в XVII веке они нашли многочисленные применения: Галилей установил, что камень, брошенный наклонно к горизонту, летит по параболе, если не учитывать сопротивления воздуха; Кеплер открыл, что планеты движутся по эллипсам; гипербола служит графиком функции $y = c/x$ (с постоянным c), выражающей обратную пропорциональность y и x. (Как раз о такой зависимости говорится в законе Бойля—Мариотта, согласно которому давление газа обратно пропорционально его объёму при постоянной температуре[4].) О дальнейшем возрастании их роли как в «чистой» науке, так и в приложениях нечего и говорить, но я думаю, что главное всё-таки — это та исключительно важная роль, которую они сыграли в XVII в. при возникновении современных точных наук.

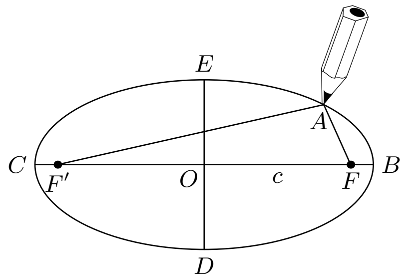


Рис. 24

Итак, теперь я буду говорить об эллипсе и дам два определения этой кривой (позднее будет и третье). Сразу отмечу, что с эллипсом связаны две замечательные точки, которые называются его фокусами и кото-

[3]Выдающийся историк античных точных наук Отто Нейгебауер указывал, что вопрос о пересечении конуса (не обязательно прямого, но и косого) с плоскостью приобрёл уже в древности значение в связи с точной теорией солнечных часов и с картографией [46]. Но в изложении Нейгебауера теория солнечных часов, насколько я понимаю, не сталкивается с этим вопросом, для картографии же нужен только особый случай, когда в пересечении получается окружность. Видимо, интересы картографии (и, может быть, какой-то не отражённой в книге [46] части теории солнечных часов) могли способствовать обсуждению данного вопроса, но эллипс, парабола и гипербола возникли при отрыве этого обсуждения от непосредственных запросов тогдашней практики.

[4]Р. Бойль (1627—91) внёс немалый вклад в физику и особенно химию — становление последней как науки началось с его работ. Но что касается данного закона, то, сообщая о нём в печати в 1662 г., Бойль называл его автором своего тогдашнего ассистента Р. Гука (1635—1703; мы ещё встретимся с ним в приложениях V, VI), а сам не претендовал даже на соавторство. Э. Мариотт (1620—84) подтвердил в 1676 г. этот закон на более обширном и точном экспериментальном материале. Так что закон правильнее было бы называть законом Гука (но таковой уже имеется в другом разделе науки — теории упругости и сопротивления материалов!) или, имея в виду роль Мариотта в его окончательном утверждении, законом Гука—Мариотта.

рые играют особую роль во многих вопросах об эллипсах. В первом определении эллипс сразу вводится вместе с этими точками.

Первое определение. *Эллипс на плоскости, фокусами которого являются точки F и F' этой плоскости, — это кривая на данной плоскости, состоящая из тех точек A, для которых сумма расстояний до фокусов равна заданному числу $2a$ (так что она одна и та же для всех точек эллипса)*:

$$|AF| + |AF'| = 2a.$$

Конечно, подразумевается, что такие точки A вообще существуют; это так, если расстояние FF', которое называется фокальным расстоянием и обычно обозначается через $2c$, не превосходит $2a$, — ведь в треугольнике $\triangle FAF'$ сторона FF' не может быть длиннее суммы длин двух других сторон. В крайнем случае, когда $a = c$, эллипс сводится к отрезку FF'. Мы будем всегда считать, что $a > c$. Если закрепить концы нитки длины $2a$ в точках F, F' и натягивать нитку с помощью прижатого к плоскости кончика карандаша, то при движении карандаша его кончик как раз и очертит эллипс (рис. 24).

На прямой FF' имеются две точки B и C, лежащие на эллипсе. Одна из них, скажем, B, ближе к F', чем к F, а другая (C) ближе к F, чем к F'. Обозначим через O середину отрезка FF'. Очевидно,

$$2a = |F'B| + |BF| = |F'B| + |BF'| + |F'F| = 2|F'F| + 2|OF'| = 2|OB|,$$

откуда $|OB| = a$. Аналогично и $|OC| = a$.

На перпендикуляре к прямой FF', проходящем через O, тоже имеются точки эллипса. Действительно, посмотрим, когда точка E перпендикуляра принадлежит эллипсу. Обозначим $b := |OE|$. Тогда в прямоугольном треугольнике $\triangle EOF$ квадрат длины гипотенузы $|FE|^2$ равен сумме квадратов длин катетов, т. е. $b^2 + c^2$. Следовательно, $|FE| = \sqrt{b^2 + c^2}$. Аналогично $|F'E| = \sqrt{b^2 + c^2}$, поэтому $\sqrt{b^2 + c^2} = a$, что удобнее записать без знака корня: $a^2 = b^2 + c^2$. Раз $a > c$, то, действительно, имеется число b, удовлетворяющее этому соотношению. На указанном перпендикуляре к FF' имеются две точки, E и D, отстоящие от O на b. Они симметричны друг другу относительно прямой FF' и, согласно сказанному, лежат на эллипсе.

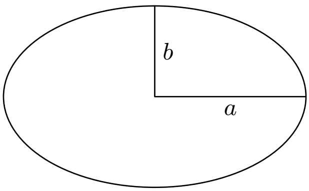


Рис. 25

Точки B, C, D, E называются вершинами эллипса. BC называется его большой осью, а OC (равно как и OB) — большой полуосью. Отрезок ED называется малой осью, а OE (равно как и OD) — малой полуосью эллипса. Длины этих полуосей тоже называют большой соответственно малой полуосями; в этом смысле говорят, что a — большая полуось, а b — малая. Отношение $e := c/a$ называется эксцентриситетом эллипса. Всегда выполняется равенство $0 \leqslant e < 1$. Значение 1 для e мы исключили, условившись, что $a > c$. Если бы мы этого не сделали, то при $e = 1$ эллипс «вырождался» бы в отрезок. При нулевом значении e точки F и F' совпадают с точкой 0. В этом случае эллипс превращается в окружность с центром в O радиуса a (будучи геометрическим местом точек, отстоящих от O на расстояние a), которая, таким образом, является частным случаем эллипса.

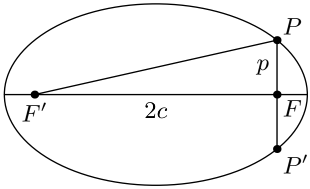


Рис. 26

Перпендикуляр к большой оси эллипса, восставленный в фокусе F, пересекает эллипс в двух точках P и P', симметричных относительно большой оси. Действительно, пусть P лежит на этом перпендикуляре; при каком условии P будет лежать также и на эллипсе? Обозначим $p := |FP|$. Тогда $|F'P| = \sqrt{4c^2 + p^2}$, и нам надо, чтобы выполнялись равенства

$$p + \sqrt{4c^2 + p^2} = 2a, \qquad (2a - p)^2 = 4c^2 + p^2,$$
$$4ap = 4(a^2 - c^2) = 4b^2, \qquad p = \frac{b^2}{a}.$$

Итак, если мы хотим, чтобы точка P принадлежала эллипсу, то должно быть выполнено равенство $|FP| = b^2/a$. Никакое другое расстояние не годится. Но если взять точку P на нашем перпендикуляре на указанном расстоянии от F, то действительно ли эта точка будет точкой эллипса? Несложная проверка — по существу, «прокручивание» приведённого рассуждения в обратную сторону — показывает, что да: если $|FP| = b^2/a$, то

$$|F'P| = \sqrt{4c^2 + \frac{b^4}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{4(a^2 - b^2)a^2 + b^4} =$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{(2a^2 - b^2)^2} = \frac{2a^2 - b^2}{a} = 2a - \frac{b^2}{a},$$
$$|FP| + |F'P| = 2a.$$

Число $p := b^2/a$ называется фокальным параметром эллипса. (Не слишком удачное название, потому что слово «параметр» употребляется весьма широко. Но так уж принято говорить.)

Второе определение. Имеется другое определение эллипса, которое в вузовском курсе математики считается исходным. Нам оно тоже понадобится.

Эллипс — это кривая, которая получается при сжатии некоторой окружности в некотором направлении.

Поясним, что это значит. Возьмём окружность радиуса a с центром O; она имеет уравнение $x^2 + y^2 = a^2$. Сжатие в направлении оси ординат (оси y) в k раз состоит в том, что каждая точка A с координатами $(x,\ y)$ переходит в точку A' с координатами $x' = x$, $y' = y/k$. Пусть $k = a/b$. Перепишем уравнение исходной окружности в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

и выразим здесь x, y через координаты x', y' той точки (точки A'), которая должна лежать на эллипсе:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{b}y'\right)^2 = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс состоит из тех и только тех точек A' с координатами $(x',\ y')$, для которых выполняется последнее соотношение. Здесь у координат точек эллипса стоят штрихи. Но ведь всё равно, как обозначаются эти координаты: с тем же успехом можно сказать, что эллипс состоит из тех и только тех точек A с координатами $(x,\ y)$, для которых выполняется равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

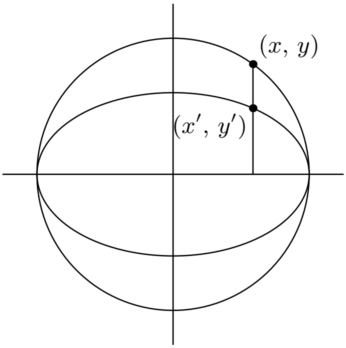


Рис. 27

Точка с координатами $(-x,\ -y)$ симметрична относительно начала координат O точке с координатами $(x,\ y)$. Уравнение (8) делает очевидным, что O является центром симметрии эллипса, т. е. что если точка лежит на эллипсе, то и симметричная ей точка лежит на эллипсе. Опуская упоминание о симметрии, говорят просто, что O — центр эллипса.

Можно спросить: а нет ли у эллипса других центров симметрии? Из рисунка кажется, что нет, — по крайней мере, другого центра симметрии не видно. Можно доказать, что его действительно нет, и это не так уж сложно, но подробно я этого делать не буду. Замечу только, что вообще у ограниченной фигуры не может быть двух центров симметрии. При желании читатель легко докажет, что если O_1 и O_2 суть центры симметрии некоторой фигуры, то при сдвиге на $2\overrightarrow{O_1O_2}$ (когда каждая точка A переходит в такую точку B, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$) фигура переходит в себя. (Указанный сдвиг получится, если сперва перевести A в точку C, симметричную A относительно центра O_1, а затем C перевести в точку B, симметричную C относительно O_2.) Отсюда следует, что наша фигура переходит в себя при сдвиге на $2n\overrightarrow{O_1O_2}$ с любым натуральным n, что для ограниченной фигуры невозможно. (См. также упражнение 3.1 ниже.)

Из уравнения (8) видно, что расстояние от центра O до любой точки эллипса заключено между a и b. Наибольшим является расстояние до точек, где ось x пересекает эллипс (там $y = 0$ и $x^2 = a^2$). Если же $y > 0$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x^2 + y^2 < a^2,$$

а $\sqrt{x^2 + y^2}$ — это и есть расстояние от O до точки с координатами $(x,\, y)$. Аналогично получается, что наименьшее расстояние от O до точек эллипса равно b и оно достигается в точках пересечения эллипса с осью y, тогда как при $x \neq 0$ всегда выполнялось равенство $\sqrt{x^2 + y^2} > b$. Позднее, когда мы убедимся, что второе определение эллипса эквивалентно первому, мы сможем сказать, что ближайшие к O точки эллипса — это концы малой оси, а наиболее удалённые от O точки эллипса — это концы большой оси.

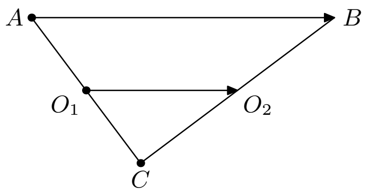


Рис. 28

Предоставляю читателю в виде упражнения доказать, что уравнение Аполлония (7), если его переписать в некоторых других координатах, переходит в (8). Таким образом, мы и Аполлоний называем эллипсами одни и те же кривые. У эллипса, описываемого уравнением (7), центр находится в точке с координатами $(d/2,\, 0)$, а главные оси равны d, $\sqrt{pd}$.

Эквивалентность определений. Докажем, что эллипс в смысле первого определения является также и эллипсом в смысле второго. Воспользуемся декартовой системой координат x, y с началом координат в центре эллипса, осью абсцисс (осью Ox), направленной по большой оси эллипса, а осью Oy, стало быть, — по малой. Пусть точка A с координатами $(x,\, y)$ лежит на эллипсе. Опустим из A перпендикуляр на большую ось и обозначим через B его основание. Тогда

$$|FA|^2 = |FB|^2 + |AB|^2 = (x - c)^2 + y^2,$$
$$|F'A|^2 = (x + c)^2 + y^2,$$
$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

От квадратных корней избавляются, естественно, путём возведения в квадрат. Но если бы мы возвели обе части в квадрат, то в левой части у нас было бы неприятное слагаемое — произведение двух корней.

Лучше сперва перенести один из корней в правую часть и уж после этого возводить в квадрат:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$
$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2cx.$$

Теперь мы можем, так сказать, «изолировать» квадратный корень:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx, \tag{9}$$

после чего возведение в квадрат полностью избавляет нас от корней:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{10}$$
$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \tag{11}$$

Это есть уравнение эллипса с $b^2 := a^2 - c^2$.

«Прокручивая в обратном направлении» это рассуждение, получаем, что эллипс во втором смысле является эллипсом в первом; при этом из предыдущего мы уже знаем, где надо поместить предполагаемые фокусы — на оси x по обе стороны от центра O на расстоянии $c = \sqrt{a^2-b^2}$ от него. Небольшое предостережение: по ходу рассуждения придётся дважды извлекать квадратный корень, и оба раза надо проследить, что подкоренное выражение неотрицательно (но это очевидно — оно есть сумма квадратов) и что обе стороны равенства, полученного после извлечения корня, имеют одинаковый знак. В нашем случае, когда одна из частей есть квадратный корень, который по умолчанию берётся неотрицательным, надо убедиться в неотрицательности другой части. Например, при переходе от (10) к (9) надо убедиться, что $a^2 - cx \geqslant 0$, если точка (x, y) удовлетворяет уравнению (11). Из уравнения (8) видно, что $|x| \leqslant a$, а раз мы берём $c = \sqrt{a^2-b^2}$, то $c \leqslant a$; вот и получается, что $cx \leqslant c|x| \leqslant a^2$. При другом извлечении корня надо

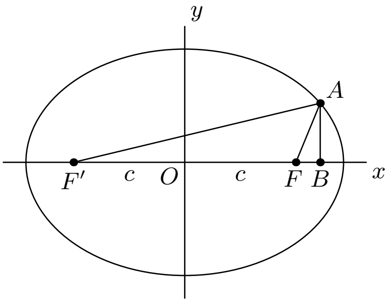


Рис. 29

убедиться, что $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geqslant 0$. Это лишь немногим длиннее. В последнем выражении под знаком корня стоит

$$x^2 + y^2 - 2cx + c^2.$$

Из уравнения (11) видно, что $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Кроме того, $-2cx \leqslant 2c|x| \leqslant \leqslant 2a^2$ (в чём мы только что убедились) и $c^2 \leqslant a^2$. В итоге получается, что

$$x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \leqslant 4a^2,$$
$$2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geqslant 0.$$

Соберём воедино формулы, связывающие друг с другом величины a, b, c, e, p:

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad c = ae, \quad b = a\sqrt{1-e^2}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2). \tag{12}$$

Теперь мы можем выяснить, нет ли у эллипса (8) других фокусов, кроме тех, которые нам уже известны (и расположены в точках с координатами $(\pm c,\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$). Допустим, что имеются какие-то другие два фокуса F_1, F_1', так что для точек эллипса выполняется равенство $|AF_1| + |AF_1'| = 2a'$ с некоторой константой a'. Из предыдущего видно, что центр эллипса O совпадает с серединой отрезка F_1F_1' и что в декартовых координатах с началом в O' и осью x', направленной по F_1F_1', эллипс имеет уравнение $x'^2/a'^2 + y'^2/b'^2 = 1$ с константой $b' = \sqrt{a'^2 - |OF_1|^2}$. Тогда наибольшее расстояние от O до точек эллипса равно a' и оно достигается для точек пересечения оси x' с эллипсом. Но ведь то же самое наибольшее расстояние равно a и достигается только в точках пересечения эллипса с осью x. Следовательно, $a = a'$, а ось x' совпадает с осью x, т. е. F_1 и F_1' лежат на той же прямой, что и F, F'. Обращаясь к наименьшему расстоянию, заключаем аналогично, что $b = b'$. Теперь из равенства $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - |OF_1|^2}$ выводим, что $|OF_1| = c$, так что «новые» фокусы F_1, F_1' имеют координаты $(\pm c,\ 0)$ и потому совпадают с прежними.

Упражнение 3.1. Проверьте, что большая ось эллипса является длиннейшей из его хорд (т. е. отрезков, соединяющих какие-нибудь две точки эллипса). Выведите отсюда, что у эллипса имеется только один центр симметрии. Что можно сказать о его осях симметрии? Проверьте также, что малая ось эллипса является кратчайшей из тех его хорд, которые проходят через центр эллипса. (Как и в случае окружности, такие хорды называются диаметрами.) (Указание. У каких отрезков при отображении $(x,\ y) \mapsto (x,\ ky)$, $0 < k < 1$, не уменьшается длина, а у каких она изменяется более всего?)

Площадь эллипса. При сжатии по вертикали в k раз площадь любой фигуры уменьшается в k раз. Это общее утверждение справедливо для любой фигуры, о площади которой вообще можно говорить. Но ввиду его общности надо опираться на общее определение понятия «площадь фигуры», а оно не так уж просто; возможно, учащемуся с ним не приходилось иметь дела. (В учебнике Киселёва, который длительное время был стандартным школьным учебником по геометрии и был хорошо отработан методически, возможность сопоставить каждой фигуре некоторое число таким образом, чтобы оно имело обычные свойства площади, честно постулировалось как некое допущение, причём говорилось, что это на самом деле верно, но мы этого доказывать не будем.) Но как бы то ни было, легко поверить, что любую ограниченную (т. е. расположенную в конечной части плоскости; нам этого достаточно) фигуру $\varPhi$ можно заключить между двумя фигурами $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$, состоящими из нескольких квадратов, стороны которых параллельны координатным осям и разность площадей которых $S(\varPhi_1) - S(\varPhi_2)$ меньше наперёд заданного числа ε. Тогда $S(\varPhi_i)$ дают приближение для площади $S(\varPhi)$ фигуры $\varPhi$ с точностью до ε. При сжатии в вертикальном направлении (направлении оси ординат) в k раз квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, переходит в прямоугольник, горизонтальные стороны которого имеют ту же длину, что и стороны квадрата, а вертикальные стороны в k раз короче. Поэтому площадь прямоугольника в k раз меньше площади квадрата. Любую фигуру $\varPhi$ можно заключить между двумя фигурами $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$, которые состоят из нескольких квадратов указанного типа и разность площадей которых $S(\varPhi_1) - S(\varPhi_2)$ меньше наперёд заданного числа ε. После сжатия получится, что сжатая фигура $\varPhi'$ заключена между двумя фигурами $\varPhi_1'$ и $\varPhi_2'$, состоящими из прямоугольников; для них $S(\varPhi_i') = k^{-1}S(\varPhi_i)$ и разность площадей $S(\varPhi_1')$ и $S(\varPhi_i)$ меньше $k^{-1}\varepsilon$. Площадь же $S(\varPhi')$ заключена между $k^{-1}S(\varPhi_1)$ и $k^{-1}S(\varPhi_2)$, так что она отличается от заключённого в тех же пределах числа $k^{-1}S(\varPhi)$ не более чем на $k\varepsilon$. Но последнее число можно взять сколь угодно малым, и поэтому выполняется равенство $S(\varPhi') = k^{-1}S(\varPhi)$.

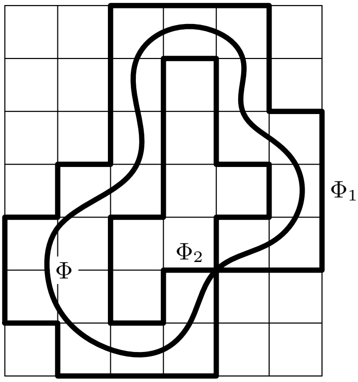


Рис. 30

Применим это соображение к эллипсу. Круг $x^2 + y^2 = a^2$ имеет площадь πa^2, а при сжатии в a/b раз он переходит в эллипс с главными полуосями длины a и b. Поэтому площадь последнего равна πab.

Уравнение эллипса в полярных координатах. Полюс возьмём в фокусе F, а полярный угол φ будем отсчитывать от начального луча FC, где C ближайшая к F точка пересечения эллипса с его большой осью. Напомню, что $e = c/a$, $p = b^2/a$.

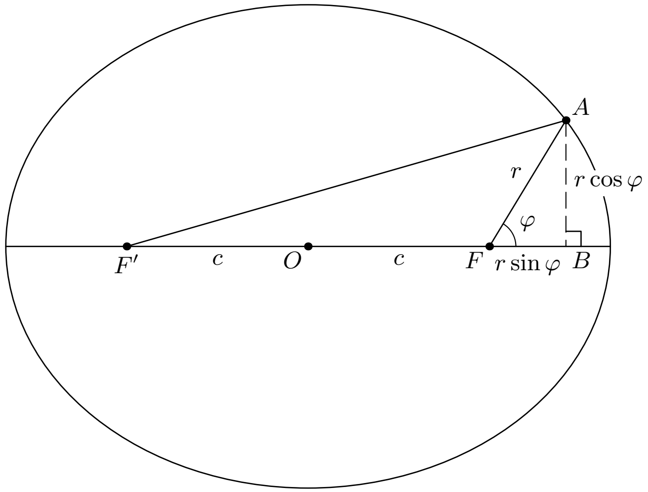


Рис. 31

Пусть точка A эллипса имеет полярные координаты r, φ, так что $|FA| = r$. По-прежнему обозначая через AB перпендикуляр, опущенный из A на FF', из прямоугольного треугольника $F'BA$ находим

$$|F'A|^2 = |F'B|^2 + |AB|^2 = (2c + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2.$$

Используем первое определение эллипса:

$$r + \sqrt{(2c + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} = 2a.$$

Перенесём r в правую часть и возведём в квадрат:

$$4c^2 + 4cr\cos\varphi + \underline{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = 4a^2 + 4ar + \underline{r^2},$$

а так как сумма двух подчёркнутых слагаемых в левой части равна подчёркнутому члену в правой,

$$c^2 + cr\cos\varphi + ar = 4a^2, \qquad r(a + \cos\varphi) = b^2, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{13}$$

Уравнение (13) — это уравнение эллипса в полярных координатах. Точнее говоря, предыдущие рассуждения доказывают, что эллипс описывается уравнением (13), но можно «прокрутить их в другую сторону» и доказать, что и обратно, кривая, описываемая уравнением вида (13) с $0 \leqslant e < 1$, $p > 0$, является эллипсом.

Какая кривая получится, если в уравнении (13) взять $e \geqslant 1$? Просматривая наши выкладки, убедимся, что при $e = 1$ получится уравнение вида $\alpha x = y^2 + \beta$ с некоторыми $\alpha < 0$, β; перенеся затем начало координат в подходящую точку оси Ox и изменив на противоположное положительное направление этой оси, придём к уравнению вида $x = ky^2$ с некоторым $k > 0$. Это уравнение описывает параболу (вероятно, вам уравнение параболы известно в таком виде, какой получается, если поменять ролями y и x: $y = kx^2$). При $e > 1$ получается уравнение вида $-(x - \alpha)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ с некоторым α и некоторыми ненулевыми a, b. Это уравнение описывает гиперболу, но переход к привычному вам виду $y = k/x$ сложнее.

Упражнение 3.2. а. Докажите эквивалентность следующих определений параболы:

— *кривая на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат имеет уравнение* $y = kx^2$ *(с* $k \neq 0$*);*

— *множество точек на плоскости, равноудалённых от некоторой точки* F *этой плоскости и некоторой прямой* D*, тоже лежащей в этой плоскости и не проходящей через* F*. (Точка* F *называется фокусом, а прямая* D *— директрисой*[5] *параболы.)*

б. Докажите, что парабола имеет единственную ось симметрии. Какое отношение эта ось имеет к координатным осям при первом определении параболы и к F и D — при втором? Указание. Доказывая единственность, начните с того, что у параболы $y = kx^2$ не может быть вертикальной оси симметрии, кроме оси Oy. Другая вертикальная ось симметрии имела бы уравнение $x = c$ с некоторым постоянным $c \neq 0$. Рассмотрите образ точки $(0, 0)$ при симметрии относительно оси $x = c$ и придите к противоречию: он и лежит, и не лежит на параболе. Теперь допустим, что имеется наклонная ось симметрии, имеющая уравнение $y = lx + m$ с константами l, m. Она разбивает плоскость на две полуплоскости $y > lx + m$, $y < lx + m$ (не считая самой этой оси). При отражении относительно оси $y = lx + m$ образом части параболы, лежащей в одной из этих полуплоскостей, является часть параболы, лежащая в другой полуплоскости. Покажите, что одна из этих частей ограниченная[6], а другая — нет. Между тем при симметрии ограниченное множество переходит в ограниченное (почему?).

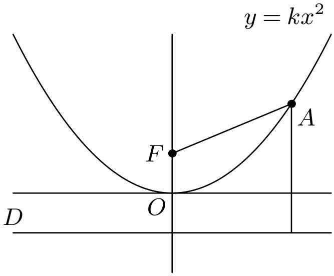


Рис. 32

в. Докажите, что у параболы нет центра симметрии. Указание. Допустим, что (x_0, y_0) — такой центр. Куда должны переходить при соответствующей центральной симметрии точки параболы с ординатой $y > 2y_0$?

г. Докажите, что у параболы имеются только один фокус и одна директриса, т. е. что если F' и D' — фокус и директриса, то они совпадают с прежними F и D.

---

[5] От латинского dirigere — направлять, ср. со словами директор, дирижёр.

[6] В полном соответствии с наглядными представлениями, множество точек плоскости называется ограниченным, если расстояния от всех его точек до некоторой точки A не превосходят некоторой константы C. Если это так для A, то это будет так и для любой другой точки A', только при этом может понадобиться взять другую константу C.

(Указание. Убедитесь сперва, что перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису D, совпадает с перпендикуляром, опущенным из F' на D'.)

д. Фокальным параметром p параболы называется расстояние от фокуса F до любой из двух точек параболы, лежащих на проходящем через F перпендикуляре к оси параболы. Как связаны p и k из уравнения $y = kx^2$? Покажите, что расстояние от фокуса F до директрисы D равно p.

е. Покажите, что уравнение (13) с $e = 1$ является уравнением параболы и что каждая парабола имеет такое уравнение в подходящей системе полярных координат (где находятся её полюс и начальный луч?) Число $e = 1$ называется эксцентриситетом кривой с уравнением (13); таким образом, эксцентриситет параболы равен 1.

ж. Вершиной параболы называется та её точка, которая всего ближе к полюсу. Докажите, что такая точка существует и притом только одна. Где она находится?

з. Парабола $y = kx^2$ разбивает плоскость на две области, где $y > kx^2$ и $y < kx^2$. В какой из них лежат фокус, директриса? По-прежнему обозначая через r и d расстояния до F, D, докажите, что в первой области $r < d$, а во второй $r > d$.

и. Для параболы не возникает вопроса о связи соответствующего уравнения Аполлония (7) с нашим определением параболы, но как связано его значение p с нашим?

Теперь перейдём к гиперболе. В школе гиперболой называют график функции $y = k/x$, т. е. её уравнение есть $xy = k$. Обратите внимание на то, что эта кривая, в отличие от эллипса и параболы, состоит из двух «частей», двух отдельных кривых, которые отвечают $x > 0$ и $x < 0$ и расположены соответственно в первом и третьем квадрантах. Эти «части» называются ветвями гиперболы. Введём новые декартовы координаты u и v, оставив прежнее начало координат O, направив положительную полуось Ou по биссектрисе первого квадранта, а положительную полуось Ov — по биссектрисе второго квадранта.

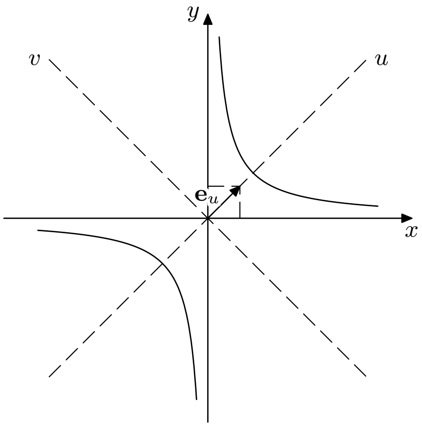


Рис. 33

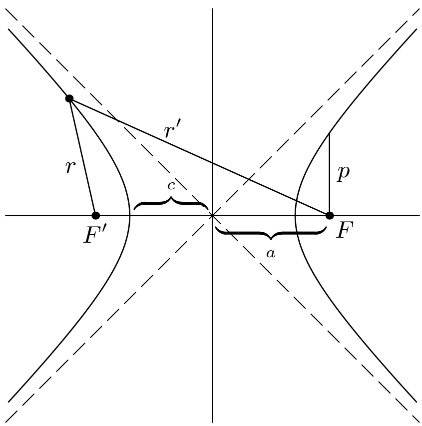


Рис. 34

Упражнение 3.3. Найдите формулы, связывающие u, v с x, y. (Указание. Обозначим через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ единичные векторы, направленные в положительном направлении по осям Ox, Oy, Ou, Ov. Выразите $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и учтите, что если одна и та же точка имеет координаты x, y и u, v, то $u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$.) С их помощью напишите уравнение гиперболы в координатах u, v.

Ответ: $u^2 - v^2 = 2k$. Но это ещё не гипербола общего типа, а так называемая равнобочная гипербола. «Общая» гипербола получается при сжатии или растяжении равнобочной гиперболы $u^2 - v^2 = a^2$ в вертикальном направлении (теперь таковым считается направление оси v). Проверьте, что уравнение «общей» гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

(используемые координаты теперь снова обозначены через x, y, но это бывшие u, v). «Общая» гипербола, как и равнобочная, состоит из двух ветвей. Они расположены в полуплоскостях $x \geqslant a$ и $x \leqslant -a$.

Упражнение 3.4. а. Вершинами гиперболы (14) называются точки $(a,\,0)$ (вершина правой ветви) и $(-a,\,0)$ (вершина левой ветви). Докажите, что отрезок, соединяющий вершины, является кратчайшим из отрезков с концами на разных ветвях гиперболы. (Таким образом, вершина ветви гиперболы — это та (единственная!) точка этой ветви, которая ближе всего до другой ветви.)

б. Докажите, что гипербола имеет две оси симметрии и один центр симметрии (он называется центром гиперболы). Где они находятся?

Упражнение 3.5. а. Докажите эквивалентность данного выше определения гиперболы такому: множество таких точек A плоскости, что разность расстояний r и r' от точки A до двух точек F и F' (одних и тех же для всех A) равна $\pm 2a$ (знак «+» относится к одной ветви — правой ветви для гиперболы (14), а знак «$-$» относится к другой ветви). Для гиперболы (14) это значение a совпадает с a, фигурирующим в уравнении (14).

Точки F и F' называются фокусами гиперболы. Как и для эллипса, расстояние между фокусами называется фокальным расстоянием и обычно обозначается через $2c$, а отношение $e = c/a$ называется эксцентриситетом. На сей раз $e > 1$, т. е. для гиперболы $c > a$. Докажите, что $c^2 = a^2 + b^2$, $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ (на сей раз b может быть и больше, и меньше a).

б. Докажите, что у гиперболы имеются только два фокуса.

в. Фокальным параметром p гиперболы называется расстояние от фокуса F до любой из двух точек гиперболы, лежащих на проходящем через F перпендикуляре к оси гиперболы, соединяющей её фокусы. Покажите, что $p = a(e^2 - 1)$.

г. Покажите, что уравнение (13) с $e > 1$ является уравнением гиперболы с эксцентриситетом e (точнее, некоторой ее ветви[7]) и что каждая гипербола имеет такое уравнение в подходящей системе полярных координат (где находятся полюс и начальный луч этой системы?).

д. Проверьте следующее утверждение. Множество $\{(x,\,y);\; x^2/a^2 - y^2/b^2 > 1\}$ состоит из двух областей, ограниченных соответственно правой и левой ветвями гиперболы. Один из фокусов (обозначим именно его через F) лежит в правой области (там $x > a$), а другой фокус F' — в левой (там $x < -a$). Если r — расстояние до F, а r' — расстояние до F', то в правой области $r' - r > 2a$, а в левой области $r - r' > 2a$. Между двумя ветвями гиперболы заключена область, в которой $x^2/a^2 - y^2/b^2 < 1$; в ней $|r - r'| < 2a$. В этой области лежит центр гиперболы.

---

[7]Оно описывает и вторую ветвь, если (вопреки смыслу r как расстояния) допустить отрицательные значения r (и придать им подходящий смысл).

§ 4. Скорость

У древних греков, конечно, было интуитивное понятие о скорости (всякому ясно, что стрела летит быстрее, чем бежит человек), но отчётливо они представляли себе только скорость равномерного движения. Тогда всё ясно: если автомобиль едет со скоростью 90 км/ч (пример, конечно, не древнегреческий), так что его скорость $v = 90$ км/ч $=$ $= 90 \times 1000/3600$ м/с $= 25$ м/с, то за 10 секунд он проедет 250 м, а за 2 часа — 180 км. Но что такое скорость неравномерного движения? Что такое средняя скорость движения за время t, ясно: надо взять пройденное за это время расстояние s и разделить его на t. Но что такое *мгновенная* скорость? Именно она фигурирует в физических законах, а также и скорость изменения этой скорости (ускорение). Но если мы поймём, что такое мгновенная скорость, то с ускорением всё будет аналогично.

В знаменитых «Фейнмановских лекциях по физике» [55] (гл. 9, § 2) для оживления изложения и лучшего запоминания приводится такой пример. Полицейский останавливает автомобиль, «подходит к машине и говорит: „Мадам (ибо за рулём была женщина), Вы нарушили правила уличного движения. Вы ехали со скоростью 90 километров в час“. Женщина отвечает: „Простите, это невозможно. Как я могла ехать со скоростью 90 километров в час, если я еду всего лишь 7 минут!“. Как бы Вы ответили на месте настоящего полицейского? Конечно, если Вы настоящий полицейский, то такими хитростями Вас не запугаешь. Вы бы твёрдо сказали: „Мадам, оправдываться будете перед судьёй!“. (Тем более, добавлю, что в Америке штраф накладывает именно судья по представлению полицейского. — Д. А.) Но предположим, что у Вас нет такого выхода. Вы хотите честно доказать нарушительнице её вину и пытаетесь объяснить ей, что означает скорость 90 км/ч. Как это сделать? Вы скажете: „Я имел в виду, мадам, что если бы Вы продолжали ехать таким же образом, то через час Вы бы проехали 90 километров“. „Да, но ведь я затормозила и остановила машину, — может ответить она, — так что теперь-то я уж никак не могла бы проехать 90 километров в час“».

В популярной литературе нередко встречается то самое выражение, которым пытался аргументировать «полицейский»: «если бы движение продолжалось таким же образом». Фейнман специально останавливается на его бессмысленности. Он говорит:

«Аналогичная проблема возникает и в случае падающего шарика. Предположим, что мы хотим определить его скорость через 3 с, если бы он двигался таким же образом. Но что означает „двигался таким же образом“? Сохранял бы ускорение, двигался быстрее, что ли? Конечно, нет! Сохранял бы ту же самую *скорость*. Но ведь это как раз то, что мы пытаемся определить! Если бы шарик продолжал двигаться „таким же образом“, то он падал бы так же, как падает (то есть всё быстрее и быстрее — Д. А.). Нарушительница могла бы вам ответить ещё и так: „Если бы я продолжала ехать, как ехала, ещё час, то налетела бы на стену в конце улицы!“».

Далее «полицейский» пытается придумать другое определение понятия «скорость». «Вы скажете: „Разумеется, мадам, если бы Вы ехали таким же образом в течение часа, то налетели бы на стену, но за 1 секунду Вы бы проехали 25 метров, так что Вы делали 25 метров в секунду, и если бы Вы продолжали ехать таким же образом, то опять проехали бы 25 метров, а стена стоит гораздо дальше“. „Но правила запрещают делать 90 километров в час, а не 25 метров в секунду“. „Да ведь это то же самое, что и 90 километров в час“, — ответите вы».

Мы приходим к выводу, что «нет никакой необходимости ехать целый час с такой быстротой, достаточно какого-то *момента* (Фейнман имеет в виду очень маленький промежуток времени. В таком же смысле слово «момент» иногда употребляется и Ньютоном. — Д. А.) Это означает, что за какой-то момент времени машина проходит такое же расстояние, как и идущая с постоянной скоростью 90 км/ч». Говорю теперь своими словами: мы берём среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ машины за маленький промежуток времени Δt и смотрим, что получится, если этот промежуток брать всё меньше и меньше. Мгновенная скорость v — это то, к чему при этом приближается средняя скорость; приближается в том смысле, что разность $v_{\text{ср}} - v$ становится сколь угодно малой по модулю (по абсолютной величине), если промежуток Δt достаточно мал. Разность будет меньше $1/10$, если Δt меньше какого-то одного числа; меньше $1/100$, когда Δt меньше какого-то другого числа; меньше $1/1000$, когда Δt меньше какого-то третьего числа; и т. д. Вообще, если я заранее задамся какой-нибудь границей $\varepsilon > 0$ для $|v_{\text{ср}} - v|$, то найдётся такое $\delta > 0$, что если $\Delta t < \delta$, то тогда уж наверняка $|v_{\text{ср}} - v| < \varepsilon$.

Те читатели, которые лучше знакомы с математикой, понимают, что я сейчас определил понятие предела и что мгновенная скорость v — это предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$. Я далее буду пользоваться понятием предела, потому что, с одной стороны, я его определил, а с другой — повторять каждый раз полностью всё определение мгновенной скорости было бы слишком долго. Оно, как вы видите, состоит из двух частей: сперва берём среднюю скорость за промежуток времени длины Δt, деля пройденный за это время путь Δs на Δt, потом берём предел средней скорости при $\Delta t \to 0$. Запись $\Delta t \to 0$ просто напоминает о том, что надо брать всё меньшие и меньшие Δt. А те, которые знакомы с математикой ещё лучше, понимают, что мгновенная скорость — это производная пути s по времени, для которой имеется и специальное обозначение ds/dt. (Обозначение напоминает, что сперва у нас было $\Delta s/\Delta t$, а потом мы с ним что-то сделали — перешли к пределу при $\Delta t \to 0$. Читается «ds по dt». «По» здесь появилось из полного названия: «производная s по t».) Но те, которые знакомы с математикой хуже, не должны этого пугаться. Я, правда, чаще буду говорить о скорости, а это на самом деле то же самое, что производная. Но с производными связан определённый математический аппарат, позволяющий сперва эти производные, т. е. скорости, вычислять, если известно, как зависит пройденный путь от времени, а потом и наоборот, определять пройденный путь по скорости. Всё это имеет грозное название «дифференциальное и интегральное исчисление», синоним — «математический анализ» (в узком смысле слова[1]); соответствующий учебный предмет в вузах обычно называется именно так). Его создание — колоссальная заслуга И. Ньютона и Г. Лейбница (1646—1716). (Они, конечно, имели и предшественников, и последователей, но всё-таки до них этих исчислений как единого целого не было, а после них было, хотя ещё многое оставалось сделать.) Однако в основном мы не собираемся иметь дело с этим аппаратом, а хотим только говорить о мгновенной скорости и понимать, что это значит. Нам важно только понимать, что существует понятие мгновенной скорости и что средняя скорость на очень малом промежутке времени — это почти мгновенная скорость. А вот насколько малым этот промежуток должен быть — это зависит и от того, какую близость средней скорости к мгновенной мы хотим обеспечить, и от того, с каким именно движением мы имеем дело (для автомашины он один, а для электрона, вылетевшего из радиоактивного вещества и замедляющего своё движение в воздухе, — гораздо меньше).

Существует такой анекдот о знаменитом английском физике У. Томсоне (1834—1907), который за свои заслуги перед наукой и электротех-

[1] В широком смысле слова к математическому анализу относят также различные математические дисциплины, интенсивно использующие дифференциальное и интегральное исчисление; в таком смысле математический анализ составляет весьма значительную часть математики. В Математическом институте РАН, где я работаю, свыше половины научных отделов можно считать чисто аналитическими и ещё в половине оставшихся отделов анализ играет столь значительную роль, что их можно считать наполовину аналитическими; да и для прочих отделов анализ, как правило, тоже немаловажен, хотя и не в такой степени.

Распространённое ранее название «анализ бесконечно малых» (смысл которого поясняется ниже, в районе формулы (19)) объясняет, как возникло название «математический анализ».

никой стал в 1892 г. лордом Кельвином. Он однажды спросил у студентов: что такое dx/dt? В ответ они привели ему то определение, которое я дал (я только писал s, а не x), и различные его перефразировки — всё, чему их учил тамошний профессор математики Тодгентер. Но Томсон (или, может быть, уже Кельвин) отрицательно помотал головой и сказал: «Ах, бросьте вы этого Тодгентера, dx/dt — это скорость!»

Далее я чаще говорю «скорость», а не «мгновенная скорость». Когда математик, физик или механик говорит о скорости и никаких дополнительных слов не произносит, он имеет в виду именно мгновенную скорость. Так и было с Кельвином в этом анекдоте. Анекдот наглядно показывает, что физики настолько привыкли пользоваться скоростью, что для них она стала как бы первичным понятием. Впрочем, ссылка на Фейнмана показывает, что и они всё-таки не против того, чтобы этому понятию раз в жизни дать точное определение.

Тот, кто ещё более образован, может ехидно спросить: а разве всегда существует мгновенная скорость? Не может ли случиться, что, как бы мы ни уменьшали промежуток времени, средняя скорость ни к какому определённому значению не будет стремиться? Да, может. Но в очень широком круге вопросов — практически во всех вопросах, с которыми студенту приходится иметь дело на первых порах, если не считать специально придуманных для его тренировки математических примеров, — мгновенная скорость существует. Тем более это так для нас с вами.

Нам легче, чем древним грекам и даже чем современникам молодого Кельвина, усвоить, что существует мгновенная скорость движения, потому что каждый видел спидометр автомобиля (тогда как на колесницах и конях спидометров не ставили, а на паровозах во времена молодости Кельвина ставили соответствующие приборы, вероятно центробежные тахометры, но их мало кто видел). Скорость в спидометре получается вовсе не путём измерения пройденного пути $s(t)$ и вычисления $\big(s(t+\Delta t) - s(t)\big)/\Delta t$ с каким-то малым Δt. Его работа связана с тем, что скорость сама по себе фигурирует в ряде физических законов, в данном случае — законов электродинамики. Это объясняет точку зрения Кельвина, по-видимому готового считать скорость самостоятельным «первичным» понятием; так же был настроен и Ньютон, см. часть 1 приложения VIII. (Автомобильный спидометр по принципу своего действия напоминает динамомашину, хотя конструктивно выполнен иначе. В нём нет статора, внутри которого вращается ротор, а имеется постоянный магнит, который с помощью механической передачи приводится во вращение со скоростью, пропорциональной скорости движения автомобиля. Вращающийся магнит индуцирует ток в параллельном плоскости вращения металлическом диске (как бы «ротор»), а этот ток тут же и измеряется. Именно, ток в свою очередь создаёт магнитное поле, взаимодействующее с полем магнита, и это создаёт силу, стремящуюся повернуть диск. Но вращению диска противодействует специально для того предназначенная пружина, поэтому диск и связанная с ним стрелка не вращаются, а только отклоняются на угол, зависящий от силы индуцированного в диске тока и тем самым от скорости вращения магнита.)

Полицейский в фейнмановском рассказе тоже узнал скорость нарушительницы, не деля пути на время. У него был прибор, использующий эффект Допплера: при отражении электромагнитной волны (в полицейском приборе это радиоволна) от движущегося тела изменяется частота волны. Именно, если тело приближается со скоростью v, то частота ν увеличивается в $(c+v)/(c-v)$ раз, где c — скорость света; та же формула годится и при удалении тела, если брать его скорость со знаком «минус» (в этом случае частота уменьшается, что и соответствует тому, что множитель $(c+v)/(c-v)$ меньше 1). Поскольку v много меньше, чем c, изменение частоты, вычисленное по формуле

$$\Delta\nu = \nu_{\text{новая}} - \nu_{\text{прежняя}} = \left(\frac{c+v}{c-v} - 1\right)\nu_{\text{прежняя}} = \\ = \frac{2v}{c-v}\nu_{\text{прежняя}} = \frac{2}{1-v/c}\nu_{\text{прежняя}} \approx \frac{2v}{c}\nu_{\text{прежняя}}.$$

Видимо, ту точку зрения, которая проскальзывает в анекдоте о Томсоне-Кельвине и которая им самим едва ли «додумывалась» до законченной формулировки, можно выразить так. Скорость сама по себе есть некое первичное понятие, некая физическая величина; в этом качестве она, как говорилось, фигурирует (вместе с ускорением) в формулировке нескольких законов природы. Но она имеет отношение к пройденному пути (если для краткости говорить только о скорости движения точки). В чём это отношение состоит, объясняют математики в своём определении производной. Кельвин об этом объяснении, конечно, прекрасно знал, но не хотел с этого начинать. У него было как бы некоторое смещение акцентов по сравнению с математиками. Именно смещение акцентов, а не противоречие.

Упражнение 4.1. Докажите, что $d(kt^2)/dt = 2kt$, $d(1/t)/dt = -1/t^2$, $d\sqrt{t}/dt = 1/(2\sqrt{t})$ (в последнем случае подразумевается, что $t > 0$). Указание: используйте равенство $(\sqrt{t+h} - \sqrt{t})/h = (t+h-t)/\big(h(\sqrt{t+h} + \sqrt{t})\big) = \ldots$

Когда мы говорим о скорости изменения какой-то величины, зависящей от времени, эта величина вовсе не обязана быть каким-то путём или декартовой координатой. Вот простой, важный и по существу, вероятно, уже известный читателю пример из кинематики. Представьте себе теперь, что некоторая точка $A(t)$ движется в плоскости Π (кстати, когда движущаяся точка не покидает некоторой плоскости, то говорят о плоском движении), а нас интересует, как это движение наблюдается из некоторой точки O, в которую $A(t)$ никогда не попадает. Точку O можно было бы назвать «точкой наблюдения», но обычно называют иначе — полюсом, хотя никакого отношения к полюсам Земли или небесной сферы она не имеет. И представьте себе, что нас в данный момент интересует не расстояние от O до $A(t)$, а только направление луча $OA(t)$. И даже не столько само это направление, сколько скорость его изменения. Но чтобы говорить о скорости, надо сперва выразить это направление как-то количественно. Что как раз и делается, когда обращаются к полярным координатам. Направление $OA(t)$ характеризуется полярным углом $\varphi(t)$ точки $A(t)$, поэтому под скоростью изменения направления надо понимать скорость изменения φ — говоря математически, производную $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$. Она называется угловой скоростью, подробнее — угловой скоростью движущейся точки A относительно полюса (точки наблюдения) O, и обычно обозначается через ω.

Выше говорилось о реально происходящем движении. Но всё сказанное применимо, когда у нас имеется некоторая величина $f(x)$, зависящая от параметра x (т. е. каждому числу x из некоторого отрезка каким-то образом сопоставлено некоторое число $f(x)$), — как говорят в математике, «функция от x»[2]. Это x может иметь, а может и не иметь физический смысл времени; даже если x — время, $f(x)$ не обязано быть путём, пройденным какой-то точкой к моменту времени t; но мы по-прежнему можем говорить о «скорости изменения $f(x)$ с изменением x», как будто бы x было настоящим временем. Повторяю определение скорости: сперва мы смотрим, как изменится f, если x увеличить или уменьшить на некоторое Δx (при уменьшении я не буду писать $x - \Delta x$, а буду по-прежнему писать $x + \Delta x$, считая Δx отрицательным; я раньше не говорил, что Δt может быть меньше 0, но, в сущности, нигде и не исключал такой возможности). Мы берём «приращение» Δf функции f при изменении x на Δx: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ (хотя его называют

[2]Это весьма важное понятие, и хотя, вероятно, читатель с ним уже встречался (поэтому выше я рискнул несколько раз воспользоваться без особых пояснений названием «функция» применительно к нескольким конкретным примерам), сейчас, когда речь зашла о более общих функциях, уместно будет напомнить, что функция — это сопоставление каждому числу (скажем, из некоторого числового отрезка, или вообще любому числу) некоторого другого числа. Например, если мы сопоставим числу x число $y = x^2$, то y будет некоторой функцией от x. В общем случае можно писать $y = f(x)$ (f — краткое обозначение для правила, по которому числам x сопоставляются числа y; конечно, можно использовать и другие буквы, например, $v = g(u)$). Величину x называют аргументом функции $f(x)$. Когда x придаётся какое-то конкретное значение, например $x = 10$, то для $y = f(x)$ получается некоторое конкретное значение, например $f(10)$ (так, когда $f(x) = x^2$, то $f(10) = 100$). Говорят, что $f(10)$ есть значение функции f в точке $x = 10$ (словосочетание «в точке» отражает отождествление чисел с точками числовой оси).

В школьном курсе физики встречаются формулы, выражающие скорость равномерноускоренного движения с ускорением a и пройденный путь s как функции времени t: $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0 t + at^2/2$ (где v_0 — скорость в начальный момент времени $t = 0$, а s_0 — пройденный к этому моменту путь).

«приращением», оно вполне может быть отрицательным) и делим его на Δx, вводя тем самым «среднюю скорость $\Delta f/\Delta x$ изменения f». После этого берём предел средней скорости при $\Delta x \to 0$. Только когда x не имеет физического смысла времени, этот предел обычно не называют «скоростью», а пользуются математическим термином «производная» (в данном случае — «производная $f(x)$ по x»). Как уже говорилось, этот предел (довольно условно) обозначают через $df(x)/dx$. Другое обозначение — $f'(x)$. Когда же речь идёт о производной по времени, вместо штриха ставят точку вверху (или наверху справа): $\dot{f}(t)$ (или $f^{\cdot}(t)$). Когда у функции всюду, где она определена (т. е. при всех возможных значениях её аргумента), существует производная, то говорят, что функция является дифференцируемой.

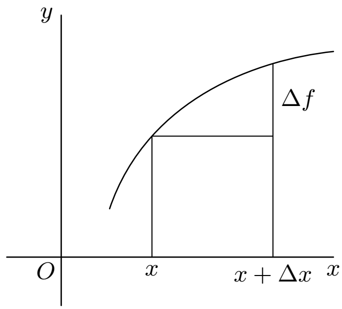


Рис. 35

Мы можем говорить, скажем, о скорости увеличения глубины моря f с расстоянием x от берега. Можно, конечно, представить себе, что мы едем с постоянной скоростью на корабле в сторону моря, всё время измеряем глубину с помощью эхолота и смотрим, насколько быстро эта величина изменяется со временем.

Тогда x — это то же самое, что и время, только измеренное в каких-то особых единицах (связанных со скоростью корабля), и речь идёт о настоящей скорости изменения f, однако и тогда f не является каким-то реально пройденным путём. А главное, нас вполне может интересовать зависимость глубины f от расстояния до берега x, а с какой скоростью при этом двигается наш корабль, постоянной или переменной, нас вообще может не интересовать. Так что мы рассматриваем f как функцию от x: $f = f(x)$. Допустим, что результаты наших измерений представлены на графике (рис. 36). Тогда без всякой математики ясно, что f с ростом x изменяется сперва медленно, затем быстро, затем опять медленно. Математика уточняет это наблюдение, указывая, что скорость изменения $f(x)$ с ростом x имеет такой вид, как на рис. 36.

Понимание производной как скорости делает понятным, что если у какой-нибудь функции $f(t)$ производная $\dot{f}(t)$ всюду положительна, то эта функция возрастает (т. е. с увеличением t увеличивается и $f(t)$), а если всюду $\dot{f}(t) < 0$, то функция убывает — когда $t_1 < t_2$, то $f(t_1) > f(t_2)$. Ведь если, скажем, всё время $\dot{f}(t) > 0$, то скорость точки оси x с координатой $x = f(t)$ положительна, так что эта точка движется направо.

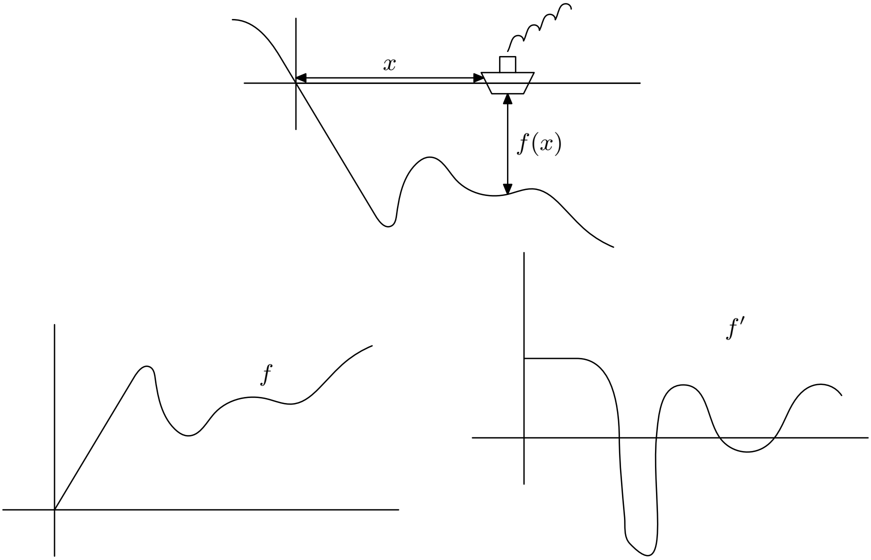


Рис. 36

По-моему, это звучит убедительно, хотя и не является формальным доказательством, которого я приводить не буду.

Хотя я говорил сейчас о функции от «времени», по существу сказанное относится к функциям от аргумента x, который временем не является. Ведь можно всё-таки вообразить на минуту, что x есть время или, что практически то же самое, что x с ростом времени возрастает с единичной скоростью, и тогда вывод о возрастании или убывании f в зависимости от знака f' становится наглядно убедительным. (А опущенное мной формальное доказательство, естественно, вообще не зависит от того, как мы называем t или x.)

Сказанное — это простейший пример использования производных для изучения свойств функций.

Если для физика «производная — это прежде всего скорость», то в математике с самого начала с понятием производной не менее часто связывался другой наглядный образ — касательная к кривой. Касательной к кривой C в её точке $A_0 = (x_0, y_0)$ называется прямая, являющаяся пределом прямых A_0A, где A — другая точка кривой C, при неограниченном приближении A к A_0. (Говорят, что касательная есть предельное положение проходящей через A_0 «секущей» A_0A.)

Здесь необходимо уточнить, как понимать выражение «предел прямых». Какие-то наглядные представления оно вызывает, и, видимо, с ними вполне согласуется утверждение, что если прямые L_n стремятся к прямой L при $n \to \infty$, то уж во всяком случае направления прямых L_n должны стремиться к предельному направлению, которое и будет направлением прямой L. А чем характеризуется направление прямой? При всей неопределённости слова «направление», едва ли кто-нибудь усомнится, что направление прямой полностью характеризуется единичным вектором $\mathbf{e}$, лежащим на этой прямой, а также и вектором $-\mathbf{e}$. Если единичные векторы $\mathbf{e}_n$ характеризуют направления прямых L_n и если существует предел[3] $\mathbf{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{e}_n$, то, конечно, этот вектор $\mathbf{e}$ и определяет предельное направление. Но надо ещё учесть, что векторы $-\mathbf{e}_n$ характеризуют направления тех же прямых L_n и что, может быть, сходящаяся последовательность единичных векторов получится тогда, когда мы заменим часть векторов $\mathbf{e}_n$ на противоположные векторы. Итак, мы требуем не обязательно существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{e}_n$, а существования предела $\mathbf{e} = \lim\limits_{n\to\infty} (\pm\mathbf{e}_n)$ при каком-то выборе знаков «$+$» и «$-$». Конечно, для сходимости прямых L_n мало одной только сходимости направлений (прямые $L_n = \{(x,\, y);\ y = n\}$ ни к чему не сходятся, хотя все они имеют одно и то же направление). С другой стороны, если все L_n проходят через одну и ту же точку A, этого вроде бы достаточно (предельная прямая тогда тоже проходит через A). Такой случай является весьма специальным[4], но кажется естественным потребовать (ослабляя условие, что все L_n проходят через одну и ту же точку), чтобы при всех достаточно больших n прямые L_n проходили сколь угодно близко к некоторой точке A (она будет точкой предельной прямой L, которая полностью определяется вектором $\mathbf{e}$ и точкой A). Итак, $L_n \to L$, если направления прямых L_n сходятся к направлению прямой L и, кроме того, на каждой L_n можно взять такую точку A_n, что последовательность точек A_n стремится к некоторой точке A, лежащей на L. В принципе, дав такое определение, я должен был бы доказать единственность предела (если поставить другие знаки «$\pm$» у $\mathbf{e}_n$ и если при этом тоже существует $\lim\limits_{n\to\infty} \pm\mathbf{e}_n$, то обязательно ли он равен $\mathbf{e}$ или $-\mathbf{e}$, и если на L_n взять другую точку A'_n, причём получится сходящаяся последовательность, то лежит ли её предел на L?). Я не буду этого делать, хотя это не так уж сложно и читатель может попробовать убедиться в единственности предела прямых самостоятельно.

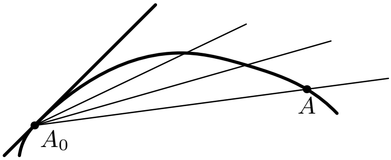


Рис. 37

Ради простоты и конкретности я говорил (и при случае буду говорить ниже) о сходимости последовательности прямых, но, внеся очевидные изменения в сказанное, можно говорить о сходимости семейства прямых L_s, зависящих от некоторого непрерывного параметра s, к пределу при $s \to s_0$. В определении касательной мы

[3] Для последовательности векторов (не обязательно единичных) $\mathbf{a}_n$ понятие предела совершенно аналогично понятию предела чисел: $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$, если при всех достаточно больших n все $\mathbf{a}_n$ оказываются сколь угодно близкими к $\mathbf{a}$, т. е. если $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \to 0$ (теперь мы говорим уже о хорошо известном пределе чисел!) Это эквивалентно сходимости координат векторов $\mathbf{a}_n$ к соответствующим координатам вектора $\mathbf{a}$. (Аналогичный смысл имеет сходимость последовательности точек.)

[4] Сейчас нам нужен именно этот специальный случай — ведь все секущие A_0A с различными A проходят через A_0. Но было бы странно ограничиваться им в общем определении предела прямых. (Разве у последовательности непересекающихся прямых $L_n = \{(x,\, y);\ y = 1/n\}$ нет предела? Наглядно кажется ясным, что они сходятся к оси x.)

имеем дело как раз с такой ситуацией — мы там рассматриваем прямые A_0A, где A, как и исходная точка A_0, лежит на кривой C, а положение точки на кривой определяется непрерывным параметром. Если кривая задаётся уравнением $y = f(x)$, то за такой параметр можно принять просто абсциссу точки $A = (x,\, f(x))$ или число $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — абсцисса точки $A_0 = (x_0,\, f(x_0))$.

Пример. В школе касательная к окружности в точке A_0 обычно определяется как прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку — точку A_0. Ни о каких пределах при этом нет речи. Почему касательная к окружности в нашем смысле слова совпадает с «школьной» касательной?

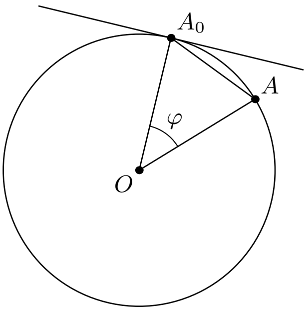


Рис. 38

Обозначим центр окружности C через O, а $\angle A_0OA$ (где, как и раньше, A — точка C) через φ. Тогда $\angle AA_0O = 90° - \varphi/2$ (используем, то что треугольник A_0OA равнобедренный и потому $\angle AA_0O = \angle A_0AO$, а сумма углов в треугольнике равна $180°$). Когда A приближается к A_0, то $\varphi \to 0$ и $\angle A_0OA \to 90°$, так что предельное направление секущей — это направление, перпендикулярное радиусу OA_0. А поскольку все эти секущие проходят через A_0, существование предела прямых A_0A обеспечено одним только существованием предельного направления. Итак, в любой точке A_0 окружности C у C имеется касательная, причём последняя перпендикулярна радиусу OA_0. В школьном курсе геометрии доказывается, что это как раз и есть прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку.

Ниже нам в основном будет нужен только один простой частный (впрочем, довольно общий) случай предела прямых.

Упражнение 4.2. Пусть прямые L_n не вертикальны и имеют уравнения $y = a_nx + b_n$. Докажите, что утверждение «предельная прямая $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ существует и не вертикальна» равносильно существованию пределов $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; при этом уравнением прямой L оказывается уравнение $y = ax + b$.

Раньше я дал общее определение касательной, но нам сейчас нужен только тот случай, когда кривая C задаётся уравнением $y = f(x)$, а касательная к C в точке $A_0 = (x_0,\, f(x_0))$ не вертикальна[5]. В этом случае уравнение секущей A_0A, где

[5]Нас сейчас не интересуют вертикальные касательные, но вообще-то в вертикальности касательной нет ничего исключительного, «патологического». Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ имеет вертикальные касательные в точках $(\pm 1,\, 0)$.

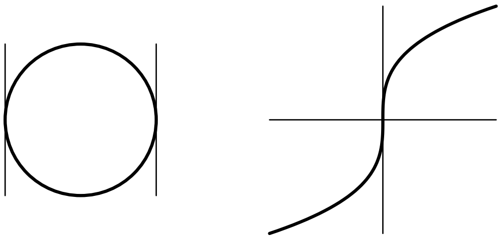


Рис. 39

$A = (x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$, имеет вид $y = a(\Delta x)x + b(\Delta x)$. В записи явно указано, что коофициенты этого уравнения как-то зависят от Δx. А x и y здесь — это координаты точки на секущей. Согласно сказанному выше, существование невертикальной предельной прямой $\lim\limits_{\Delta x \to 0} A_0 A$ равносильно существованию пределов $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a(\Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} b(\Delta x)$.

Упражнение 4.3. Докажите, что если предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a(\Delta x) = a$ существует, то $a = f'(x_0)$, и обратно, если у f существуеит производная в точке x_0, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a(\Delta x)$ (равный, стало быть, $f'(x_0)$). При этом обязательно существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} b(\Delta x)$. У к а з а н и е. Найдите явную формулу для $a(\Delta x)$ и $b(\Delta x)$ в терминах f.

Если прямая имеет уравнение $y = ax + b$, то число a называют её угловым коэффициентом. (Он характеризует её наклон — легко доказать (и, возможно, уже известно читателю), что угловой коэффициент равен тангенсу угла, образуемого этой прямой с осью x.) Таким образом, производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ функции f в точке $(x_0,\ f(x_0))$.

Ньютон, конечно, знал о таком смысле производной. Но, как говорят, Ньютон смолоду представлял себе функции как переменные величины, зависящие от времени. Для него было естественно представлять себе производную как скорость изменения соответствующей величины. У многих его современников (да и позднее) то ли вообще не столь легко возникали подобные кинематические представления, то ли известная новизна этих представлений вызывала настороженность. Во всяком случае, создаётся впечатление, что к геометрическому представлению о производной как об угловом коэффициенте касательной (которое, конечно, весьма наглядно) в то время (а отчасти и по сей день) обращались чаще — касательные уже были привычны. (И это чисто геометрическое понятие, а обращение к кинематике, даже самой простой, может казаться чем-то «инородным». Хотя аккуратной определение понятия «касательной» в общем виде, как мы видели, требует того же самого понятия предела, что и понятие «скорости».)

Упражнение 4.4. а. Рассмотрим эллипс (8) и касательную к нему в его точке $(x_0,\ y_0)$. Докажите, что вся эта касательная, кроме самой точки $(x_0,\ y_0)$, расположена снаружи от эллипса, т. е. в той области, где $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$. (Заметим для дальнейшего, что в этой области сумма расстояний до фокусов $r + r'$ больше $2a$.) У к а з а н и е. Сперва рассмотрите аналогичный вопрос для окружности. Во что переходит касательная к окружности при сжатии в вертикальном направлении?

б. Рассмотрим параболу $y = kx^2$ и касательную к ней в её точке $(x_0,\ y_0)$. Докажите, что вся эта касательная, кроме самой точки $(x_0,\ y_0)$, лежит в области $y < kx^2$, т. е. «под параболой». (Заметим для дальнейшего, что в этой области, в обычных обозначениях, $r > d$.) У к а з а н и е. Касательная имеет уравнение вида $y = l(x)$, где $l(x)$ — некоторая линейная функция, т. е. функция вида $ax + b$. Сравнив производные функций kx^2 и $l(x)$ при $x < x_0$ и $x > x_0$, докажите, что функция $kx^2 - l(x)$ убывает при $x < x_0$ и возрастает при $x > x_0$.

Правда, это не совсем наш случай — возле этих точек окружность не задаётся уравнением вида $y = f(x)$, а одна её часть имеет там уравнение $y = \sqrt{1 - x^2}$, а другая — уравнение $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Но кривая $y = \sqrt[3]{x}$ всюду задаётся уравнением вида $y = f(x)$ (напомню, что отрицательное число имеет отрицательный кубический корень). Эта кривая имеет вертикальную касательную в точке $(0,\ 0)$. (Та же кривая имеет уравнение $y = x^3$, откуда видно, что точка $(0,\ 0)$ «ничуть не хуже» других её точек, просто касательная там вертикальна.)

в. Рассмотрим гиперболу (14) и касательную к ней в её точке (x_0, y_0). Докажите, что вся эта касательная, кроме самой точки (x_0, y_0), лежит в области $x^2/a^2 - y^2/b^2 < 1$, т. е. «между двумя ветвями гиперболы». (Заметим для дальнейшего, что в этой области, в обычных обозначениях, $|r - r'| < 2a$.) Указание. Удобнее начать с равнобочной гиперболы $y = k/x$, для которой применимы соображения, аналогичные указанным в п. б. О какой области надо при этом говорить? При переходе к гиперболе (14) используйте соображения, аналогичные указанным в п. а.

Вернёмся к примеру с глубиной моря $f(x)$, зависящей от расстояния x до берега. Снова представим себе, что мы едем на корабле, так что расстояние до берега x зависит от времени t: $x = x(t)$ и глубина меняется со временем: $f = f(x(t))$, но пусть теперь скорость корабля непостоянна. Что можно сказать о скорости изменения глубины со временем? Исходя из того, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{15}$$

нетрудно догадаться, что при переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ мы получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{16}$$

Эта догадка правильна, только в приведённом рассуждении есть один «подводный камень»: в равенстве (15) мы предполагаем, что $\Delta x \neq 0$; когда мы определяем df/dx, мы, конечно, берём $\Delta f/\Delta x$ с ненулевыми Δx; но в формуле (15) величина Δx зависит от Δt, и кто знает — быть может, при каких-то Δt получается $\Delta x = 0$? Нужно сделать небольшое уточнение. Нас интересуют не какие-то любые Δt, а только малые. Если имеется такое t, что при каких-то сколь угодно малых Δt получается $\Delta x = 0$, т. е. средняя скорость изменения x равна 0 на каких-то очень малых отрезках времени, и выходит, что $dx(t)/dt = 0$ при этом t. Но тогда при этом t и этих Δt приращение f тоже равно нулю:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

и получается, что $df(x(t))/dt = 0$ при этом t. А тогда в обеих частях равенства (16) стоят нули.

Формула (16) называется «теоремой о производной сложной функции». Сложная функция — это функция, в аргумент которой подставлена некоторая (обычно другая) функция. Такова наша функция $f(x(t))$: в ней аргумент функции f сам является функцией от t. Эта сложная функция сопоставляет числу t число $f(x(t))$.

Формула (16) легко запоминается, поскольку внешне выглядит как простое алгебраическое тождество, хотя на самом деле она не является таковым, ибо «дроби» вроде dx/dt — это на самом деле не дроби, а, так сказать, «слитные» обозначения для производной[6]. Здесь проявляется удобство обозначения dx/dt, введённого Лейбницем, который независимо от Ньютона, хотя и несколько позднее, разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Ньютон обозначал производную по времени, ставя сверху точку: $df/dt = \dot{f}$, $dx/dt = \dot{x}$. Такое обозначение широко употребляется и поныне, но ведь в формуле (16) фигурирует ещё и производная по x, которую тогда тоже надо как-нибудь обозначить, скажем, штрихом: $df/dx = f'$ (это тоже общепринято). В этих обозначениях формула (16) выглядит тоже просто, но менее наглядно:

$$\dot{f} = f'\dot{x}. \tag{17}$$

Честно говоря, настоящая теорема о производной сложной функции в университетском курсе утверждает несколько больше. Она начинается с утверждения, что если $f(x)$ и $x(t)$ дифференцируемы (т. е. существуют df/dx и dx/dt), то сложная функция $f(x(t))$ тоже дифференцируема (т. е. существует $df(x(t))/dt$), а затем уж добавляется, что при этом справедлива формула (16). Первое утверждение тоже несложно, но я не собираюсь преподавать здесь университетский курс. Во-первых, у меня меньше времени, а во-вторых, я рассказываю о шедевре Ньютона, а он обычно не беспокоился о существовании производных, хотя иногда встречался с «особыми значениями» переменных, где производные не существуют, и в этих случаях прекрасно разбирался в обстановке. Видимо, он (как и наследовавшие ему корифеи XVIII в.) считал, что надо быть собранным и осторожным при столкновении с необычными обстоятельствами (в которых он (они) при случае умел(и) разбираться), но в условиях «нормальной жизни» можно и расслабиться. А как узнать, являются ли наши обстоятельства особыми или нет? Ньютон, вероятно, оценивал ситуацию наполовину интуитивно, причём, конечно, его интуиция питалась богатым опытом. Для лиц, не являющихся Ньютонами, в математике имеются как теоремы, утверждающие, что при определённых условиях всё действительно обстоит «благополучно», например, в нужных Ньютону случаях все производные существуют (механики и физики до сих пор по большей части об этом не слишком заботятся, хотя по существу не делают ошибок), так и приёмы исследования для необычных обстоятельств (восходящие как раз к Ньютону; этим физики и механики отнюдь не могут пренебрегать).

Читатель, который читает эту книжку из любопытства и на которого «обосновательские» рассуждения навевают скуку, может этого не стыдиться — он находится в хорошей компании. (Другое дело студент-математик. Оставаясь в компании учёных XVIII в., можно остаться и на второй год.)

Упражнение 4.5 (производная квадрата функции). Проверьте, что $d(f^2(t))/dt = 2f(t)\dot{f}(t)$. (Более полная формулировка: если функция $f(t)$

---

[6] В достаточно подробном курсе дифференциального исчисления со временем всё-таки оказывается, что их можно понимать как некие дроби, но это завело бы нас слишком далеко. Формула (16) тогда действительно вроде бы оказывается алгебраическим тождеством. Но на самом деле понимание dx/dt как настоящей дроби обосновывается с помощью самой этой формулы, так что её всё равно надо доказывать.

дифференцируема, то и функция $f^2(t)$ дифференцируема, причём для её производной имеет место написанная выше формула.)

Теорема о производной сложной функции — одна из двух главных теорем, по ознакомлении с которыми мы переходим от рассуждений о полицейских, спидометрах и т. п. к настоящему дифференциальному исчислению. Вторая теорема — это теорема Лейбница: если функции $f(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы, то дифференцируемо и их произведение $f(t)g(t)$, причём

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \dot{f}(t)g(t) + f(t)\dot{g}(t).$$

Я её тоже не буду доказывать (хотя это опять-таки несложно) по тем же причинам.

Наряду с этими двумя теоремами столь же часто используются и такие утверждения: производная суммы двух функций равна сумме их производных, а при умножении функции на константу производная умножается на ту же константу:

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \dot{f}(t) + \dot{g}(t), \qquad \frac{d(af(t))}{dt} = a\dot{f}(t). \tag{18}$$

(Сюда добавляется обычный припев, что из существования производных в правой части следует существование производных в левой части.) Это утверждение, можно сказать, дотягивает до названия «теорема» лишь при снисходительном соглашении, признающем право на такое название даже за утверждениями, сопровождаемыми сакраментальной фразой: «Доказательство очевидно». В данном случае дело обстоит именно так, ибо ещё до перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ мы имеем

$$\frac{\Delta(f(t) + g(t))}{\Delta t} = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} + \frac{\Delta g(t)}{\Delta t}, \qquad \frac{\Delta(af(t))}{\Delta t} = a\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}.$$

(А далее, если уж договаривать всё до конца, надо использовать примерно столь же «сложную теорему», что предел суммы равен... догадайтесь чему.)

Скорость в один момент времени может быть одной, а в другой момент времени — другой. Иными словами, она может изменяться со временем. А тогда можно говорить, во-первых, о средней скорости её изменения на некотором промежутке времени — о среднем ускорении за это время. Если в момент времени t скорость есть $v(t)$, то мы берём приращение скорости за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, т. е. разность $v(t + \Delta t) - v(t)$ (она вполне может быть отрицательной, но математики всё равно говорят о приращении), и делим его на Δt. Во-вторых, можно говорить о том значении, к которому неограниченно приближается это среднее ускорение при неограниченном уменьшении Δt, т. е. о пределе среднего ускорения при $\Delta t \to 0$. Это мгновенное ускорение. Название сокращают просто до «ускорения». При использовании чисто математической (а не кинематической) терминологии говорят о «второй производной» $d^2 f(x)/dx^2 = d(df(x)/dx)/dx$, которую обозначают также при помощи двух штрихов: $f''(x)$ (а если аргументом рассматриваемой функции служит время t, то при помощи двух точек: $\ddot{f}(t)$).

До сих пор я всё время говорил о скорости и ускорении как о некоторых числах. Это так, если движение происходит по прямой. Но чаще оно происходит по плоскости (плоское движение) или в пространстве. В этом случае изменение положения движущейся точки $A(t)$ (раз её положение зависит от времени t, то я и пишу $A(t)$) за интервал времени от t до $t+\Delta t$ характеризуется вектором $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$. Это направленный отрезок с началом в точке $A(t)$ и концом в точке $A(t+\Delta t)$. Средняя скорость движения за то же время — это вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$, а мгновенная скорость $\mathbf{v}$ в момент времени t — это предел $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$. Аналогично определяется ускорение. Это по-прежнему (мгновенная) скорость изменения скорости, только на сей раз это вектор.

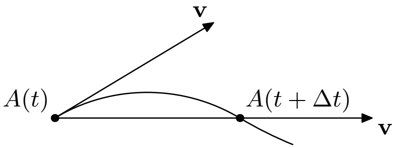


Рис. 40

Позднее будет несколько случаев, когда речь пойдёт о скорости движения проекции точки A на прямую d, или, что то же самое, скорости изменения проекции вектора $\mathbf{u}$ на d. Она равна проекции на эту прямую вектора скорости $\mathbf{v}$. (Действительно, уже изменение проекции за время Δt равно проекции смещения точки A или приращения вектора $\mathbf{u}$ за то же время.) В частности, если точка A или вектор $\mathbf{u}$ имеет декартовы координаты (x, y), то скорость $\mathbf{v}$ этой точки или производная $d\mathbf{u}/dt$ имеет координаты $\big(dx/dt,\, dy/dt\big)$.

Часто понятие мгновенной скорости выступает внешне с несколько иной стороны, чем раньше (хотя это не более чем перефразировка прежнего определения). Можно сказать, что в течение небольшого промежутка времени Δt движение происходит почти так же, как если бы это было движение с постоянной скоростью $\mathbf{v}$:

$$\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} \approx \mathbf{v}\Delta t, \tag{19}$$

и это тем точнее, чем меньше Δt. Но как это понимать? Ведь в формуле (19) обе части приближенно равны 0, «и это тем точнее, чем меньше Δt». Если бы мы написали $2\Delta t\mathbf{v}$ или $(\Delta t)^2\mathbf{v}$, последнее всё равно осталось бы в силе. Но в формуле (19) имеется в виду, что левая и правая части гораздо ближе друг к другу, чем Δt — к нулю; иными словами, разность этих частей $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} - \mathbf{v}\Delta t$ намного меньше Δt. Как понимать «намного меньше»? В данном случае имеется в виду следующее: задавшись заранее каким-нибудь числом $\varepsilon > 0$ и уменьшая Δt, мы всегда обнаружим, что при очень малых Δt отношение указанной разности к Δt станет по своей величине меньше ε. Так что хотя и $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$, и $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} - \mathbf{v}\Delta t$ становятся очень малыми (стремятся к нулю) при $\Delta t \to 0$, эта их малость имеет различный характер. Разность $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} - \mathbf{v}\Delta t$ является, как говорят, величиной, «бесконечно малой по сравнению с Δt» (или «имеет более высокий порядок малости, чем Δt»); это просто сокращённый способ сказать то, что выше было подробно сказано с использованием ε и что несколько более конспективно можно сказать ещё так:

$$\text{предел} \quad \frac{\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} - \mathbf{v}\Delta t}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \to 0 \quad \text{равен } 0.$$

Расстояние же $A(t)A(t+\Delta t)$, вообще говоря (при $\mathbf{v} \neq 0$), является величиной «того же порядка малости», что и Δt, — отношение этих величин при малых Δt остаётся заключённым между некоторыми положительными числами. (Только при $\mathbf{v} = 0$ это расстояние «имеет более высокий порядок малости».) Рассуждения с величинами различных порядков малости — это, в общем, более гибкий и богатый инструмент, нежели рассуждения с одними скоростями; теперь читателю становится понятным упоминавшееся ранее название «исчисление бесконечно малых». Но они представляют собой нечто новое по сравнению с обычной школьной математикой и требуют известной тренировки. Не предполагая таковой у читателя, я стараюсь их избегать, но это не всегда возможно. В нескольких местах, где избежать их невозможно, я наметил их только в общих чертах, имея в виду, что для подготовленного читателя этого достаточно, а неподготовленный читатель сможет, не особенно вникая в подробности, принять соответствующие результаты на веру.

Из всего этого «исчисления бесконечно малых» я кое-где использую только сокращённое обозначение, заменяющее слова «такая-то величина имеет более высокий порядок малости, чем Δt». Вместо этих слов пишут

$$\text{«такая-то величина} = o(\Delta t)\text{»}.$$

Например, данное выше разъяснение, в каком смысле надо понимать (19), сводится к тому, что

$$\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)} - \mathbf{v}\Delta t = o(\Delta t).$$

Надо иметь в виду некоторую условность символа «$o(\Delta t)$»: он не обозначает какой-то определённый объект (числовую или векторную функцию от Δt), а может обозначать любую такую функцию более высокого порядка малости, чем Δt. В одном и том же рассуждении может встречаться десять различных таких функций, и все они будут одинаково обозначаться через $o(\Delta t)$. Если бы тут грозила опасность путаницы, их можно было бы обозначить несколько по-разному, скажем, через $o_1(\Delta t)$, $o_2(\Delta t)$, $\ldots$, $o_{10}(\Delta t)$. Но опыт показывает, что обычно путаницы не возникает, хотя приходится писать формулы вроде $2o(\Delta t) + 6o(\Delta t) = o(\Delta t)$, которые не надо понимать слишком буквально. У нас будет случай сослаться на формулу

$$(a + o(\Delta t))(b + o(\Delta t)) = ab + o(\Delta t), \tag{20}$$

где a и b могут даже зависеть от Δt, лишь бы они были ограничены по величине некоторой не зависящей от Δt константой. (Тогда $ao(\Delta t) = o(\Delta t)$, $bo(\Delta t) = o(\Delta t)$; кроме того, конечно, имеем $o(\Delta t)o(\Delta t) = o(\Delta t)$, а сумма трёх величин $o(\Delta t)$ снова есть $o(\Delta t)$.)

Если интересоваться только длиной вектора скорости $|\mathbf{v}|$, то у нас получится некоторая численная характеристика скорости — её «величина». С другой стороны, раньше мы говорили о скорости v изменения пройденного пути $s(t)$; ничто не мешает нам говорить об $s(t)$

и о скорости $v = \dot{s}(t)$ и тогда, когда движение происходит не по прямой, а на плоскости или в пространстве, так что $s(t)$ оказывается длиной некоторой кривой; эта величина v тоже является некоторой численной характеристикой скорости. Нетрудно догадаться, что $v = |\mathbf{v}|$. Догадаться нетрудно, а вот доказать труднее, но вся сложность связана исключительно с теми вопросами, так сказать, «обосновательского» характера, которые я не хочу обсуждать систематически, хотя иногда всё же затрагиваю их в качестве своего рода образцов. (В данном случае ещё до «появления на сцене» равенства $v = |\mathbf{v}|$ надо уточнить, как точно определить понятие «длина кривой», и вообще, что такое кривая. Последний вопрос, в сущности, не имеет ответа, ибо одним и тем же словом «кривая» могут называться совсем разные вещи; точнее будет сказать, что мы должны объяснить, кривые какого типа мы рассматриваем. Всегда ли существует производная, а если нет (действительно, не всегда), то с чем, с какими свойствами рассматриваемых числовых или векторных функций связано её существование.) Но нам здесь достаточно указать, что равенство $v = |\mathbf{v}|$ тесно связано со следующим чисто геометрическим утверждением: если мы имеем гладкую кривую L (я не уточняю, что значит «гладкая»; наглядный смысл — без углов), то отношение длины малой дуги L к стягивающей её хорде стремится к 1, когда первая длина стремится к 0. При желании читатель сам легко выведет равенство $v = |\mathbf{v}|$ из данного геометрического утверждения. Строго говоря, само это геометрическое утверждение тоже нуждается в доказательстве, которое на самом деле имеет дело с теми же самыми «общеобосновательскими» вопросами, но утверждение настолько наглядно, что я со спокойной совестью доказывать его не буду. Если же интересоваться направлением вектора скорости, то ясно, что он лежит в касательной к траектории (к кри-

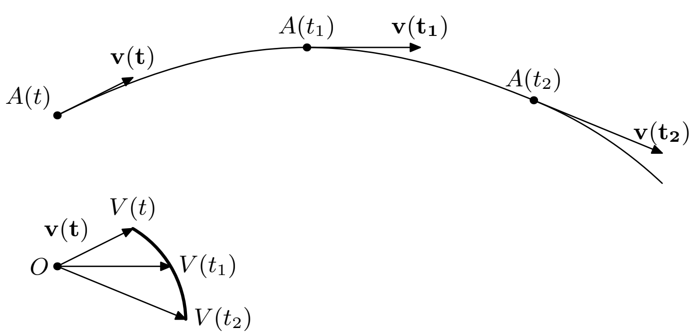


Рис. 41

вой C, «очерчиваемой» движущейся точкой $A(t)$ с изменением t). Действительно, вектор $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$ направлен по секущей, соединяющей точки $A(t)$ и $A(t+\Delta t)$; то же направление имеет и вектор средней скорости $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$. Предельное направление вектора средней скорости — это направление вектора мгновенной скорости $\mathbf{v}(t)$, а предельное направление прямых $A(t)A(t+\Delta t)$ — это направление касательной к C в точке $A(t)$. (Ради полноты надо ещё отдельно упомянуть о случае $\mathbf{v}(t)=0$, хотя нам он не встретится. Тогда направление вектора скорости не определено. Но нулевой вектор принадлежит любой прямой.)

Естественно, что, как и раньше, «независимая переменная» t вовсе не обязательно должна быть физическим временем и что мы можем говорить о скорости изменения (с изменением t) какого-нибудь зависящего от t вектора $\mathbf{u}(t)$, который не обязан иметь физический смысл радиус-вектора некоторой материальной точки. (Примером, который нам уже встретился, является ускорение, т. е. скорость изменения скорости.) Если бы каждому t было сопоставлено число $f(t)$, то мы говорили бы о функции $f(t)$, а в данном случае говорят о вектор-функции. Отложим все эти векторы от некоторой точки O (хотя вначале, может быть, они при разных t откладывались от разных точек), и пусть при этом $U(t)$ — конец вектора $\mathbf{u}(t)$, так что $\mathbf{u}(t)=\overrightarrow{OU(t)}$. Геометрическое место этих точек $U(t)$ называется годографом данной вектор-функции (название происходит от греческих слов годос — путь и графо — пишу). Это понятие ввёл У. Гамильтон (1805—1864) в 1846 г., что не было случайным: с одной стороны, Гамильтон — один из классиков динамики; с другой стороны, в 1843 г. он открыл алгебру кватернионов, внутри которой как бы содержалось векторное исчисление. (Но всё же в динамике Гамильтона вспоминают преимущественно по поводу самых сложных аналитических разделов этой науки, а такие простые и наглядные вещи, как годограф и связанные с ним соображения (по-видимому, он первым пришёл к соображениям, составляющим суть излагаемого в этой книжке подхода к задаче Кеплера), — своего рода дополнение к его основному вкладу.)

Наглядно можно представлять себе (считая параметр t временем, даже если по смыслу вопроса он временем не является) такое движение точки $U(t)$ по годографу, что её радиус-вектор равен $\mathbf{u}(t)$. Тем самым годограф даёт некоторое наглядное представление об изменении вектора $\mathbf{u}(t)$ (с изменением t) и о скорости этого изменения; в особенности наглядно представляется направление этой скорости — это просто направление касательной к годографу. Нам понадобится годограф скорости. В этом случае t есть настоящее время, а $\mathbf{u}(t)$ есть вектор скорости некоторой точки $A(t)$ (таким образом, первоначально вектор $\mathbf{u}(t)$ откладывался от $A(t)$, а при построении годографа мы переносим его в некоторую не зависящую от t точку O — так сказать, принимая её за «начало отсчёта»). Скорость же изменения $\mathbf{u}(t)$ — это ускорение точки $A(t)$. Оно, таким образом, имеет то же направление, что и касательная к годографу скорости.

В виде примера приведём годографы скорости для двух типов движения, известных из школьного курса физики. Для равномерноускоренного движения с ускорением $\mathbf{a}$ скорость в момент времени t равна

$$\mathbf{v}_0 + (t - t_0)\mathbf{a}, \tag{21}$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость в начальный момент времени $t = t_0$. Точки (21) со всевозможными t образуют прямую линию, проходящую через конец V_0 вектора $\mathbf{v}_0$, отложенного от «начала отсчёта», и имеющую направление вектора $\mathbf{a}$. Эта прямая, вернее, та её часть, которая получается при рассматриваемых t, и есть годограф скорости.

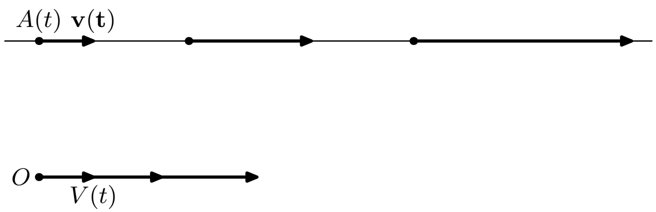


Рис. 42

Второй пример — годограф скорости для равномерного кругового движения. Пусть движение точки $A(t)$ по окружности C радиуса r с центром O происходит с постоянной угловой скоростью ω. Скорость $\mathbf{v}(t)$ в каждый момент времени t касается окружности C в точке $A(t)$ и направлена в положительную сторону (против часовой стрелки) при $\omega > 0$ и в противоположную сторону при $\omega < 0$; величина скорости равна $r|\omega|$ — ведь за время $\Delta t > 0$ полярный угол точки $A(t)$ по отношению к полюсу O (при произвольном выборе начального луча) изменяется на $|\omega|\Delta t$ и точка $A(t)$ проходит дугу окружности C длины $\Delta s = r|\omega|\Delta t$. Иными словами, вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ получается из $\overrightarrow{A(t)}$ поворотом на $90°$ в положительном или отрицательном направлении и умножением на ω. Когда $A(t)$ пробегает некоторую дугу J окружности C, конец $V(t)$

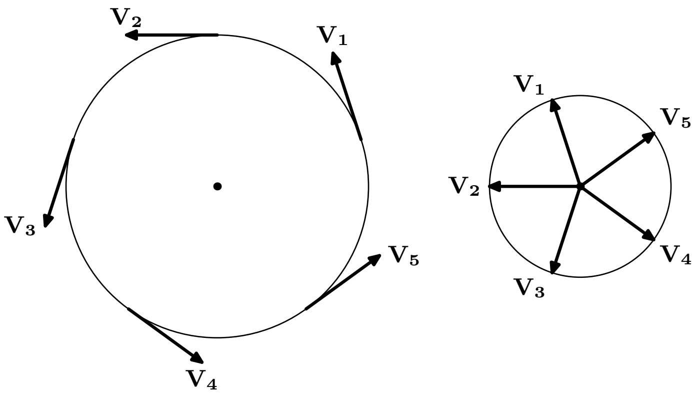


Рис. 43

вектора $\mathbf{v}(t)$, отложенного от принятого при построении годографа начала отсчёта O_1 (оно может и не совпадать с O), пробегает дугу J_1 окружности C_1 радиуса $r\omega$ с центром в O_1; по сравнению с J эта дуга повёрнута на $90°$. Ускорение точки $A(t)$, т. е. скорость изменения её скорости, совпадает со скоростью движения точки $V(t)$; оно в свою очередь пробегает дугу J_2 окружности C_2 радиуса $\omega \cdot \omega r = \omega^2 r$. Направление ускорения получается из направления вектора $\overrightarrow{OA}$ поворотом два раза на $90°$ в одну и ту же сторону, так что в результате получается поворот на $180°$. Значит, ускорение направлено противоположно вектору $\overrightarrow{OA}$ — от A к O, т. е. является центростремительным. Такое описание ускорения при равномерном круговом движении опубликовал Гюйгенс в 1673 г.; Ньютону, по-видимому, оно к тому времени уже было известно.

Упражнение 4.6. В конце § 3 были введены векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$, связанные с системой полярных координат. Эти векторы бывают различными в различных точках $(x,\, y)$, но они совпадают для точек, лежащих на одном луче, начинающемся в полюсе O, так что их можно считать зависящими только от полярного угла φ:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\varphi) = (\cos\varphi,\, \sin\varphi), \qquad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = (-\sin\varphi,\, \cos\varphi).$$

Угол φ мы будем измерять в радианах[7]. Рассмотрим изменение векторов $\mathbf{e}_r(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ с изменением φ. (Можно сказать, что сейчас φ есть «время».) Откладывая эти векторы от полюса O, можно считать, что конец $P = P(\varphi)$ вектора $\mathbf{e}_r(\varphi)$ движется с единичной скоростью по окружности единичного радиуса C с центром в O, а конец

[7]Напомню, что угол в α радиан — это центральный угол, стягивающий дугу единичной окружности C, имеющую длину α. (Когда угол больше «развёрнутого» угла, имеющего градусную меру $180°$, нужны некоторые уточнения насчёт смысла понятия «угол», но они не зависят от того, измеряем ли мы угол в градусах или радианах, так что я считаю их более или менее известными.) «Полный угол» (в градусной мере $360°$) в радианах равен 2π (он «стягивает» всю окружность C), «развёрнутый угол» — π, прямой угол — $\pi/2$.

вектора $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ есть $P(\varphi+\pi/2)$. Рассматривая $d\mathbf{e}_r(\varphi)/d\varphi$ как скорость движения точки $P(\varphi)$, сделайте вывод, что вектор-функции $\mathbf{e}_r(\varphi)$ и $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ дифференцируемы, причём

$$\frac{d\mathbf{e}_r(\varphi)}{d\varphi}=\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\qquad \frac{d\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{d\varphi}=-\mathbf{e}_r(\varphi). \tag{22}$$

Что можно сказать о производных функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$? Покажите, что, в частности,

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1.$$

Когда мы рассматриваем движение точки A, пользуясь полярными координатами, то вектор её скорости $\mathbf{v}$ мы характеризуем его радиальной и угловой компонентами v_r и v_φ. (Напомню, что они получаются при проектировании $\mathbf{v}$ на прямую OA и другую прямую, которая касается окружности $r=\mathrm{const}$ в точке A. При этом подразумевается, что A не находится в полюсе. Поэтому прямая OA однозначно определена.) Эти компоненты имеют следующий смысл:

$$v_r=\dot r=\textit{скорость изменения } r. \tag{23}$$

В основной части нашего текста это нам не понадобится, но это столь простой и наглядный факт, что его полезно иметь в виду, даже не вникая в доказательство, которое приводится ниже[8]. Об угловой компоненте v_φ, выражаясь наглядно, хотя и не точно, можно сказать, что это как бы та часть скорости, которая обуславливает изменение направления от O к A, т. е. угла φ. Скорость изменения угла φ — это угловая скорость ω; оказывается,

$$v_\varphi=r\omega. \tag{24}$$

Докажем равенство (23) для какого-нибудь момента времени t_0. Введём на минуту декартову систему координат с началом в O и положительной полуосью Ox, направленной от O к $A(t_0)$. Тогда $\mathbf{r}=(x,\,y)$, $r^2=x^2+y^2$ и

$$r\dot r=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}r^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)=x\dot x+y\dot y.$$

Но когда $t=t_0$, то $y=0$, $x=r$ и v_x — это проекция вектора $\mathbf{v}$ на прямую $OA(t_0)$, так что в этот момент $v_x=v_r$. Получается, что $r\dot r=rv_r$ при $t=t_0$. Отсюда и следует равенство (23) для $t=t_0$ (сокращение на r возможно, ибо $r\neq 0$, — как уже говорилось, $A(t_0)$ не находится в полюсе). А так как t_0 могло быть любым, равенство (23) справедливо во все моменты времени.

Замечание 4.1. При большом педантизме здесь можно спросить, существует ли производная dr/dt, если известно, что $r\neq 0$ и что существует скорость $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$

[8] Если пользоваться векторным исчислением, то всё сводится к тому, что, обозначая скалярное произведение с помощью угловых скобок, имеем

$$r\dot r=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\mathbf{r},\,\mathbf{r}\rangle=\frac{1}{2}\cdot 2\langle\mathbf{r},\,\dot{\mathbf{r}}\rangle=\langle\mathbf{r},\,\mathbf{v}\rangle==r\cdot(\text{проекция } \mathbf{v} \text{ на прямую } OA)=rv_r.$$

(уж её-то существование подразумевается, раз мы говорим о проекции скорости на прямую OA). Ответ: у функции $r^2 = x^2 + y^2$ заведомо существует производная по t (это сводится к дифференцируемости x и y — как?), а $r = \sqrt{r^2}$, и остаётся сослаться на упражнение 4.1 и теорему о производной сложной функции (в данном случае мы применяем её к $f(u) = \sqrt{u}$, $u(t) = x^2(t) + y^2(t)$).

Теперь остановимся на равенстве (24). При неравномерном движении по кругу радиуса r, отсчитывая пройденное расстояние $s(t)$ и полярный угол $\varphi(t)$ от некоторого начального луча, имеем $s = r\varphi$, $v = \dot{s} = r\dot{\varphi} = r\omega$, а так как в этом случае скорость $\mathbf{v}$ направлена по касательной к окружности радиуса $r =$const, мы получаем $v_r = 0$ и $v = v_\varphi$, откуда и следует равенство (24). (В школьном курсе физики точно так же доказывается, что $v = r\omega$ в частном случае равномерного кругового движения.) Если r может изменяться со временем (запись: $r \neq$const), то рассуждение оказывается несколько более сложным. Я объясню его идею, оставляя проработку деталей тем читателям, которым захочется потренироваться в умении доводить подобные рассуждения до конца (оставаясь при этом на сравнительно элементарном уровне).

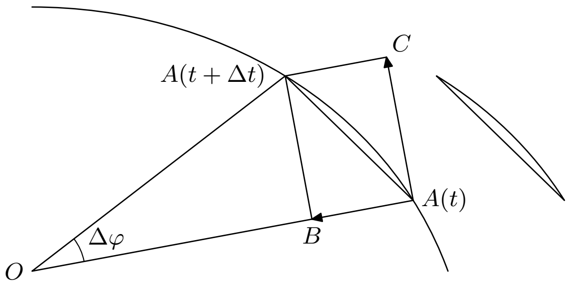


Рис. 44

Вектор $\overrightarrow{A(t)A(t+\Delta t)}$, изображающий смещение точки A за время от t до $t + \Delta t$, можно разложить на две компоненты $A(t)B$ и $A(t)C$, направленные соответственно по осям вспомогательной декартовой системы координат, привлекаемой для определения радиальной и угловой координат исходящего из $A(t)$ вектора, т. е. по $OA(t)$ и по касательной к окружности радиуса $r = |OA(t)|$ в точке $A(t)$. (Точки B и C, конечно, зависят от t и Δt, но мы не указываем на это в обозначениях.) С одной стороны, взяв $|A(t)C|$ с подходящим знаком (на касательной имеется положительное направление — отвечающее возрастанию φ) и обозначая полученную величину $\pm|A(t)C|$ через $A(t)C$, имеем $A(t)C \approx v_\varphi \Delta t$ (это получается непосредственно из определения v_φ: средняя скорость движения в направлении $A(t)C$ очень близка к v_φ при малых Δt). С другой стороны, $A(t)C \approx r\Delta\varphi \approx r\omega\Delta t$. (Первое приближенное равенство получается так:

$$|A(t)C| = |BA(t+\Delta t)| = |OA(t+\Delta t)| \sin \angle A(t+\Delta t)OB = |\mathbf{r}(t+\Delta t)| \sin|\Delta\varphi| \approx r(t)|\Delta\varphi|,$$

а кроме того, ясно, что $A(t)C$ имеет тот же знак, что и $\Delta\varphi$. Второе — следствие определения угловой скорости ω, согласно которому $\Delta\varphi \approx \omega\Delta t$.) Если бы все эти равенства были точными, мы сразу получили бы формулу (24). На самом деле они неточные, но ошибка при малых Δt настолько мала, что её отношение к Δt стремится к нулю при $\Delta t \to 0$, — как говорилось, это выражают словами: «ошибка является величиной, бесконечно малой по сравнению с Δt», и сокращённо записывают в виде

$$A(t)C - v_\varphi \Delta t = o(\Delta t), \qquad A(t)C - r\Delta\varphi = o(\Delta t), \qquad r\Delta\varphi - r\omega\Delta t = o(\Delta t).$$

Этого достаточно для доказательства равенства (24) — оно получается из равенства

$$v_\varphi \Delta t = r\omega \Delta t + o(\Delta t)$$

путём деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$.

Замечание 4.2. Утверждая при выводе формулы (24), что ошибка такой-то приближённой формулы, в которой фигурируют величины, зависящие от Δt, уменьшается при $\Delta t \to 0$, я надеялся в первую очередь на достаточную наглядность таких утверждений, но и точные доказательства не так уж сложны, только немного громоздки. Сказанное относится и к приводимому в следующем параграфе доказательству сохранения момента импульса (там я полного доказательства не даю). Мне кажется, что уж если читателю захочется иметь безукоризненно строгие рассуждения без всяких пробелов, то лучше не развивать их применительно к двум отдельным задачам, а ознакомиться с математическим анализом в объёме первой половины первого курса, после чего всё можно проделать в несколько строк, вовсе не прибегая к приближённым формулам с малыми Δt, а работая непосредственно с производными. (Тем более, что, во-первых, такое желание, скорее всего, свидетельствует о математических наклонностях и, во-вторых, знакомство с анализом даже в таком скромном объёме примерно в такой же степени расширяет возможности понимания природных закономерностей, как и знакомство с алгеброй.)

Упражнение 4.7 (для читателей, желающих попрактиковаться в применении теоремы Лейбница о производной произведения). Докажите заново формулы (23) и (24), дифференцируя равенство $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Указание. Используйте упражнение 4.6 и обе теоремы, охарактеризованные выше как «главные», т. е. теорему Лейбница и теорему о производной сложной функции.

Если данный ранее более элементарный вывод формул (23) и (24) требовал каких-то геометрических построений и, пожалуй, некоторой изобретательности, то в упражнении 4.7 предложена совершенно автоматическая выкладка. Это простой пример того, как алгебра и анализ упрощают жизнь. (При их использовании воображение, изобретательность и т. п. вовсе не упраздняются, но их надо мобилизовывать по более сложным поводам.)

Интеграл

Если бы Томсон-Кельвин спросил студентов, что такое интеграл, он бы, вероятно, тоже остался недоволен ответом в математическом духе и сказал бы: «Ах, бросьте вы этого Тодгентера, интеграл — это площадь!» Действительно, интеграл от функции $f(x)$ по отрезку от a до b (короче говорят «интеграл от a до b») — это площадь, заключённая между графиком этой функции на этом отрезке и самим отрезком оси Ox от a до b, причём там, где функция отрицательна (а график, стало быть, лежит ниже оси абсцисс), соответствующая площадь берётся со знаком «минус». Этот интеграл имеет специальное обозначение, наводящее трепет на непосвящённых:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

В случае, изображённом на рис. 45, $\int_a^b f(x)\,dx$ равен разности двух обычных (т. е. положительных) площадей, заштрихованных по-разному. Интегрирование (ещё одно страшное слово) — это вычисление интеграла.

У древних греков не только было интуитивное понятие о площади (всякому ясно, что площадь Афин больше площади деревни), но они отчётливо представляли себе, что площадь можно измерять количественно. Практически с достаточной точностью это умели делать и египтяне, греческие же математики смогли точно вычислить площадь ряда криволинейных фигур и поверхностей. С нашей точки зрения, при этом задача сводится к вычислению некоторых интегралов. Правда, редко бывает, чтобы в задаче о вычислении площади у нас с самого начала речь шла о такой именно фигуре, о какой мы говорим при определении понятия интеграла. Задачу ещё надо свести к задаче о вычислении какого-то интеграла. Све́дение может быть не таким уж простым, особенно если речь идёт о площади «изогнутой» поверхности; обычно оно требует некоторых геометрических построений и алгебраических преобразований, а пока не было алгебры, последние проделывались в громоздкой геометрической форме. (Зато, оказывается, вычисление объёмов тоже часто сводится к вычислению интегралов, что заранее кажется совсем уж странным — нам нужен объём, а мы вычисляем площадь некоторой вспомогательной фигуры.) Можно сказать, что у греков были «соображения интегрального характера», но общая идея интеграла была им чужда. Платон, скорее всего, признал бы её в корне порочной, сказав что-нибудь вроде того, что площадь не может быть отрицательной и что те, кто вместо поверхности сферы рассматривают площади каких-то надуманных вспомогательных фигур на плоскости или кто путают объёмы с площадями, суть невежды.

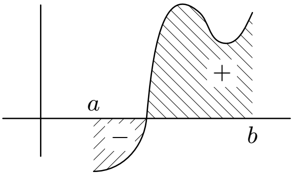


Рис. 45

Как же всё-таки поначалу даже не то что вычислить, а хотя бы определить поточнее, что такое этот самый интеграл? Разделим отрезок $[a,\, b]$ на n отрезков $[x_{i-1},\, x_i]$ с помощью системы точек деления

$$x_o = a < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b \tag{25}$$

и обозначим длину i-го отрезка через Δx_i (иными словами, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$). Если в пределах маленького отрезка функция $f(x)$ не слишком сильно меняется, то, выбрав в i-м отрезке произвольно какое-нибудь число ξ_i, можно сказать, что часть искомой площади, лежащая «над» или «под» i-м отрезком, — это примерно $f(\xi_i)\Delta x_i$. Вся же площадь приближённо равна так называемой «интегральной сумме»

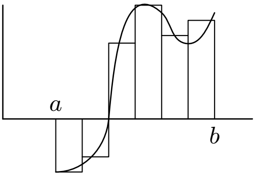


Рис. 46

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{26}$$

В интегральном исчислении доказывается, что если неограниченно измельчать разбиение отрезка $[a,\, b]$ (уменьшая все отрезки Δx_i и увеличивая их число), то для непрерывной функции $f(x)$ (равно как и для некоторых разрывных функций) интегральные суммы стремятся к некоторому пределу, который и называется интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$.

В других терминах можно сказать, что при интегрировании речь идёт об определении заряда, распределённого по прямолинейному отрезку $[a,\, b]$, если известна его линейная плотность $f(x)$ (т. е. если заряд любого малого отрезка $[x,\, x+\Delta x]$ равен $f(\xi)\Delta x + o(\Delta x)$, где ξ — любая точка этого малого отрезка). Ведь приближённо на i-м отрезке имеется заряд $f(\xi_i)\Delta x_i$, а весь суммарный заряд приближённо равен той же интегральной сумме (26). Поэтому ответ опять даётся интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$. Ответ, что интеграл — это суммарный заряд, вероятно, тоже удовлетворил бы Кельвина. (Я говорил о заряде, а не о массе, потому что заряд и его плотность вполне могут быть отрицательными. Если всюду $f \geqslant 0$, то можно сказать и так, что мы хотим найти суммарную величину массы, распределённой по отрезку с линейной плотностью f.)

Разумеется, здесь слова «масса», «заряд» — это не обязательно физические заряды и массы, а условные названия для любых величин, напоминающих физические заряды и массы по части своих свойств. Во всех этих случаях некоторое число сопоставляется не точке, а целой области (в зависимости от контекста, речь идёт об областях в пространстве, на поверхности или даже на линии, — в разговорном языке мы не говорим об областях на линии, но в математике о них говорят, имея в виду дуги этой линии или совокупности таковых). Мы ведь как раз и говорим о массе или заряде, распределённых в данной области. Можно сказать, что речь идёт о функциях от области, но отнюдь не произвольных, а, как говорят, аддитивных: если область A разбита на несколько частей A_1, A_2, $\ldots$, то значение аддитивной функции $F(A)$ для всей области равно сумме её значений для всех этих частей: $F(A) = F(A_1) + F(A_2) + \ldots$ (Сравните с массой или зарядом.) На самом деле здесь надо сделать целый ряд уточнений: что такое область, что такое её части (на теоретико-множественном языке A_i, конечно, суть подмножества A, но какие именно подмножества здесь можно рассматривать), сколько их — конечное или бесконечное число, как понимать сумму в последнем случае? А когда сделаны надлежащие уточнения, то оказывается, что некоторые (но отнюдь не все) аддитивные функции от области действительно выражаются как интегралы от некоторых обычных функций («функций точки»), которые называют плотностями этих функций области. В общем, здесь возникает столько вопросов, что всё это обычно проходят только на третьем курсе.

Замечательное открытие учителя Ньютона И. Барроу (1630—1677) состояло в том, что интегрирование по отрезку — это операция, обратная дифференцированию. Именно, будем менять число b в $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда наш интеграл станет некоторой функцией от b. Как установил Барроу,

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

В учебниках анализа эта — вернее, эквивалентная ей — формула традиционно называется «формулой Ньютона—Лейбница», хотя Ньютон на неё не претендовал. Лейбниц же претендовал не специально на эту формулу, а на создание всего математического анализа. Верно, что у Барроу была, собственно, не эта формула, а некое внешне иное, но эквивалентное ей утверждение геометрического характера (см., например, [7]). Удобные обозначения, используемые поныне, были действительно предложены Лейбницем. (Ньютон же при случае рисовал где-нибудь сбоку основного рисунка, отвечающего постановке рассматриваемой задачи, график той функции, к интегрированию которой он эту задачу сводил, и говорил о соответствующей площади.) В частности, после Лейбница стало возможно придать теореме Барроу как приведённую выше форму:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b),$$

так и другую форму, указанную ниже[9].

[9]Существует шутка, что если какое-то понятие, метод, теорема носит чьё-то имя, то уж этот-то человек почти наверняка не был автором данных понятия, метода или теоремы, хотя вполне мог иметь отношение к чему-то родственному.

Значение этого открытия состоит в следующем. Вычисление производных — сравнительно простое дело, для этого в дифференциальном исчислении имеются определённые правила. Легко составить таблицу функций $f(x)$, являющихся производными различных других функций $F(x)$. А тогда, как бы читая таблицу в другую сторону, можно по попавшей в неё функции $f(x)$ сразу определить соответствующую функцию $F(x)$, а отсюда уже недалеко и до интеграла от f: оказывается,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Именно эту формулу называют «формулой Ньютона—Лейбница».) Правда, не все функции $f(x)$ попадают в таблицу, но всё-таки она в огромной степени расширяет наши возможности и облегчает работу. Когда-то Архимед писал целые сочинения, посвящённые вычислению площадей и объёмов, а это сводится к вычислению некоторых интегралов, что, собственно, и делал Архимед, только у него вычисления имели громоздкую геометрическую форму. Теперь все его интегралы сразу можно найти с помощью таблицы! (Конечно, надо ещё свести рассматриваемую геометрическую задачу к вычислению интеграла. Но алгебра намного упрощает это сведéние.)

В этой книжке нам ни разу не понадобится вычислять интегралы. Но в приложении VII нам встретится нечто вроде того самого «суммарного заряда», которым по (предположительному) мнению Кельвина и является интеграл. Только там заряд будет распределён не по линии, а по поверхности. При математическом оформлении этой идеи возникает не интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, а так называемый интеграл по поверхности, с которым нам и придётся немного познакомиться. Кроме того, мы часто говорим о массе тела с такой-то плотностью, меняющейся от точки к точке; тогда суммарная масса фактически тоже является интегралом от этой плотности, только на сей раз это интеграл не по отрезку или поверхности, а по объёму. (Другое дело, что потом в ряде практически важных случаев удаётся свести дело к вычислению интеграла по отрезку.) Казалось бы, это ещё сложнее, однако на сей раз речь идёт о вполне привычной вещи.

§ 5. Второй закон Кеплера

Мы начнём с доказательства того, что в задаче Кеплера движение планеты P происходит в одной плоскости (или, как говорят, является плоским). В формулировке законов Кеплера, данном в § 1, это утверждение составляет часть I закона (ведь эллипс — плоская кривая). Но целесообразно рассмотреть в первую очередь II закон. Самим Кеплером он был открыт раньше I закона, при этом Кеплер установил и плоский характер движения; поэтому вначале утверждение, что движение происходит в одной плоскости, фактически составляло у Кеплера как бы часть II закона. Мы увидим, что при таком «чуть расширенном» понимании II закона (включающем утверждение о плоском характере движения) оказывается, что при движении материальной точки P в некотором поле (создаваемом неподвижным «силовым центром» S) этот закон имеет место тогда и только тогда, когда действующая на P сила всегда направлена по прямой SP. (Сектором, о котором идёт речь во II законе, естественно, является сектор, зачерчиваемый радиус-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{SP}$.) Непосредственно это относится, конечно, только к точкам орбиты P. Справедливость же II закона Кеплера для всех возможных орбит равносильна тому, что всюду (во всех точках пространства) сила направлена по SP. Такое силовое поле хотелось бы назвать «центральным» с центром S, но прочно установилось употребление этого названия только для частного случая, когда помимо сказанного величина силы зависит только от расстояния $|SP|$. Иными словами, в центральном поле сила, действующая на P, равна $f(r)\mathbf{e}$, где $f(r)$ — некоторая числовая функция[1] от числового аргумента $r = |\mathbf{r}|$ и $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$. Если же известно только, что сила направлена по SP, то сила, действующая на P, равна $f(\mathbf{r})\mathbf{e}$, где f — некоторая функция от векторного аргумента $\mathbf{r}$, т. е., вообще говоря, от всех трёх координат точки P. Общепринятого названия для таких полей не имеется — они не играют большой роли. Я буду называть их «квазицентральными». Для нас они представляют интерес только потому, что это суть в точности те поля, для которых II закон Кеплера выполняется для всех возможных орбит. Но для нас это только промежуточный результат: привлекая затем и I закон Кеплера, мы установим, что поле тяготения не только квазицентральное, но и центральное, и что, в предыдущих обозначениях, функция $f(r)$ обратно пропорциональна r^2 и отрицательна (последнее означает наличие притяжения к центру S, а не отталкивания от него).

---

[1] То есть функция, значения которой являются числами (а не векторами или чем-нибудь ещё).

В [47] Ньютон доказывал одновременно и плоский характер движения, и собственно II закон Кеплера (книга I, раздел под двойным названием «Предложение I. Теорема I»). Его соображения таковы.

Ньютон приближённо заменяет движение P по орбите движением, происходящим следующим образом. В течение некоторого промежутка времени от t до $t + \Delta t$ планета P движется по инерции, как если бы никакие силы на неё не действовали, т. е. всё это время её скорость равна $\mathbf{v}(t)$. Затем как бы включается на один момент бесконечно большая центростремительная сила, что приводит к мгновенному изменению скорости $\mathbf{v}$ по направлению к S или от S. Изменение скорости равно

$$(\textit{ускорение в точке } P(t + \Delta t))\Delta t.$$

Затем опять в течение такого же промежутка времени длительности Δt происходит движение по инерции, в последний момент опять мгновенно изменяется скорость (по направлению к S или от S), и т. д. Такое движение происходит по некоторой ломаной линии L (зависящей от Δt). Ясно, что в течение времени от t до $t + \Delta t$ планета находится в плоскости Π, содержащей радиус-вектор $\overrightarrow{SP}$ начального положения планеты и вектор её скорости в начальный момент. Изменение скорости в момент $t + \Delta t$, будучи направлено к S, тоже лежит в этой плоскости. Значит, и скорость $\mathbf{v}(t + \Delta t)$, которая будет у планеты после этого изменения скорости, лежит в Π. Раз так, то и в течение времени от $t + \Delta t$ до $t + 2\Delta t$ движение происходит в плоскости Π, и т. д. Шаг за шагом получаем, что звенья ломаной L лежат в Π: если это уже доказано для какого-то звена, то в его конце происходит изменение скорости, которое направлено к S, поэтому изменённая скорость — та скорость, с которой планета проходит следующее звено, — лежит в Π; понятно, что тогда и это следующее звено лежит в Π. Ньютон отмечает также, что площади треугольников, ограниченных звеньями ломаной L вместе вместе с радиус-векторами их концов, равны друг другу. (Здесь я не буду этого пояснять, потому что в конечном счёте утверждение о площадях нам не понадобится — оно связано с сохранением момента импульса, к которому мы позднее подойдём иначе.) Ньютон указывает, что если уменьшать Δt и соответственно увеличивать число рассматриваемых промежутков времени (а также, добавлю, должным образом подби-

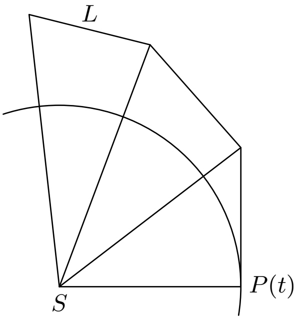


Рис. 47

рать скачки скорости, уменьшающиеся вместе с Δt), то полученные ломаные L дадут в пределе настоящую орбиту точки P (и, добавлю, рассмотренный процесс движения P по L в пределе даст настоящее движение P по орбите, — Ньютон это молчаливо подразумевает). Отсюда следует как то, что орбита тоже лежит в плоскости П, так и то, что площадь, заметаемая вектором $\overrightarrow{SP}$, пропорциональна времени.

По существу, Ньютон прав, но так ли уж это очевидно, что не нуждается ни в каких пояснениях? Профессиональному математику 2000 г. это действительно очевидно ввиду его знаний и опыта (но насчёт его коллеги образца 1700 г. я не так уверен). «Очевидно» в данном случае означает следующее: ему сразу ясно, что при необходимости он быстро сможет довести рассуждения Ньютона до исчерпывающего доказательства, хотя оно получится не таким уж коротким. Думаю, что я смог бы это сделать на II курсе, но не уверен, что смог бы на I.

Ниже я докажу, что движение является плоским, используя другие соображения, — это будет намного короче, чем исчерпывающее оформление доводов Ньютона. После этого я отдельно займусь собственно II законом Кеплера. При его выводе до некоторой степени будет использоваться идея Ньютона, что реальное движение в течение малого промежутка времени приближённо представляется как комбинация прямолинейного движения по инерции и некоторой его «корректировки» по направлению к S. Однако оформлено это будет иначе.

Плоское движение

В первую очередь мы установим, что движение в любом квазицентральном поле (а не только в поле, описываемом ньютоновским законом тяготения) является плоским. В таком поле

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{27}$$

где f — некоторая числовая функция своего аргумента. В левой части равенства (27) стоит ускорение материальной точки P с радиус-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{SP}$. Если умножить обе части на массу m этой материальной точки, то левая часть должна будет равняться действующей на P силе, и тогда правая часть будет выражать ровно то, что сила направлена по прямой SP.

Итак, пусть P движется в квазицентральном поле с центром S. Пусть в начальный момент времени t_0 (который сейчас может быть каким угодно) планета находится в некоторой точке P_0 и имеет скорость $\mathbf{v}_0$. Как можно было бы найти ту плоскость П, в которой должно происходить движение? Она должна содержать точку P_0 и исходящие из неё вектор скорости $\mathbf{v}_0$ и вектор ускорения $\mathbf{w}_0$. Значит, она содержит прямую P_0S (не будем вдаваться в педантизм и останавливаться на том, что будет, если в некоторых точках $\mathbf{w} = 0$, тем более что в нашем случае — притяжение по закону всемирного тяготения — это заведомо не так), а потому и точку S. Обратно, если плоскость П должна содержать Солнце, планету и скорость планеты, то она тем самым однозначно определена, за исключением особого случая, когда скорость направлена по прямой SP_0. На самом деле этот исключительный случай является простым; я не буду на нём останавливаться просто ради экономии места. Таким образом, плоскость П полностью определена, если известны «начальные данные» — P_0 и $\mathbf{v}_0$ (что касается центра S, то мы с самого начала поместили его в «начало отсчёта»). Не может ли планета $P(t)$ со временем выйти из П?

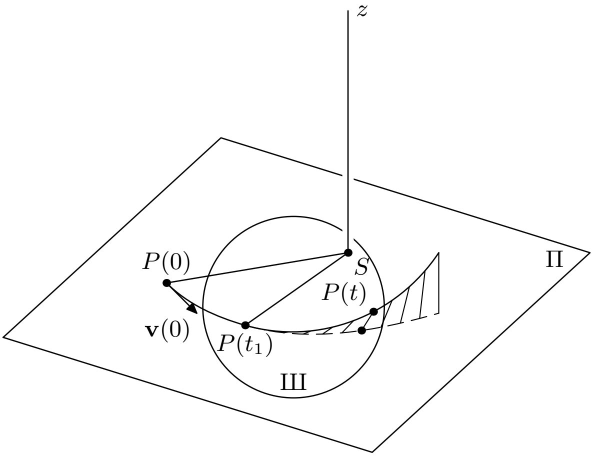


Рис. 48

Возьмём какую-нибудь декартову систему координат, начало которой O совпадает с S, а оси x и y лежат в плоскости П, так что эта плоскость задаётся уравнением $z=0$ (т. е. состоит из точек, для которых $z=0$). Мы хотим доказать, что третья координата точки $P(t)$ удовлетворяет условию

$$z(t)=0 \quad \text{при всех } t.$$

Мы ограничимся случаем $t>t_0$; для других t изменения в рассуждениях достаточно очевидны.

В течение некоторого времени после t_0 точка $P(t)$ может оставаться в П, но если допустить, будто со временем может оказаться, что $z(t)\neq 0$, то имеется такое $t_1 \geqslant t_0$, что $P(t)$ лежит в П для всех t между t_0 и t_1, тогда как сколь угодно близко к t_1 имеются такие $t>t_1$, что $z(t)\neq 0$. Если $t_1>t_0$, то из того, что $z(t)=0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, сразу следует, что

$$z(t_1)=0, \qquad \frac{dz(t_1)}{dt}=0 \tag{28}$$

(равенство нулю производной получается, если учесть, что в её определении можно брать отрицательные Δt). Если $t_0=t_1$, то равенства (28) обусловлены самим выбором П, при котором $P(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$ лежат в П. Обозначим $A=4|f(\mathbf{r}(t_1)|/|\mathbf{r}(t_1)|$. Существует такой шарик Ш с центром в $P(t_1)$, что когда точка P лежит в Ш, то $|f(\mathbf{r})|<2|f(\mathbf{r}(t_1))|$ и $|\mathbf{r}|>|\mathbf{r}(t_1)|/2$, так что при этом

$$\frac{|f(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}|}<A. \tag{29}$$

Так как движение точки $P(t)$ непрерывно, в течение некоторого времени после t_1 она $P(t)$ остаётся в Ш и, значит, для $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ выполняется неравенство (29).

Из векторного соотношения (27) следует, что

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{f(\mathbf{r}(t))|}{|\mathbf{r}(t)|}z(t).$$

Здесь дважды использовано такое соображение: скорость изменения координаты вектора в неподвижной декартовой системе координат равна соответствующей координате скорости изменения этого вектора. Сперва оно применяется к вектору $SP(t)$ и его координате $z(t)$, и это приводит к выводу, что dz/dt есть третья координата вектора скорости $\mathbf{v}$ точки $P(t)$. Второй раз оно применяется к этой самой координате этого вектора; получается, что d^2z/dt^2 есть третья координата вектора ускорения. Правая часть равенства (27) говорит нам, чему этот вектор равен. В ней $|f(\mathbf{r})|/|\mathbf{r}|$ — числовой множитель, а третья координата $\mathbf{r}(t)$ — это $z(t)$.

Ввиду неравенства (29) мы получаем

$$\left|\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right| \leqslant A|z(t)|, \qquad \textit{пока } P(t) \textit{ остаётся в } \text{Ш}.$$

Отсюда ясно, что пока $|z|$ мало, ускорение тоже мало. Легко догадаться, что мала и скорость $|dz/dt|$; это будет надлежащим образом уточнено. А тогда $|z|$ может увеличиваться только очень медленно — как мы увидим, на это требуется слишком много времени.

Приступаем к реализации этой идеи. Пусть $a > 0$ столь мало, что $|z(t)|$ принимает значение a ещё до выхода $P(t)$ из Ш. Пусть в первый раз это происходит при $t = \tau(a)$, так что $|z(t)| \leqslant a$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(a)$. Тогда при таких t будет выполняться равенство $|d^2z/dt^2| \leqslant Aa$. Раз при таких t скорость изменения величины $dz(t)/dt$ не превосходит Aa, то $dz(t)/dt$ за это время не может измениться более чем на $Aa(\tau(a) - t_1)$, так что ввиду соотношений (28) мы получаем $|dz(t)/dt| \leqslant Aa(\tau(a) - t_1)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau(a)$. Раз в течение этого интервала времени скорость изменения величины $z(t)$ не превосходит $Aa(\tau(a) - t_1)$, а в начале этого интервала $z = 0$ (см. формулы (28)), то аналогично получаем, что в течение данного интервала времени $|z(t)| \leqslant Aa(\tau(a) - t_1)^2$. Но $|z(\tau(a))| = a$, поэтому

$$a \leqslant Aa(\tau(a) - t_1)^2, \qquad \tau(a) - t_1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Число a здесь могло быть любым достаточно малым положительным. Получается, что после момента времени $t = t_1$ величина $z(t)$ не может принимать ненулевого значения, пока не пройдёт время $1/\sqrt{A}$. Однако раньше говорилось, что сколь угодно близко к t_1 имеются моменты времени $t > t_1$, для которых $z(t) \neq 0$. Выходит, что допущение, будто при каких-то $t > t_0$ будет выполняться неравенство $z(t) \neq 0$, привело нас к противоречию.

Сохранение момента импульса

Во II законе Кеплера (если его чуть перефразировать) говорится о площади $\sigma(t)$ сектора, заметаемого радиус-вектором планеты за время от некоторого начального момента t_0 до текущего момента времени t. Именно, говорится, что скорость изменения этой площади со временем (как говорят ещё, «секториальная скорость») постоянна: $\dot{\sigma} = \mathrm{const}$. Нет никакой простой формулы для площади $\sigma(t)$, но формула для скорости её изменения очень проста: в полярной системе координат в плоскости движения, имеющей полюс в S, выполняется равенство

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} r v_\varphi = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

Это опять-таки можно пояснить на рисунке, не давая точного доказательства (при котором мы увязли бы в предварительных вопросах вроде того, что такое площадь). Приращение $\Delta\sigma$ площади за время Δt приблизительно равно площади треугольника $\triangle SP(t)P(t+\Delta t)$. Действительно, интересующий нас сектор отличается от этого треугольника только на «лунку», изображённую справа на рис. 44 (где движущаяся точка обозначена через $A(t)$). Отрезок $P(t)P(t+\Delta t)$ имеет длину порядка Δt, а «ширина» лунки, т. е. отклонение её криволинейной стороны от этого отрезка, стремится к нулю при $\Delta t \to 0$. Значит, площадь лунки есть $o(\Delta t)$. Между тем площадь треугольника $\triangle SP(t)P(t+\Delta t)$ приблизительно равна $rv_\varphi \Delta t/2$. «Приблизительно» здесь означает, что при уменьшении Δt ошибка убывает как $o(\Delta t)$, — почему? Окончательно $\Delta\sigma = rv_\varphi \Delta t/2 + o(\Delta t)$.

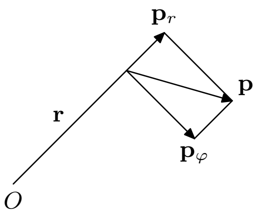


Рис. 49

Таким образом, II закон Кеплера устанавливает, что произведение $r^2\omega$ равно некоторой постоянной (не меняющейся со временем) величине M. По понятной причине её традиционно называют «постоянной площадей», но физически лучше связывать её с физической величиной — моментом $\text{Мом}_O \mathbf{p}$ импульса $\mathbf{p} = m_P \mathbf{v}$ движущейся материальной точки P (имеющей массу m_P) относительно точки O. В данном случае, когда мы имеем дело с плоским движением, он определяется как

$$rp_\varphi = m_P r v_\varphi = m_P r^2 \omega = 2 m_P \dot{\sigma},$$

где p_φ — угловая компонента импульса (подразумевается использование полярных координат с полюсом в O)[2]. Это определение носит общий

[2]Обратите внимание на то, что момент зависит не только от импульса $\mathbf{p}$, но и от положения материальной точки P, импульсом которой является $\mathbf{p}$. Говоря более абстрактно, в определении момента $\mathbf{p}$ нельзя заменить на равный ему вектор с другим началом, т. е. нельзя переносить $\mathbf{p}$ в любую другую точку. Момент при перенесении $\mathbf{p}$ не изменится, только если переносить $\mathbf{p}$ вдоль прямой, проходящей через P и имеющей то же направление, что и $\mathbf{p}$. С этим связано другое определение момента: с точностью до знака, уточнить который предоставляется читателю, он равен произведению ph величины $p = |\mathbf{p}|$ вектора импульса и расстояния h от O до указанной прямой.

Синонимами названия «момент импульса» являются «момент количества движения», «вращательный момент». В англоязычной литературе импульсы называются «моментами» (что, кстати, соответствует первоначальному смыслу латинского слова характер в том смысле, что здесь O может быть какой угодно «точкой отсчёта», не обязательно центром притяжения, да и сила, действующая на P, не обязана быть направленной всё время к некоторому «центру» S или от него. Но в задаче Кеплера при $O = S$ оказывается, что момент не меняется со временем. С физической точки зрения постоянная площадей $M = \text{Мом}_S \mathbf{p}/m_P$. Мы, однако, обычно исключаем массу планеты из рассмотрения (как это сделано, например, в формуле (2)), пользуясь только кинематическими величинами (включая, конечно, и чисто геометрические), поэтому мы будем пользоваться именно постоянной площадей M.

Помимо момента импульса, в механике вводят ещё момент силы. По-прежнему считая, что движение точки P под действием силы $\mathbf{F}$ происходит в плоскости Π, так что и сила, действуя на P, лежит в той же самой самой плоскости Π, определяют момент силы $\mathbf{F}$ относительно лежащей в Π точки O («полюса») как rF_φ, где F_φ — угловая компонента вектора $\mathbf{F}$ (отложенного от P) в полярной системе координат с полюсом в O, а $r = |OP|$. Как мы увидим, из законов механики следует, что

$$\frac{d\text{Мом}_O \mathbf{p}}{dt} = \text{Мом}_O \mathbf{F}. \tag{30}$$

В частности, если P движется в квазицентральном поле и полюс O совпадает с центром S этого поля, то $F_\varphi = 0$, $\text{Мом}_O \mathbf{F} = 0$ и $\text{Мом}_O \mathbf{p}$ сохраняется (не меняется со временем). Обратно, если момент импульса сохраняется, то $\text{Мом}_O \mathbf{F} = 0$, $F_\varphi = 0$, т. е. сила, действующая на P, направлена вдоль OP. Если $\text{Мом}_O \mathbf{p} = \text{const}$ при любом движении в данном поле, то получается, что во всех точках P сила направлена по прямой OP, т. е. поле квазицентральное с центром в O. Таким образом, II закон Кеплера эквивалентен тому, что поле тяготения Солнца квазицентральное.

Уравнение (30) можно рассматривать как проявление общего физического закона. Понятие вращательного момента определяется не только для плоского движения точки P, как у нас, но и в гораздо более общем случае, даже вне рамок механики (например, для электромагнитного поля; у элементарных частиц тоже имеется нечто вроде вращательного момента — так называемый «спин»). В общем случае это уже не число, а некоторый вектор $\mathbf{M}$[3]. Изменение вектора момента импульса определённым образом вызывается только внешними воздействиями

momentum — «движущее начало»). Говорить о моменте момента было бы неловко, но нет никаких неприятностей с «вращательным моментом».

[3]В рамках механики можно сказать, что координаты этого вектора M_x, M_y, M_z суть так называемые моменты вектора импульса относительно трёх координатных осей Ox, Oy, Oz, а определение момента вектора (не обязательно вектора импульса)

(в механике они характеризуются суммой моментов действующих на нашу систему внешних сил, а в других случаях это делается иначе); при их отсутствии момент сохраняется. Если мы имеем точное математическое описание рассматриваемых физических процессов, то утверждение об изменении или сохранении вращательного момента оказывается теоремой. Иногда для доказательства этой теоремы не надо иметь подобного точного описания, а достаточно знать только некоторые существенные свойства, которые должны быть присущи такому описанию. (Так, мы докажем сохранение момента для любого квазицентрального поля сил, не зная точного выражения для фигурирующей в уравнении (27) функции f.) В некоторых случаях теоремы у нас нет, так как нет надлежащих сведений о процессе, но зато имеется экспериментальный факт, что момент изменяется в соответствии со сказанным.

Если мы считаем, что утверждение о вращательном моменте — это общий закон природы, то имеет ли смысл доказывать его для различных частных случаев, для которых мы имеем соответствующую математическую теорию? Имеет. Во-первых, откуда бы мы взяли этот закон, не убедившись в его справедливости в различных случаях? А проверка его справедливости в одних случаях может быть экспериментальной, а в других — теоретической. (Например, экспериментировать с небесными телами «несколько затруднительно». Мы, правда, имеем

относительно данной оси l похоже на приведённое выше определение момента M в «плоском случае» — это есть момент M проекции данного вектора на плоскость, перпендикулярную l, относительно точки пересечения П с l. (Результат не зависит от того, какую именно из плоскостей, перпендикулярных l, использовать в качестве П: из рис. 50 понятно, что p_φ и r получаются одинаковыми при любом выборе П. А когда «всё происходит» в плоскости x, y, то M оказывается моментом относительно оси Oz.) В векторном исчислении приводится выражение для $\mathbf{M}$ с помощью операции векторного произведения векторов.

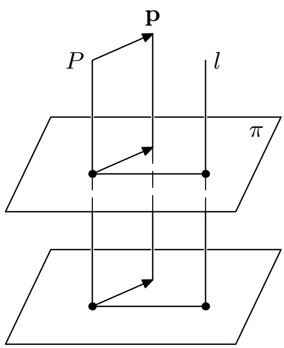


Рис. 50

II закон Кеплера, эквивалентный сохранению момента импульса в соответствующей ситуации, но ведь законы Кеплера не являются вполне точными — они связаны с пренебрежением эффектами, вызываемыми взаимным притяжением планет. А вот из законов механики Ньютона, включая закон всемирного тяготения, можно вывести сохранение суммарного вращательного момента в системе небесных тел, отнюдь не ограничиваясь учётом одного только притяжения Солнца.) И, во-вторых, если уж мы твёрдо уверены в справедливости данного закона, то проверка его применительно к конкретной математически сформулированной ситуации означает, может быть, не столько его проверку, сколько проверку правильности нашего математического описания этой ситуации, — может быть, при описании мы что-то упустили из виду, вот у нас и вышло, будто нарушается некий общий закон природы?

Вернёмся к нашей задаче. Хотя физически важными величинами являются момент импульса $\text{Мом}_O\mathbf{p}$ и момент силы $\text{Мом}_O\mathbf{F}$, но в доказательстве формулы (30) проще говорить о «моменте скорости» $\text{Мом}_O\mathbf{v}$ и «моменте ускорения» $\text{Мом}_O\mathbf{w}$, которые определяются так же, как моменты импульса или силы, т. е. в понятных обозначениях равны соответственно rv_φ и rw_φ. Ясно, что $\text{Мом}_O\mathbf{p} = m_P\text{Мом}_O\mathbf{v}$ и $\text{Мом}_O\mathbf{F} = m_P\text{Мом}_O\mathbf{w}$, где m_P — масса рассматриваемой материальной точки (здесь мы как раз и используем второй закон Ньютона, согласно которому $\mathbf{F} = m_P\mathbf{w}$). Поэтому соотношение (30) эквивалентно математически чуть более простому соотношению

$$\frac{d\text{Мом}_O\mathbf{v}}{dt} = \text{Мом}_O\mathbf{w} = rw_\varphi. \tag{31}$$

В вузовском курсе механики с помощью аналитической геометрии выводят формулу для $\text{Мом}_O\mathbf{v}$ в терминах декартовых координат движущейся точки и декартовых координат её скорости[4], а затем с помощью дифференциального исчисления находят производную этого выражения по времени. Для тех, кто владеет соответствующим аппаратом, это совсем просто. Тем же, кто им не владеет, могут быть ближе следующие соображения.

Угловая компонента скорости v_φ зависит не только от $\mathbf{v}$, но и от направления прямой, перпендикулярной радиус-вектору $\mathbf{v} = \overrightarrow{SP}$, т. е., в конечном счёте, от полярного угла φ. Таким образом, изменение $\text{Мом}_O\mathbf{v}$ зависит от трёх факторов: изменения r, изменения φ и изменения $\mathbf{v}$. Эти факторы действуют совместно, но я сперва рассмотрю совместное действие первых двух факторов, а затем — отдельно дей-

[4]Ответ: $\text{Мом}_O\mathbf{v} = xv_y - yv_x$, где $(x,\, y)$ — координаты нашей материальной точки, $(v_x,\, v_y)$ — координаты вектора $\mathbf{v}$.

ствие третьего. Мы увидим, что при совместном действии первых двух факторов $\text{Мом}_O\mathbf{v}$ не меняется (можно сказать, что влияние одного фактора компенсируется влиянием другого). Что же до третьего фактора, то если бы он действовал отдельно, то сразу получилось бы равенство (31) (см. ниже).

Строго говоря, это ещё не будет доказывать равенство (31), потому что ведь далеко не всегда в результате совместного действия трёх факторов получается сумма результатов действия первых двух факторов без третьего и отдельного действия одного только третьего фактора. Но оказывается, в нашем случае это так. Строгое доказательство формулы (31) требует либо применения дифференциального исчисления, либо более длинных элементарных рассуждений. При желании можно сказать, что существенная часть этого доказательства — это как раз проверка того, что действие указанных факторов можно в данном случае рассматривать по отдельности. При использовании дифференциального исчисления это автоматически содержится в соответствующих формулах[5]. При элементарном подходе приходится производить некоторые геометрические построения и указывать, что такие-то величины совпадают с точностью до величины более высокого порядка малости. Если читатель готов поверить, что это так и есть, то получится не так уж сложно, но в таком случае почему ему бы не поверить сказанному выше насчёт результата действия нескольких факторов? А если пытаться всякий раз доказывать, что разность таких-то величин действительно имеет более высокий порядок малости, чем они сами, это приведёт к непомерному удлинению рассуждений. (У Ньютона и его предшественников

[5]Читатель, знакомый с элементами дифференциального исчисления, поймёт, что речь идёт о формуле типа

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Она легко следует из того, что

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\Delta v + o(|\Delta u| + |\Delta v|).$$

Последнее соотношение справедливо, например, в области изменения переменных (u, v) вида $a < u < b$, $c < v < d$, если всюду в ней существуют и непрерывны частные производные $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$. Здесь имеется некоторая тонкость: как понимать $o(|\Delta u| + |\Delta v|)$, когда оцениваемая величина зависит ещё и от u и v? (Уточнение для подготовленного читателя: в данном случае надо указать (и доказать), что малость $o(|\Delta u| + |\Delta v|)$ равномерная по (u, v).)

Известная формула Лейбница для производной произведения является частным случаем с $f(u, v) = uv$, но обычно этот случай рассматривают раньше общего. Из предыдущего примечания видно, что при вычислении $d\text{Мом}_O\mathbf{v}/dt$ нужен только этот частный случай.

на базе богатого опыта развилась интуиция, при которой всё это они видели сразу. Но я обращаюсь к читателям с другой подготовкой.)

Если $\mathbf{v}$ не меняется, то это значит, что происходит равномерное прямолинейное движение. Утверждается, что при таком движении момент сохраняется, т. е. не меняется. Это сразу следует из перефразировки определения момента вектора (в данном случае — вектора $\mathbf{v}$) относительно центра O, уже упоминавшейся в одном подстрочном примечании: момент равен не только $rv_\varphi = \pm r|v_\varphi|$ (в обычных обозначениях; знак определяется привычным образом в зависимости от направления вращения вокруг O[6]), но и $\pm vh$, где $v = |\mathbf{v}|$, а h — расстояние от O до прямой линии, проходящей через точку приложения P вектора $\mathbf{v}$ и имеющей направление этого вектора; знак «$\pm$» тот же, что и выше. (Указанную прямую называют «линией действия» вектора $\mathbf{v}$, а также его «несущей прямой». Первое название происходит от того случая, когда $\mathbf{v}$ имеет физический смысл силы, а не скорости; по аналогии его употребляют и тогда, когда $\mathbf{v}$ не имеет такого смысла.) Действительно, простое геометрическое рассуждение показывает, что $|v_\varphi|/v = h/r$. (См. рис. 52, где вектор $\mathbf{v}$ отложен от точки P, V — конец этого вектора, V_1 — конец отложенного от P вектора $\mathbf{v}_\varphi$; H — основание перпендикуляра, опущенного из O на линию действия вектора $\mathbf{v}$; $h = |OH|$, $r = |OP|$. Очевидно, $\angle VPV_1 = \angle POH$ (почему?), поэтому прямоугольные треугольники VPV_1 и POH подобны.) При равномерном прямолинейном движении знак «$\pm$», h и v постоянны.

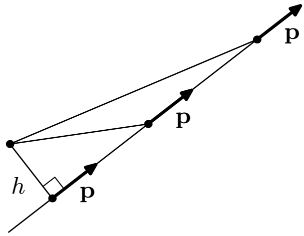


Рис. 51

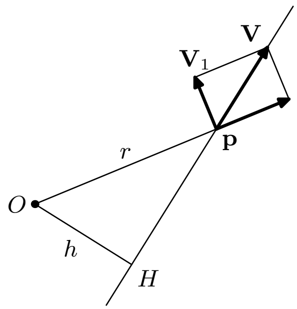


Рис. 52

В §§ 7, 8 мы часто будем пользоваться именно таким определением момента ($\pm vh$), поэтому удобно было бы иметь название для h. В астрономии и баллистике h называют прицельным параметром (подразумевается: прицельным параметром прямой L относительно центра O).

Теперь вообразим, что изменяется только $\mathbf{v}$, а r и φ не меняются, т. е. $\mathbf{r}$ есть постоянная величина, что записывают так: $\mathbf{r} = \text{const}$. Физи-

[6]Ради полного педантизма стоит ещё оговорить, что в том случае, когда скорость изменения угловой координаты $\dot\varphi = 0$, момент равен нулю.

чески предположение, что $\mathbf{v}$ меняется, а $\mathbf{r} = \mathrm{const}$, конечно, нереально: $\mathbf{r} = \mathrm{const}$ только при $\mathbf{v} = 0$. Но математическая постановка вопроса ясна: некий вектор $\mathbf{v}(t)$ при всех t откладывается от одной и той же точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$; верно ли, что тогда $d\text{Мом}_O\mathbf{v}/dt = \text{Мом}_O\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$? Раз $\mathbf{r} = \mathrm{const}$, то оси декартовых координат, направленные по вектору $\mathbf{r}$ и перпендикулярно к нему, не шевелятся и (v_r, v_φ) — это компоненты вектора $\mathbf{v}$ в некоторой неизменной декартовой системе координат. Тогда $dv_\varphi/dt = w_\varphi$, поскольку

$$\frac{d}{dt}(\textit{координата вектора } \mathbf{v}) = \textit{координата вектора } \mathbf{w}.$$

При вычислении drv_φ/dt постоянный множитель r можно вынести за знак производной. Вот и получается, что

$$\frac{d\text{Мом}_O\mathbf{v}}{dt} = r\frac{dv_\varphi}{dt} = rw_\varphi = \text{Мом}_O\mathbf{w}.$$

Ещё раз повторяю, что всё это скорее поясняет, чем доказывает формулу (31), но строгое доказательство по существу содержит сказанное, хотя и не сводится к нему. Проявляя оптимизм, я надеюсь, что теперь формула (31) не вызывает у читателя активного неприятия и что он готов согласиться с её следствием — сохранением момента в квазицентральном поле.

Уместно сделать одно замечание, связанное отчасти с самой постановкой задачи Кеплера. Материальная точка P, момент которой сохраняется, явно не является изолированной системой, — на неё действует внешняя сила (наше центральное поле). Мы знаем и даже в какой-то степени доказали, что момент точки P относительно S всё же сохраняется. Формально в этом нет противоречия, — мы же не утверждали, будто в неизолированной системе момент не может сохраняться, — но всё же хочется более физическим образом представить себе, почему же в нашем случае он сохраняется. В данном случае мы имеем изолированную систему, состоящую из P и S. Но это не совсем обычная механическая система — Солнце не двигается с места, несмотря на притяжение планеты; если мы всё-таки захотели бы рассматривать S как «материальную точку», то пришлось бы считать её массу бесконечной. Непонятно, что такое момент импульса такой точки. Поэтому не приходится говорить о сохранении суммарного момента в системе «$P + S$».

Наша задача возникла путём некоторой идеализации более реальной задачи, в которой масса Солнца m_S намного больше массы планеты m_P, но всё же конечна; об этом уже говорилось в § 1. Что при этой идеализации задача упрощается и что при ней мы имеем возможность говорить о движении планеты и можем рассчитывать, что оно будет близким к движению в более реальной задаче (с конечным m_S) — об этом уже говорилось. Но вот говорить о вращательном моменте

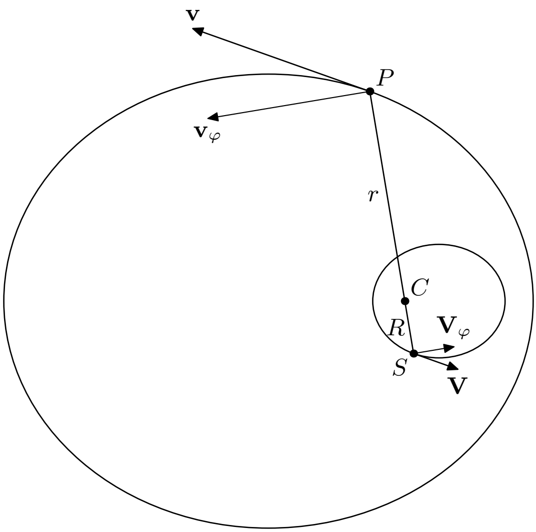


Рис. 53

всей системы «$P + S$» в идеализированной задаче мы пока что не можем. Что ж, сделаем шаг назад и посмотрим, как обстоит дело с моментом при конечном m_S.

В § 1 говорилось, что в этом случае и P, и S движутся по законам Кеплера по эллипсам, имеющим в одном из своих фокусов центр масс C Солнца и планеты. Используем инерциальную систему координат с началом в C. Точка C находится на прямой SP между S и P; отсюда следует, что угловая скорость ω планеты и Солнца одинакова. Пусть $R = |CS|$, $\mathbf{V}$ — скорость точки S, $r = |CP|$ и $\mathbf{v}$ — скорость точки P. По определению центра масс $m_S R = m_P r$ и $m_S\mathbf{V} + m_P\mathbf{v} = 0$. В частности, отношение R/r постоянно и равно m_P/m_S. Поэтому эллипсы (или иные конические сечения), по которым движутся P и S, подобны с коэффициентом пропорциональности r/R; подробнее, подвергнув первый эллипс гомотетии с центром в C и коэффициентом гомотетии r/R и повернув результат вокруг C на $180°$, получим второй эллипс. Отсюда видно, что $V_\varphi = (m_P/m_S)v_\varphi$ и

$$\text{Мом}_C m_S\mathbf{V} = m_S R V_\varphi = \frac{m_P}{m_S} m_P r v_\varphi = \frac{m_P}{m_S}\text{Мом}_C m_P\mathbf{v},$$

т. е. момент импульса планеты в m_P/m_S раз больше момента импульса Солнца. При большом m_S сумма этих моментов в основном сводится к моменту импульса планеты, а центр масс C близок к S, так что в задаче Кеплера надо считать, что момент импульса P относительно S — это и есть импульс всей изолированной системы «$P + S$». Оттого он и сохраняется.

§ 6. Первый и третий законы Кеплера

Самым трудным в выводе законов Кеплера является вывод I закона. Именно это было тем, чего не могли сделать современники Ньютона, а он сделал. После того как мы получим I закон, уже не составит труда вывести III закон. (На последнее в лекции у меня не хватило времени, но это уже не так важно.)

В той плоскости, в которой движется планета P, мы будем пользоваться и декартовыми координатами $(x,\, y)$ с началом координат в S, и полярными координатами $(r,\, \varphi)$ с полюсом в S; начальный луч будет совпадать с положительной полуосью оси абсцисс. При этом мы по-прежнему будем обозначать через M «постоянную площадей», получающуюся из закона сохранения момента импульса; таким образом,

$$r^2\omega = r\omega = M = \text{const}.$$

Мы исключим из рассмотрения специальный случай, когда $M = 0$. Скажу только, что, как показывает несложное исследование, в этом случае движение происходит по прямой, проходящей через центр притяжения, и планета либо падает на Солнце, либо улетает прочь от него[1]. Если такие планеты когда-нибудь и были, то они уже давно либо упали, либо улетели, так что в Солнечной системе таких планет нет. Заметим, что при $M \neq 0$ обязательно выполняется неравенство $\omega \neq 0$.

Приводимое простое доказательство утверждения «Ньютон $\Longrightarrow$ I закон Кеплера» основано на двух независимых идеях: вначале надо рассматривать только скорость $\mathbf{v} = (v_x,\, v_y)$ и то, как она изменяется при движении планеты; хотя во II законе Ньютона речь идёт об ускорении $\mathbf{w}$, т. е. о скорости $d\mathbf{v}/dt = \dot{\mathbf{v}}$ изменения $\mathbf{v}$ со временем, как это и записано в формуле (2), но мы перейдём от независимой переменной t к φ, т. е. постараемся выяснить, как зависит $\mathbf{v}$ от φ. Первая идея понятна, а по поводу второй обращаю внимание на то, что хотя мы будем рассматривать φ как новую независимую переменную, — так сказать, «вспомогательное искусственное время», — но скорость $\mathbf{v}$ — это настоящая скорость $d\mathbf{r}/dt$, а не $d\mathbf{r}/d\varphi$. Просто мы интересуемся, как скорость (повторяю, настоящая скорость) зависит не от t, а от φ. А ведь если бы

[1] Движение по прямой L, проходящей через S, возможно и при иных законах притяжения (или отталкивания), нежели в формуле (2), — лишь бы на прямой L сила была направлена вдоль L. Хотя для нас прямолинейное движение — это исключение, на которое мы не хотим тратить времени (тем более что этот случай не имел того исторического значения, какое имел вывод законов Кеплера из законов механики), но задачи о таком движении (с различными силами) имеют значение для других вопросов физики. Эти задачи исследуются сравнительно просто (проще, чем задача Кеплера), но требуют иного подхода, чем излагаемый в этой книге.

мы хотели заменить t на φ «во всех случаях жизни», то казалось бы естественным ввести в рассмотрение «вспомогательную искусственную скорость» $d\mathbf{r}/d\varphi$. В том, что мы этого не будем делать, проявляется известная «автономность» скорости как самостоятельной физической величины. Это едва ли более чем совпадение, но как раз автор излагаемого подхода к задаче Кеплера, Гамильтон, был тем, кто в других (намного более сложных) задачах первым отметил и систематически использовал эту «автономность скорости». Точнее говоря, и у Гамильтона, и в современной физике в качестве самостоятельной физической величины выступает не столько скорость, сколько импульс $\mathbf{p}$. У нас между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ имеется очень простая связь ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ с постоянным множителем m), так что нам это всё равно. В более сложных задачах может фигурировать, скажем, суммарный импульс всей физической системы или какой-то её подсистемы, и связь его с какими-то скоростями обычно не может быть столь же простой, ибо скорости различных частей нашей системы или подсистемы различны. (В этом примере можно связать импульс с некоторой «средней скоростью», но таковая не всегда будет физически осмысленной, она может оказаться чем-то вроде «средней температуры по больнице».) Вращательный момент тоже может играть важную роль, и он тоже не обязательно просто сводится к какой-то угловой скорости. Наконец, импульс может вообще не иметь прямого механического смысла (импульс электромагнитного поля). В подобных случаях на первый план выходят именно импульсы (и вращательные моменты).

Уравенение (2) — это, как говорят в математике, дифференциальное уравнение для $\mathbf{v}$ как функции независимой переменной t, т. е. оно характеризует скорость изменения $\mathbf{v}$ с изменением t; а надо перейти к дифференциальному уравнению, характеризующему зависимость $\mathbf{v}$ от φ. Обозначая дифференцирование по φ штрихом ($' = d/d\varphi$), ввиду формул (16) или (17) имеем

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}'\dot{\varphi} = \omega\mathbf{v}';$$

ввиду уже доказанного II закона Кеплера $r^2\omega = M$, так что $\omega = M/r^2$; таким образом, $\mathbf{v}' = r^2/M\dot{\mathbf{v}}$; и теперь уравнение (2) переписывается в виде

$$\mathbf{v}' = -\frac{k}{M}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{k}{M}\mathbf{e}_r.$$

Вот, собственно, и всё. Для координат v_x, v_y вектора $\mathbf{v}$ получаем

$$v_x' = -\frac{k}{M}\cos\varphi, \qquad v_y' = -\frac{k}{M}\sin\varphi. \tag{32}$$

Легко предъявить некоторое решение $\mathbf{u}(\varphi)$ этой системы дифференциальных уравнений, т. е. вектор-функцию, для которой выполняются соотношения (32). Оно таково: длина вектора $\mathbf{u}$ не зависит от φ и равна k/M, а его направление характеризуется полярным углом $\varphi + 90°$, т. е. это направление получается из направления вертикально вверх поворотом на угол φ в положительном направлении. (Можно ещё сказать, что $\mathbf{u} = (k/M)\mathbf{e}_\varphi$.) Действительно, когда φ возрастает, то $\varphi + 90°$ тоже возрастает, т. е. вектор $\mathbf{u}(\varphi)$ вращается по соответствующей окружности против часовой стрелки; скорость $\mathbf{w} := \mathbf{u}'$ изменения такого вектора $\mathbf{u}$ с изменением φ по величине равна k/M, а её направление характеризуется полярным углом $\varphi + 180°$, т. е. противоположно направлению с полярным углом φ. В правой же части равенств (32) как раз и стоят координаты именно такого вектора. (Можно ещё сказать, что ввиду равенств (22) мы имеем $\mathbf{u}' = -k/M\mathbf{e}_r$.) Итак, мы явно указали некоторый вектор (говоря подробнее, вектор-функцию) $\mathbf{u}(\varphi)$, производная которого по φ равна производной $\mathbf{v}'$. Однако вовсе не обязательно, чтобы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ совпадали; можно только сказать, что скорость $\mathbf{v}' - \mathbf{u}'$ изменения разности $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ равна нулю; значит, эта разность постоянна: $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v}_0$ — некоторый постоянный вектор. Откладывая все наши векторы от «начала отсчёта» S, получаем, что конец V вектора $\mathbf{v}$ изменяется на окружности радиуса k/M с центром в конце V_0 вектора $\mathbf{v}_0$. При этом направление вектора $\overrightarrow{SV}$ характеризуется полярным углом $\varphi + 90°$.

Мы поместили начало координат в точку S, но направления координатных осей пока были произвольными. Теперь введём новые координа-

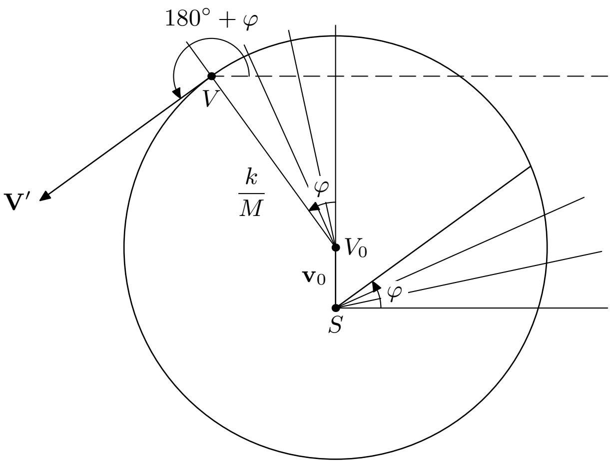


Рис. 54

ты с тем же началом координат и с таким направлением координатных осей, что точка V_0 попадает на положительную полуось ординат. Новая система координат получается поворотом осей прежней системы на некоторый угол φ (в положительном направлении; на самом деле поворот может происходить по часовой стрелке, но тогда мы считаем φ отрицательным). Годограф скорости сам по себе определяется совершенно независимо от того, какими координатами мы пользуемся; но в терминах новых координат можно сказать, что это окружность радиуса k/M с центром в точке V_0 оси ординат, расположенной над S на высоте $v_0 := |\mathbf{v}_0|$. В то же время предыдущие рассуждения можно провести и с использованием новых координат; тогда получится, что конец V вектора $\overrightarrow{SV} = \mathbf{v}(\varphi)$ (уже с новым полярным углом φ, отсчитываемым от новой положительной полуоси абсцисс) по-прежнему характеризуется тем, что направление вектора $\overrightarrow{V_0V}$ отвечает полярному углу $\varphi + 90°$. Этот вектор имеет координаты

$$v_x = -\frac{k}{M}\sin\varphi, \qquad v_y = v_0 + \frac{k}{M}\cos\varphi, \tag{33}$$

поэтому

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + \frac{k^2}{M^2} + \frac{2v_0k}{M}\cos\varphi. \tag{34}$$

Мы хотим найти v_φ, т. е. проекцию вектора $\mathbf{v}$ на прямую линию, перпендикулярную к радиус-вектору планеты. Направление этой линии (точнее, как раз того её луча, который направлен в сторону возрастания φ) характеризуется полярным углом $\varphi + 90°$. Таким же углом характеризуется и направление вектора $\overrightarrow{V_0V}$, поэтому проекция этого вектора на указанную прямую равна его длине со знаком плюс, т. е. k/M. Проекция же вектора $\overrightarrow{SV_0}$ равна $|SV_0|\cos\varphi = v_0\cos\varphi$ (ведь угол между этим вектором и положительным лучом нашей прямой есть φ). Сумма этих двух проекций и есть проекция всего вектора $\overrightarrow{SV}$. Итак,

$$v_\varphi = \frac{k}{M} + v_0\cos\varphi.$$

Остаётся ещё раз сослаться на уже доказанный II закон Кеплера в такой форме: $rv_\varphi = M$, и мы получим

$$r = \frac{M}{v_\varphi} = \frac{M}{k/M + v_0\cos\varphi} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где

$$e = \frac{v_0M}{k}, \tag{35}$$

$$p = \frac{M^2}{k}. \tag{36}$$

Это всегда коническое сечение. Оно является эллипсом тогда и только тогда, когда $e < 1$, т. е. $v_0 < k/M$. Оказывается, условие эллиптичности орбиты можно сформулировать в терминах важной физической величины — энергии E: орбита является эллипсом тогда и только тогда, когда $E < 0$.

В связи с этим надо отметить, что в задаче Кеплера энергия планеты не меняется со временем. Ниже я приведу несложное формальное доказательство, но сперва сделаю несколько замечаний исторического и общего характера. Факт сохранения энергии (т. е. то, что она не меняется с течением времени) в данной задаче был установлен (фактически уже Ньютоном) задолго до того, как был открыт общий физический закон сохранения энергии (распространяющийся и на процессы, не являющиеся механическими). Вначале имелась просто математическая теорема: в задаче Кеплера некая величина, которая будет указана ниже (и которую теперь называют энергией), остаётся постоянной во время движения; эта теорема оказалась полезной при исследовании данной задачи (см. часть 2 приложения VIII). Затем было установлено сохранение энергии в гораздо более общих изолированных механических системах (включая системы материальных точек с попарными взаимодействиями посредством центральных[2] полей), лишь бы в них не действовали силы сопротивления (типа трения) и не происходило неупругих столкновений. И далеко не сразу было понято, что и при наличии трения или неупругих столкновений энергия тоже не исчезает, только механическая (кинетическая и потенциальная) энергия переходит в тепло. Качественно это понимали многие (например, М. В. Ломоносов в середине XVIII века), но говорить о законе сохранения энергии можно только при наличии чётких количественных формулировок, охватывающих различные физические процессы (тепловые, электромагнитные, химические). Поэтому общий закон сохранения энергии был установлен усилиями ряда учёных лишь в середине XIX века.

Если, говоря о задаче Кеплера, мы ссылаемся на общий закон сохранения энергии, то можно спросить: энергия сохраняется в изолированной системе, но ведь планета отнюдь не является таковой, — на неё действует сила притяжения Солнца[3]; почему же в задаче Кеплера энергия планеты всё-таки сохраняется — имеет это какое-то отношение

[2]Именно центральных, а не квазицентральных.

[3]Впрочем, при желании можно сказать, что изолированной является система «планета плюс поле тяготения». А так как поле у нас не меняется, состояние системы

к сохранению энергии в изолированных системах или нет? Ситуация здесь аналогична ситуации с моментом. В задаче Кеплера бессмысленно ставить вопрос об энергии Солнца и, значит, об энергии всей системы «P плюс S», но при конечной массе Солнца m_S это возможно. Тогда мы имеем дело уже не с задачей Кеплера, а с задачей двух тел. В ней система «P плюс S» является изолированной (на неё не действуют никакие внешние силы), и потому полная механическая энергия этой системы сохраняется (это и математическая теорема, и проявление общего физического закона). Эта энергия является суммой трёх энергий: кинетической энергии планеты; кинетической энергии Солнца; потенциальной энергии взаимодействия. Будем мысленно увеличивать m_S, не меняя ни m_P, ни $k = fm_S$ (значит, f мы при этом уменьшаем). Можно доказать, что при очень большой массе m_S движения почти не отличаются от движений в «предельной» задаче Кеплера (отвечающей тому же самому k), а энергия системы, рассматриваемая в инерциальной системе отсчёта, связанной с центром масс, близка к энергии планеты P в задаче Кеплера. Последняя энергия — это сумма кинетической и потенциальной энергий планеты, причём потенциальная энергия в точности такая же, что и потенциальная энергия взаимодействия P и S в задаче двух тел; кинетическая энергия планеты, конечно, тоже та же. В полную энергию системы «P плюс S» входит ещё кинетическая энергия Солнца, но, оказывается, при большом m_S последняя составляет лишь малую долю от общей энергии системы двух тел.

В задаче Кеплера энергия E планеты, в понятных обозначениях, равна сумме[4] её кинетической энергии $m_P v^2/2$ и потенциальной энергии $U(r) = -km_P/r$. Мы хотим доказать, что при движении планеты не

полностью характеризуется состоянием планеты — её положением и скоростью. Всё же кажется странным исключать из системы Солнце («слона-то я и не заметил»).

[4]Это, вероятно, известно читателю из курса физики. (Может быть, известно не совсем это — известна потенциальная энергия в задаче двух тел: $U(r) = -fm_P m_S/r$. Переходя к задаче Кеплера, мы представляем себе, что M_S увеличивается, а f уменьшается и что при этом не меняется произведение $k = fm_S$. Энергия при этом остаётся равной $-km_P/r$.)

Я напомню только, почему энергия U отрицательна, — при первом знакомстве это кажется странным, ибо в обычных житейских представлениях энергия непременно положительна. Объяснение не требует формул. Когда планета очень далека от Солнца, так что взаимодействия между ними практически нет, энергия должна быть ничтожной. При неограниченном возрастании r она стремится к нулю. Если планета находится на некотором расстоянии r от Солнца и мы пожелаем удалить её «в бесконечность», то нам придётся затратить некоторую работу A, преодолевая притяжение к Солнцу; при этом потенциальная энергия увеличивается на A, а в результате она станет нулём; вот и получается, что U отрицательна.

меняется E; это равносильно тому, что не меняется «энергия на единицу массы» $E/m_P = v^2/2 - k/r$. Я позволю себе называть эту величину просто энергией и обозначать через E. Поскольку мы имеем «почти явные» формулы, описывающие движение[5], проверка сохранения E при движении сводится к несложным выкладкам, приводящим к выражению для E в терминах величин, непосредственно связанных с кривыми второго порядка (сейчас орбита не предполагается обязательно эллипсом).

Начнём с выражения (34) для v^2. Это не совсем то, что нам нужно, ибо в этом выражении фигурирует величина v_0^2, непосредственно связанная не с орбитой, а с годографом скорости. Но $v_0 = ek/M$ (см. равенство (35)), поэтому из формулы (34) следует, что

$$v^2 = \frac{e^2k^2}{M^2} + \frac{k^2}{M^2} + \frac{2ek^2}{M^2}\cos\varphi = (e^2+1)\frac{k}{p} + \frac{2ek}{p}\cos\varphi$$

(объединив два первых члена, мы затем воспользовались равенством (36)), а тогда, используя формулу (13), получаем

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{r} = (e^2+1)\frac{k}{2p} + \frac{ek}{p}\cos\varphi - \frac{k}{p}(1+e\cos\varphi) = (e^2-1)\frac{k}{2p}.$$

Полученная формула

$$E = (e^2-1)\frac{k}{2p} \tag{37}$$

не только доказывает сохранение энергии при движении, но и показывает, что при $E<0$ орбитой служит эллипс, при $E=0$ — парабола, а при $E>0$ — гипербола (т. е. ветвь гиперболы). Заметим, кстати (это понадобится только в § 8), что при $e \neq 1$ выполняется равенство

$$|E| = \frac{k}{2a} \tag{38}$$

(поскольку $p = a|1-e^2|$).

Собственно, здесь можно было бы спросить: а почему орбита не может быть только дугой эллипса, параболы или гиперболы? На эллипсе расстояние от его точек до S нигде не превосходит некоторого положительного числа ρ. Если, далее, допустить, что P движется по параболе или по ветви гиперболы, но при неограниченном возрастании или неограниченном убывании t не «уходит в бесконечность», то при всех $t \geqslant 0$ (соответственно при всех $t \leqslant 0$) расстояние r не превосходило

[5] «Совсем явными» они были бы, если бы была явно указана зависимость полярного угла φ материальной точки P от времени t. Но, с одной стороны, это выходит за рамки настоящей книжки (будучи на самом деле отнюдь не простым делом; собственно говоря, совсем уж явной формулы и нет, а вместо неё имеется некоторое соотношение между φ и t, см. замечание 6.2), а с другой стороны, при обсуждении ряда вопросов, включая рассматриваемый сейчас вопрос о сохранении энергии, не требуется совсем уж явных указаний относительно $\varphi(t)$.

бы некоторого положительного числа ρ. Поскольку при таком движении всё равно должен выполняться II закон Кеплера, всё это время мы имеем $\omega = M/r^2 \geqslant M/\rho^2$. А φ изменяется со скоростью ω, которая, выходит, не меньше некоторого положительного числа. Значит, в случае эллипса φ со временем неограниченно возрастает при неограниченном возрастании t и неограниченно убывает при неограниченном убывании t, а это означает, что P делает бесконечное число оборотов по эллипсу. В случае параболы или ветви гиперболы заключаем, что при сделанном допущении угол φ опять-таки должен неограниченно возрастать (соответственно неограниченно убывать). Но на этих кривых полярный угол изменяется только в некоторых конечных пределах, так что наше допущение привело к абсурду и тем самым опровергнуто.

Замечание 6.1. Сохранение энергии можно доказать и иначе, не пользуясь столь явными формулами. Убедимся сперва, что если ускорение $\mathbf{w}$ точки $P = P(t)$ направлено к центру S, $\mathbf{w} = w\mathbf{e}$ (где, как обычно, $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$), то[6]

$$\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = v_r w. \tag{39}$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (23). Чтобы доказать равенство (39), введём, как и тогда, декартову систему координат (x, y) с началом в S и положительной полуосью x, направленной от S к P. (При доказательстве формулы (23) были другие обозначения: O и A вместо теперешних S и P.) Тогда векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ имеют координаты $(\dot{x}, \dot{y}) = (v_x, v_y)$ и $(w_x, w_y) = (\dot{v}_x, \dot{v}_y)$,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y = v_x w_x + v_y w_y.$$

Но при $t = t_0$ ускорение направлено по оси x, так что $w_y(t_0) = 0$. А $v_x(t_0)$ равно проекции $\mathbf{v}(t_0)$ на ось $OP(t_0)$, т. е. на ось Ox, так что $v_x(t_0) = v_r(t_0)$. Вот и выходит, что при $t = t_0$ выполняется равенство (39).

А теперь посмотрим, чему равна скорость изменения k/r. Используем теорему о производной сложной функции, упражнение 4.1 и формулу (23):

$$\frac{d}{dt}\frac{k}{r} = k\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dt} = -k\frac{1}{r^2}\dot{r} = wv_r$$

(ведь в задаче Кеплера ускорение направлено к центру и равно по величине k/r^2, поэтому $w = -k/r^2$). Итак, у $v^2/2$ и k/r одинаковые производные по времени, поэтому $dE/dt = 0$.

Это рассуждение имеет, в сущности, более общий характер, чем предыдущее. С простым изменением оно относится к движению в любом центральном поле (см. начало § 5)[7]. Напомню, что в таком поле на материальную точку P действует центральная сила $f(r)\mathbf{e}$ (в обычных обозначениях: $\mathbf{r} = \overrightarrow{SP}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$). Как

[6] Если пользоваться векторным исчислением, это получается совсем просто:

$$\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\mathbf{v},\,\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}\cdot 2\langle\mathbf{v},\,\dot{\mathbf{v}}\rangle = \langle\mathbf{v},\,\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\,w\mathbf{e}\rangle =$$
$$= w\cdot(\text{проекция } \mathbf{v} \text{ на радиус-вектор}) = wv_r.$$

[7] Но именно поэтому оно не говорит ничего об эксцентриситете — это понятие относится к кривым второго порядка, а в общем случае орбита не обязана быть такой кривой.

можно доказать[8], существует такая функция $U(r)$ («потенциальная энергия P в данном поле»), что $f(r) = -dU(r)/dr$. Она определяется с точностью до постоянного слагаемого (производная от которого равна нулю), которое в различных конкретных случаях обычно выбирают каким-нибудь специальным образом.

Упражнение 6.1. Докажите, что при движении материальной точки P в центральном поле с потенциальной энергией $U(r)$ сохраняется «полная механическая энергия» $m_P v^2/2 + U(r)$.

Остаётся получить III закон Кеплера. За время T (период обращения) радиус-вектор планеты заметает всю площадь эллипса — её орбиты, т. е. площадь πab, где a и b, конечно, большая и малая полуоси. Но площадь заметается с постоянной скоростью $M/2$, так что за время T заметается площадь $MT/2$. Итак, $MT = 2\pi ab$,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{M^2} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{pk} = \frac{4\pi^2}{k} \frac{a^4(1-e^2)}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

Здесь использованы сперва формула (36), а затем соотношения (12).

Рассмотрим теперь две планеты. Периоды их обращения и большие полуоси связаны только что полученным соотношением: $T_i = (4\pi^2/k)a_i^3$. Так как множитель $4\pi^2/k$ для обеих планет одинаков, получается формула (1).

Замечание 6.2. Как было сказано в замечании 1.1, мы не будем детально вникать в то, как определить положение планеты P на её орбите в зависимости от времени t, ограничиваясь небольшими пояснениями насчёт этой задачи. Согласно II закону Кеплера и равенствам (13) мы получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2} = \frac{M}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2. \tag{40}$$

(Здесь подразумевается обычное расположение полярных координат: полюс — в S, начальная ось направлена к ближайшей вершине орбиты; предполагается также, что движение точки P происходит в положительном направлении, т. е. что при

[8] Действительно, произвольно выбрав «начальное расстояние» r_0, можно взять

$$U(r) = U_0 - \int_{r_0}^{r} f(\rho)\, d\rho$$

с любой константой U_0. Обратите внимание на то, что $U(r)$ является функцией от одной переменной, но когда r рассматривается как расстояние от точки P до S, то U тем самым становится функцией, определённой на плоскости (или в пространстве). Физически определение U означает, что в какой-нибудь точке P_0, отстоящей от центра S на расстояние r_0, мы принимаем значение U равным U_0, а значение U в другой точке P получается при уменьшении U_0 на работу, совершаемую действующей в нашем поле силой вдоль пути из P_0 в P. (По буквальному смыслу последней фразы, в ней идёт речь о величине $U = U(P)$, зависящей от точки P. Но оказывается, на самом деле U зависит только от r и определяется как раз написанной выше формулой. Это связано с тем фактом, что в центральном поле работа соответствующей силы вдоль пути зависит только от расстояния до S от начальной и конечной точек пути.)

этом движении возрастает φ[9], так что $M > 0$.) Выходит, что, каким бы ни был полярный угол φ, мы знаем, с какой скоростью он меняется. Интуитивно кажется, что тем самым полностью предписывается зависимость φ от t. Справедливо ли это впечатление и как эту зависимость найти (точно или приближённо)?

В математике имеется общая теорема «о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений», изучаемая в настоящее время на втором курсе. Уравнения (40) как раз и является дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $\varphi(t)$, и применение к нему этой общей теоремы гарантирует справедливость данного предположения. Но в ней можно убедиться и на более элементарном пути, используя конкретные свойства правой части уравнения (40) и (или) геометрическое и (или) кинематическое происхождение этого уравнения. При этом речь идёт уже не об одном только принципиальном факте, что уравнение (40) полностью определяет зависимость φ от t (если заранее задано, каким было φ в начальный момент времени), но и о том, как найти эту зависимость.

Так как мы начали с упоминания об общих соображениях, я буду продолжать двигаться от более общего к более частному. О совсем конкретных и довольно простых по формулировке фактах, связанных с уравнением (40), см. ниже. А пока что остановлюсь на соображениях, так сказать, «промежуточной степени общности», опирающихся на тот материал, который становится известным уже на первом курсе. Примем, что $\varphi = 0$ при $t = 0$ (иными словами, P в начальный момент времени находится в перигелии[10]); это просто соглашение о выборе начального момента времени. Тогда из уравнения (40) следует, что

$$\frac{M}{p^2} = \frac{\dot\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2},$$

а правая часть здесь равна производной по времени

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\psi}{(1+\cos\psi)^2},$$

потому что эта производная равна произведению производной интеграла по φ (которая есть просто значение интегрируемой функции при $\psi = \varphi$) на $\dot\varphi$. Учитывая, что при $t = 0$ интеграл сводится к $\displaystyle\int_0^0 = 0$, приходим к выводу, что

$$t = \frac{p^2}{M}\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + e\cos\psi)^2}. \tag{41}$$

На первом курсе студентов учат вычислять такие (и, конечно, многие другие) интегралы. К сожалению, при $e \neq 1$ как вычисление, так и ответ являются довольно громоздкими. Но при $e = 1$ (движение по параболе) всё не так уж сложно, и я могу

---

[9]Можно условиться считать положительным как раз то направление, в котором движется P. (В зависимости от того, с какой стороны смотреть на ту плоскость, где расположена орбита, направление вращения против часовой стрелки будет то одним, то другим. Поэтому не надо даже отказываться от соглашения, что положительным направлением считается направление против часовой стрелки.)

[10]Так называют ближайшую к Солнцу S точку эллипса или иной орбиты; это её вершина (одна из её вершин, если орбита является эллипсом). Когда речь идёт о спутнике Земли и соответственно S — Земля, то вместо перигелия говорят о перигее. Названия происходят от латинских peri — около и hēlios или gē — Солнце и Земля.)

привести ответ:

$$t = \frac{p^2}{2M}\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\Big). \tag{42}$$

Обсудим, чего мы достигли. Нам надо выразить φ через t, а мы, наоборот, получили выражение для t через φ. Обозначая правую часть равенства (42) через $t(\varphi)$, получаем, что связь между t и φ такова: $t = t(\varphi)$. Анализируя явное выражение для $t(\varphi)$, нетрудно понять, что когда φ возрастает от $-180°$ до $180°$ (при этом точка P пробегает всю параболу), то $t(\varphi)$ непрерывно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому формула (41), т. е. (42), устанавливает взаимно однозначное соответствие между t и φ (где числа t любые, а φ берутся из интервала от $-180°$ до $180°$): каждому t отвечает ровно одно такое φ, что $t = t(\varphi)$; это φ как-то зависит от t, т. е. может рассматриваться как функция от t, поэтому вполне законно писать $\varphi = \varphi(t)$. Первокурсникам известна теорема об обратной функции, применение которой гарантирует, что функция $\varphi(t)$ дифференцируема и что её производная имеет вид

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{dt(\varphi)/dt}.$$

А производная, фигурирующая в знаменателе, — это подынтегральное выражение в (41). В итоге получается, что $\dot{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (40).

Мы видим, что действительно существует функция $\varphi(t)$, производная которой удовлетворяет уравнению (40), и что такая функция ровно одна. Мы видим также, что t и $\varphi(t)$ связаны соотношением (42). В принципе, можно получить явную формулу для $\varphi(t)$. Обозначим на время $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ через ξ; тогда (42) представляет собой кубическое уравнение с неизвестной ξ. Читателю (вероятно) известна формула для решения квадратных уравнений. Для решения кубических уравнений тоже имеется так называемая формула Кардано, включающая аналогичные алгебраические операции, но значительно более сложная. Выразив ξ через t по этой формуле, можно затем перейти от ξ к φ с помощью арктангенса: $\varphi = 2\operatorname{arctg}\xi$. Но извлекать несколько корней (квадратных и кубических), фигурирующих в формуле Кардано, а затем вычислять арктангенс — довольно громоздкое дело. В математике разработаны методы, которые позволяют приближённо находить решение уравнения $t = t(\varphi)$ (прямо рассматривая его как уравнение относительно φ) при том или ином конкретном значении t, независимо от того, имеется ли явная формула для φ как функции от t или нет, и которые работают быстрее.

Но $e = 1$ — это, в конце концов, некий специальный случай. А что можно сказать, когда $e \neq 1$?

Оказывается, в этом случае можно получить описание связи между t и φ, довольно наглядное и не слишком сложное в отношении используемых формул, если не связывать их прямо друг с другом, а связывать и t, и φ с некоторой вспомогательной величиной ε. Она по-разному вводится при $0 < e < 1$ и при $e > 1$. Я остановлюсь в основном на первом случае.

Эллипс (8) получается из окружности $x^2 + y^2 = a^2$ при сжатии в вертикальном направлении. Наша точка P получается при этом из некоторой точки P' окружности; ясно, что, зная P', можно найти и P, — это уже простая геометрия. Вспомогательная величина ε определяется как угловая координата точки P' в полярной системе координат, полюс которой находится в центре эллипса (а не в фокусе S, как обычно), начальный же луч направлен из центра в S (и далее в перигелий). Пусть T — период обращения планеты. Можно считать, что она проходит перигелий в момент времени $t = 0$. Тогда оказывается, что t и ε связаны друг с другом согласно

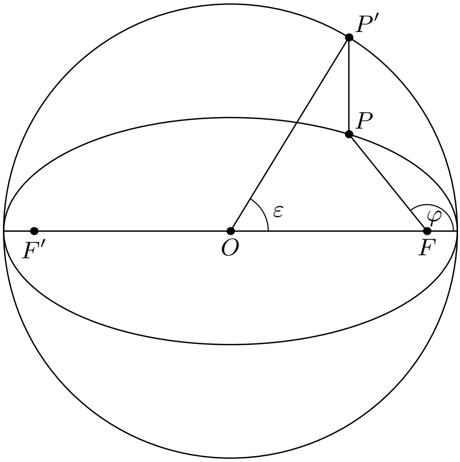


Рис. 55

так называемому уравнению Кеплера

$$\frac{2\pi t}{T} = \varepsilon - e\sin\varepsilon \quad (e\text{, как обычно, эксцентриситет эллипса}), \tag{43}$$

вывод которого будет намечен ниже.

На самом деле Кеплер рассуждал в геометрических терминах, не выписывая уравнений[11]. Формально у Ньютона это уравнение тоже не выписано — он избегал алгебры (о чём говорится в приложении VI), — но по существу Ньютон в словесно-геометрической форме говорит об уравнении Кеплера, указывая и метод его приближённого решения с любой точностью. К концу XVIII в. всё это было переделано заново уже в современном виде. Между прочим, уравнение Кеплера сыграло заметную роль за пределами небесной механики (на грани XVIII и XIX вв. исследование уравнения Кеплера стимулировало развитие одного из высших разделов математического анализа — теории функций комплексного переменного), правда, уступающую эпохальной роли задачи Кеплера.

[11] Как ни странно, у самого Кеплера при доказательстве утверждений и соотношений, заменяющих уравнение Кеплера, имелись неточности (см. статью Н. И. Идельсона «Закон всемирного тяготения и теория движения Луны», опубликованную в [31] и перепечатанную в [30], примечание [33]). Прежде всего, Кеплер здесь вступил в противоречие с открытым им самим III законом! Странным это кажется и ещё по двум причинам. Во-первых, правильные рассуждения здесь требовали бы знания не законов механики (которые при жизни Кеплера ещё не были установлены), а только геометрии (которую Кеплер прекрасно знал) и немного кинематики (тогда она только возникала, но для учёного такого уровня, как Кеплер, едва ли представились бы с нею трудности, тем паче что кинематика требуется примерно на уровне II закона Кеплера). И, во-вторых, окончательный-то результат у Кеплера был верен! (Не исключено, что помимо тех доводов, которые он опубликовал, у него имелись какие-то ещё соображения или догадки, которые, будучи, может быть, не только не доказанными, но и недостаточно чёткими, всё же в основном вели в правильном направлении.)

Связь же ε с φ получается из чисто геометрических соображений (на совершенно школьном уровне). Она такова[12]:

$$\cos\varepsilon = \frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}, \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon}. \tag{44}$$

Упражнение 6.2. Докажите формулы (44), а также формулы

$$r = a(1-e\cos\varepsilon), \qquad r' = a(1+e\cos\varepsilon) \tag{45}$$

(r' — расстояние от P до второго фокуса).

Уравнение Кеплера устанавливает взаимно-однозначное соответствие между значениями t и ε на всей числовой оси. Уравнение (44) непосредственно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между углами φ, изменяющимися от $0°$ до $180°$, и углами ε, тоже изменяющимися от $0°$ до $180°$. Лучше, впрочем, измерять углы в радианах; тогда надо говорить об изменении φ и ε от 0 до π. Но затем это соответствие можно непрерывным образом продолжить на все значения углов φ и ε. Возникающие отсюда функции, например $\varphi(\varepsilon)$ и $\varepsilon(t)$, обладают «хорошими» свойствами (например, они дифференцируемы). Однако явной формулы для $\varepsilon(t)$ нет, так что уравнение Кеплера даже в принципе можно решать только приближённо.

Отмечу своеобразную терминологию, сложившуюся у астрономов. Все три величины φ, ε и $2\pi t/T$ называются анома́лиями с добавлениям прилагательного: истинная, эксцентрическая и средняя. Слово анома́лия (отличающееся ударением от более привычной анома́лии) употребляется здесь в почти забытом теперь первоначальном значении, означающем просто отклонение, а отнюдь не какую-то патологию или хотя бы просто отклонение от нормы. Отклонение в данном случае состоит в движении точки P или какой-то воображаемой точки, наблюдаемой из S или O (если бы это было возможно), относительно неподвижных звёзд и математически характеризуется как некое отклонение направления на данную точку от начального луча. Самый очевидный, непосредственный случай — это когда мы наблюдаем P из S (поэтому анома́лия φ и называется истинной). Не столь очевидная ситуация — когда мы наблюдаем из O за упомянутой выше вспомогательной точкой P' (лежащей на окружности радиуса a с центром в O). Говоря же о средней анома́лии, мы считаем, что направление на воображаемую точку изменяется с постоянной скоростью и что за время T эта точка делает полный оборот. (Сопоставляем же мы число $2\pi t/T$ вполне реальной планете P.) Значит, в среднем за время T средняя анома́лия изменяется так же, как две других (поэтому она и называется средней). Все три анома́лии равны нулю (или $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) в перигелии и увеличиваются на 2π, когда P делает оборот по эллипсу в положительном направлении. Как и у φ, у прочих анома́лий тоже нет никаких разрывов, а есть многозначность (вообще говоря, все три определены с точностью до кратных 2π), которая практически не сказывается на изучении непрерывного движения точки P, ибо тогда ε, φ и $2\pi t/T$ можно взять непрерывно зависящими от t.

Мы наметим вывод уравнения Кеплера на основании геометрии (с небольшим участием кинематики), но можно стать и на такую точку зрения, что речь идёт о вычислении интеграла в формуле (41). При $e \neq 1$ это довольно громоздкое дело, но всё же вполне выполнимое. При таком подходе после некоторых трудов получается явное выражение для $t(\varphi)$ (годящееся для некоторого интервала изменения φ), содержащее два слагаемых. С точностью до постоянного множителя (в конечном счёте сводящегося к $T/(2\pi)$) одно из них можно отождествить с ε, а другое — с $-e\sin\varepsilon$.

[12] Если определение ε и вывод формул (44) являются геометрическими, то производная $\dot\varepsilon$ тесно связана с кинематикой — см. последнее подстрочное примечание в этом параграфе.

Но всё это не так уж просто. Во-первых, вычисления получаются более сложными, чем при более элементарном выводе уравнения Кеплера. Во-вторых, при интегрировании используется стандартная подстановка $s = \operatorname{tg}(\varphi/2)$, и потому ответ сперва получается с тангенсами и арктангенсами; сразу отнюдь не очевидно, что его можно преобразовать в форму с ε и $\sin\varepsilon$ (тогда как при более элементарном подходе обращение к ε кажется довольно естественным). В общем, долой интегральное исчисление (пошли назад в пещеру!)[13].

Качественным следствием наших рассуждений (особенно если их провести подробнее) является утверждение о существовании и единственности решения $\varphi(t)$ дифференциального уравнения (40) со специальным начальным значением $\varphi(0) = 0$ (на минуту обозначим это решение через $\psi(t)$; оно выражается по формуле (44) через решение уравнения Кеплера. Повторим ещё раз: $\psi(t)$ определяется из соотношения

$$\frac{p^2}{2M}\int_0^{\psi(t)} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = t.)$$

Отсюда легко вывести аналогичное утверждение уже для любого начального значения $\varphi(0) = \varphi_0$. Действительно, имеется такое t_0, что $\psi(t_0) = \varphi_0$ (с каким утверждением об уравнении Кеплера это связано?). Тогда $\varphi(t) = \psi(t + t_0)$ является решением уравнения (40) с начальным значением $\varphi(0) = \varphi_0$ (проверьте!). Это доказывает существование искомого решения $\varphi(t)$. Пусть, далее, имеется некоторое решение $\varphi(t)$ с заданным начальным значением $\varphi(0) = \varphi_0$, определённое, скажем, при $\alpha < t < \beta$ (сейчас даже не надо предполагать, что оно определено при всех t). Очевидная модификация предыдущих рассуждений приводит к тому, что

$$\frac{p^2}{2M}\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = t \quad \text{при } \alpha < t < \beta.$$

Если $\psi(t)$ то же, что и раньше, то

$$\frac{p^2}{2M}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = t_0$$

(почему?). Стало быть,

$$\frac{p^2}{2M}\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = t + t_0.$$

Это соотношение отличается от приведённого выше соотношения для $\psi(t)$ только тем, что вместо t в правой части стоит $t + t_0$, да ещё, может быть, тем, что оно относится не ко всем $t + t_0$, а только к тем, для которых $\alpha + t_0 < t + t_0 < \beta + t_0$. Значит, $\varphi(t) = \psi(t + t_0)$ при таких $t + t_0$.

Теперь приведём геометрический вывод уравнения (43). Напомним обычные обозначения и соглашения: P — планета, движущаяся против часовой стрелки по эллипсу с центром O, фокусом S (в котором находится Солнце), полуосями $a > b$ и эксцентриситетом e; $|OS| = c = ae$; φ — полярный угол точки P в полярной системе

[13] Если читатель-студент захочет всё-таки потренироваться в интегрировании, то рекомендую ему не пользоваться стандартной подстановкой, а сделать более подходящие в данном случае замены $x = \cos\psi$, $y = 1/(1+ex)$. После первой замены в знаменателе к тому, что там было, присоединяется ещё квадратичная иррациональность, что, казалось бы, усложняет дело, но после второй замены в знаменателе только она и остаётся, а дальше уже просто. На этом пути вычисления приводят к такой форме ответа в виде суммы двух слагаемых, в которой эти слагаемые легко отождествляются со слагаемыми в уравнении Кеплера.

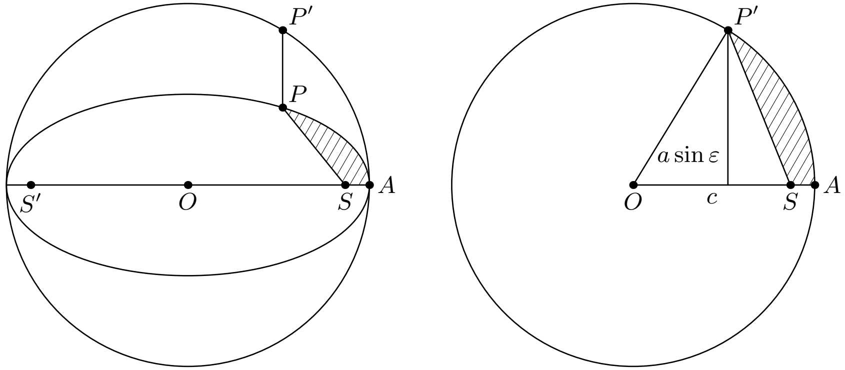


Рис. 56

координат с полюсом S и начальным лучом, направленным из S в сторону перигелия орбиты, который мы обозначим через A; ε — эксцентрическая ано́малия; T — период обращения планеты; в начальный момент времени $t = 0$ планеты находится в точке A. При доказательстве уравнения (43) достаточно рассмотреть значения t, удовлетворяющие условию $0 \leqslant t \leqslant T$ (почему?).

Обозначим через $\sigma(t)$ площадь, заметаемую радиус-вектором планеты за время от 0 до t; это площадь сектора Σ, ограниченного дугой эллипса, идущего в положительном направлении от A до P, и отрезками PS, SA. Обозначение σ согласуется с § 5, только теперь уточнён выбор начального момента времени. Как там говорилось, $\dot{\sigma} = rv_\varphi/2 = M/2$. Поэтому $\sigma(t) = Mt/2$.

Эллипс получается из окружности с центром в O и радиусом r при сжатии в a/b раз в вертикальном направлении. При этом точка P оказывается образом некоторой точки P' окружности, а сектор Σ получается из сектора Σ', ограниченного дугой окружности от A до P' (угловая мера этой дуги равна ε) и отрезками $P'S$, SA. Площадь Σ' в a/b раз больше площади $\sigma(t)$ сектора Σ, так что

$$\text{площадь } \Sigma' = \frac{Mat}{2b}.$$

Очевидно, круговой сектор AOP' имеет площадь $a^2\varepsilon/2$. С другой стороны, при $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$ отрезок $P'S$ разбивает этот сектор на указанный выше сектор Σ' и треугольник $\triangle P'OS$. Высота последнего, опущенная из P' на OS, равна $a\sin\varepsilon$, а длина стороны OS равна c; поэтому площадь треугольника равна $(ac/2)\sin\varepsilon = (a^2e/2)\sin\varepsilon$. Сумма площадей этих двух частей кругового сектора AOP' равна площади последнего, т. е.

$$\frac{Mat}{2b} + \frac{1}{2}a^2 e\sin\varepsilon = \frac{1}{2}a^2\varepsilon. \tag{46}$$

Когда же $180° \leqslant \varphi \leqslant 360°$, то отрезок $P'O$ разбивает сектор Σ' на круговой сектор AOP' и треугольник $\triangle P'OS$, площадь которого равна $(ac/2)\sin\angle P'OS$, а $\angle P'OS = 360° - \varepsilon$ (сделайте рисунок!), так что

$$\frac{Mat}{2b} = \frac{1}{2}a^2\varepsilon + \frac{1}{2}ac\sin\angle P'OS = \frac{1}{2}a^2\varepsilon - \frac{1}{2}a^2 e\sin\varepsilon,$$

и мы снова приходим к формуле (46).

Последний шаг состоит в замечании, что за время T, когда P делает полный оборот по эллипсу, радиус-вектор заметает всю площадь эллипса; значит, $MT/2 = \pi ab$. Разделив обе части равенства (46) на $MaT/(4b\pi) = a^2/2$, придём к уравнению (43).

В заключение сообщу, что получается при $e > 1$. В этом случае вспомогательная величина ε, с помощью которой получается довольно компактная формулировка связи между t и φ, вводится так:

$$\operatorname{ch}\varepsilon = \frac{e + \cos\varphi}{1 + e\cos\varphi},$$

где ch — гиперболический косинус ($\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$). Уравнение Кеплера заменяется таким:

$$\frac{M}{ab}t = e\operatorname{sh}\varepsilon - \varepsilon.$$

Читатель сам без труда выяснит, в каких пределах могут изменяться различные переменные в этом уравнении и в уравнении, связывающем φ и ε (на ветви гиперболы φ тоже изменяется только в некоторых пределах!). В этом случае по-прежнему возможна некоторая геометрическая интерпретация величины ε, но я не буду о ней говорить, — к сожалению, геометрия гиперболы менее приятна или менее привычна, чем геометрия эллипса и окружности[14].

[14]Однако можно показать, что и при эллиптическом, и при гиперболическом движении кинематическая роль ε одна и та же, а именно, $v_\varphi = b\dot{\varepsilon}$. В случае параболического движения аналогичное соотношение таково:

$$\frac{d}{dt}\Big(p\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big) = v_\varphi.$$

(Как и можно было ожидать, в этом случае $d\big(p\operatorname{tg}(\varphi/2)\big)/dt$ играет роль, сходную с ролью $\dot{\varepsilon}$ при других движениях.)

§ 7. Обратная задача Кеплера

Помимо задачи Кеплера, возникает и обратная задача. Во-первых, пусть движение точки P происходит в соответствии с I и II законами Кеплера; верно ли, что действующая на неё сила направлена к S и обратно пропорциональна расстоянию до S? Вопрос может касаться, конечно, только тех расстояний до S, на которых в процессе своего движения оказывается P. Во-вторых, пусть две точки P_1 и P_2, имеющие массы m_1 и m_2, движутся согласно всем трём законам. Согласно сказанному, тогда P_i притягивается к S с силой, обратно пропорциональной квадрату соответствующего расстояния; верно ли, что соответствующие коэффициенты пропорциональности суть Km_i, где K — одно и то же для обеих планет? Ответ на оба вопроса положительный; трудным является только первый из них. Обычно считается, что он всё-таки легче, чем вывод I закона Кеплера из уравнения (2), но я бы так не сказал. Ради разнообразия я приведу решение обратной задачи, которое является более геометрическим, чем решение прямой задачи. Это более геометрическое решение является в то же время и более коротким (если не считать затраты времени на вывод нужных нам свойств конических сечений; он, конечно, относится к геометрии, а не к механике, причём доказываемые свойства не только сами по себе любопытны, но и имеют применения совсем другого характера), однако краткость не означает лёгкости. Основная идея решения прямой задачи — переход к независимой переменной φ вместо t и к годографу скорости (прежней скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, а не $d\mathbf{r}/d\varphi$!) — является простой, естественной, легко и прочно запомнающейся, а после этого мы, так сказать, обречены на успех — все дальнейшие шаги делаются почти что автоматически, хотя для их изложения требуется некоторое место. Геометрические построения, которыми мы займёмся при решении обратной задачи, не кажутся столь же естественными (с какой стати решено обратить внимание именно на такие-то треугольники и отрезки?) и потому едва ли могут столь же легко и прочно запоминаться. Впрочем, в основном это относится к выводу нужных нам свойств конических сечений, а не собственно к решению обратной задачи Кеплера. В последнем тоже используется идея Гамильтона — перейти к независимой переменной φ и использовать скорость (прежнюю скорость $d\mathbf{r}/dt$, а не $d\mathbf{r}/d\varphi$!) в качестве основной неизвестной[1], но это делается не с самого начала, как при решении прямой задачи, а почти в самом конце, поэтому заранее как-то не видно, что мы нацеливаемся именно на такой happy end.

Насколько я знаю, излагаемое решение обратной задачи было впервые опубликовано Дж. К. Максвеллом [41], слава которого связана с созданием теории электромагнитного поля (об истории этой теории см. [51]). Оно, похоже, ещё менее

[1]Формально при этом не будет речи о годографе скорости, но, по существу, конечно, мы будем доказывать, что он является окружностью и что при изменении φ конец вектора скорости (отложенного от не зависящей от φ точки) равномерно вращается по этой окружности.

популярно, чем изложенное выше решение прямой задачи Кеплера. Но теперь у него появился шанс стать известным, потому что недавно была опубликована лекция об обратной задаче Кеплера, прочитанная Р. Фейнманом в 1964 г. [25] и содержащая почти что это самое решение (см. замечание 7.3), а публикации Фейнмана обычно имеют вполне заслуженный литературный успех. Принципиальное отличие общего характера лекции из [25] от [41] и от моей книжки — в том, что Фейнман отказался от использования дифференцирования даже в том скромном объёме, в каком я это делаю здесь. По-моему, это напрасно. Как сказал Кельвин и как блестяще пояснил сам Фейнман в [55], производная — это скорость. И уж раз мы намерены иметь дело со скоростью и ускорением, стоит немного остановиться на этой стороне дела. Алгебра и тригонометрия в [25] тоже почти полностью исключены, что мне опять-таки не кажется удачным: читатель, вероятно, уже и до чтения данной книжки мог не раз убедиться, какую могучую помощь порой они оказывают даже и в более простых вопросах. И ведь блестящая идея Гамильтона ничуть не меркнет от соседства с алгебраическими вычислениями и тригонометрическими функциями в § 6.

Мы уже видели, что II закон Кеплера эквивалентен тому, что поле тяготения квазицентральное. Теперь посмотрим, что можно сказать об этом поле на основании I закона. Основным для нас является тот случай, когда планета движется по эллипсу; при желании читатель может разобраться с движением по другим кривым второго порядка, решая соответствующие упражнения. Поскольку скорость направлена по касательной к траектории, нам понадобятся некоторые сведения о касательной к эллипсу (или другой кривой второго порядка).

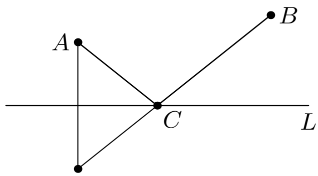


Рис. 57

Упражнение 7.1. а. Пусть по одну и ту же сторону от прямой линии L находятся точки A и B. Соединим их ломаной линией ACB, которая состоит из двух звеньев AC и CB, причём точка C находится на L. Докажите, что среди таких ломаных имеется кратчайшая, которая характеризуется тем, что AC и BC образуют с L равные углы. Указание. Замените одну из точек A, B точкой, симметричной ей относительно прямой L.

б. При том же условии и при дополнительном предположении, что A находится ближе к L, чем B, установите существование такой точки C на L, что разность длин $|BC| - |AC|$ максимальна. Охарактеризуйте её положение. Существует ли такая точка, если A и B находятся на одинаковом расстоянии от L? Указание. Обратите внимание на точку пересечения прямых L и AB.

в. Пусть по разную сторону от прямой линии L находятся точки A и B, причём A ближе к L, чем B. Соединим их ломаной линией ACB, которая состоит из двух звеньев AC и CB, причём точка C находится на L. Докажите, что среди таких ломаных имеется ломаная с наибольшей разностью $|BC| - |AC|$ и что она характеризуется тем, что AC и BC образуют с L равные углы, имеющие общую сторону — часть прямой L.

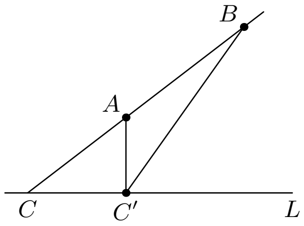


Рис. 58

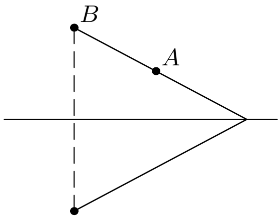


Рис. 59

Упражнение 7.2. а. Пусть Γ — эллипс с фокусами S и S', а P — его точка. Докажите, что отрезки SP и $S'P$ образуют равные углы с касательной L в точке P. (Подразумевается, что второй стороной у одного из этих углов является одна «половина касательной», т. е. один из двух лучей, на которые L разбивается точкой P, а у второго угла — другая «половина касательной».) (Указание. Используйте упражнения 4.4 и 7.1.) Пусть, обратно, отрезки SP и $S'P$ образуют равные углы с некоторой прямой, проходящей через P; что можно сказать об этой прямой?

б. Пусть Γ — ветвь гиперболы с фокусами S и S', первый из которых ближе к Γ, чем второй, а P — точка на Γ. Докажите, что углы, образуемые отрезками SP и $S'P$ с одной и той же «половиной касательной», начинающейся в точке P, равны.

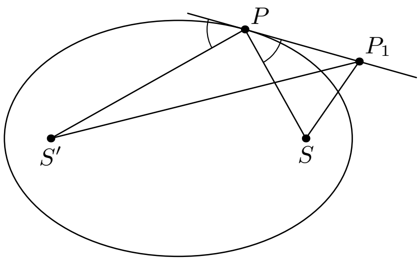


Рис. 60

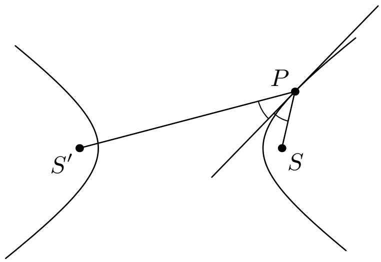


Рис. 61

Следующее упражнение формально не используется в дальнейшем, но оно непосредственно примыкает к используемому геометрическому материалу и как бы освещает его с другой стороны.

Упражнение 7.3. Докажите следующие «оптические» утверждения.

а. Луч, выпущенный из фокуса эллипса, отразившись от эллипса по закону «угол падения равен углу отражения», попадает во второй фокус эллипса.

б. Луч, выпущенный из фокуса гиперболы, после своего отражения от гиперболы по тому же закону составляет часть прямой, проходящей через второй фокус, т. е. отражённый свет кажется исходящим из второго фокуса.

Упражнение 7.4. а. Докажите, что эллипс состоит из точек, равноудалённых от фокуса S' и некоторой окружности, центр которой совпадает со вторым фокусом S

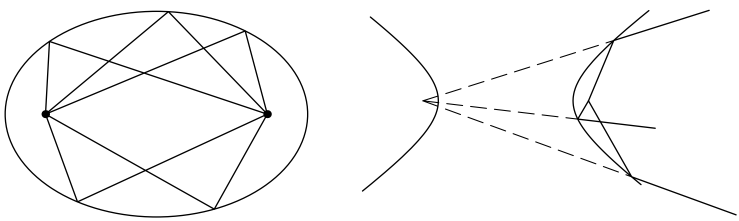


Рис. 62

и которая содержит S' внутри себя. Эта окружность называется директориальной окружностью эллипса[2]. (Указание. Каким следует взять радиус этой окружности? Иными словами, если P — точка эллипса, то насколько надо продолжить отрезок SP, чтобы получить радиус окружности?)

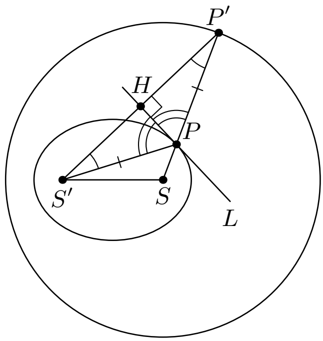


Рис. 63

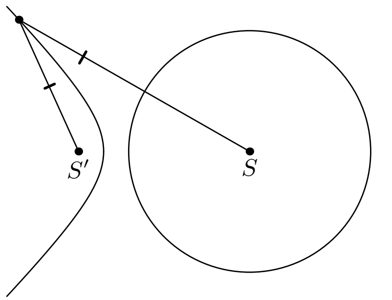


Рис. 64

б. Что можно сказать о множестве точек, равноудалённых от некоторой окружности и точки S', находящейся вне этой окружности[3]?

Упражнения 7.1, 7.2 наводят на мысль, что если точка P лежит на параболе с фокусом S и директрисой L, то касательная L к параболе в точке P является биссектрисой угла между PS и перпендикуляром, опущенным из P на директрису[4].

[2]Собственно говоря, у эллипса имеются две директориальные окружности. Вторая из них получается, если поменять ролями фокусы S и S'.

У гиперболы тоже имеются две директориальные окружности, с чем связано приведенное ниже утверждение б, но здесь ситуация несколько иная — каждая из двух директориальных окружностей «обслуживает» свою ветвь гиперболы.

[3]Надо сказать, что при решении обратной задачи Кеплера в случае движения по ветви гиперболы эта окружность не будет играть роли (вопреки тому что, вероятно, подумал читатель и в отличие от случая движения по эллипсу), а будет фактически привлекаться (в упражнении 7.8) другая окружность.

[4]Отсюда следует, что лучи, исходящие из фокуса параболы, после отражения от неё по обычному закону становятся параллельными её оси, а лучи, падающие на

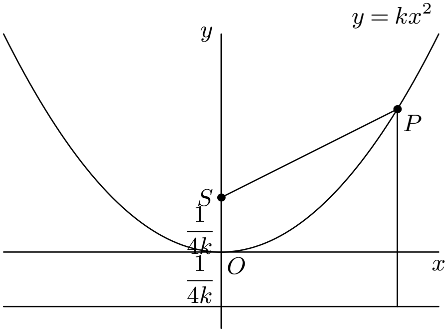


Рис. 65

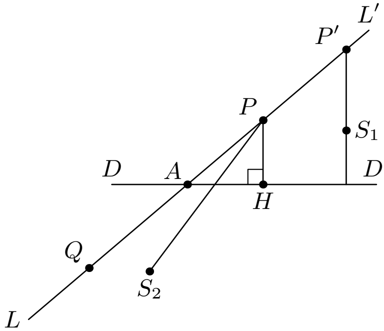


Рис. 66

Естественно попробовать доказать это утверждение, решая следующую вспомогательную задачу. Пусть даны две прямые D, L и точка S вне них; существует ли на L такая точка P, в которой достигается минимум разности

$$|PS| - \text{расстояние от } P \text{ до } D, \tag{47}$$

и что можно сказать о связи между прямой PS и перпендикуляром, опущенным из S на D? К сожалению, при решении вспомогательной задачи приходится, насколько я вижу, рассматривать различные частные случаи. Это не сложно, но требует места. Однако мы намерены применить вспомогательную задачу к тому случаю, когда S — фокус, D — директриса параболы, а L — касательная к параболе. Значит, нам достаточно решить вспомогательную задачу только в данном случае; это приводит к некоторому сокращению рассуждений.

Упражнение 7.5. Выведите из упражнения 4.4 б, что если L — касательная к параболе в точке $P_0 = (x_0, y_0)$, то во всех точках P прямой L, кроме P_0, расстояние $|SP|$ больше расстояния от P до директрисы D, т. е. длины $|PH|$ перпендикуляра, опущенного из P на директрису. Указание. В терминах координат, в которых парабола задаётся уравнением $y = kx^2$, речь идёт о связи между двумя утверждениями

$$y < kx^2 \quad \text{и} \quad \left|y + \frac{1}{4k}\right| < \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4k}\right)^2}$$

(почему?). В связи с $1/4k$ см. упражнение 3.2 д.

Итак, вспомогательная задача сильно сужается: в интересующем нас случае разность (47) всюду положительна, кроме точки P_0, где эта разность равна нулю. Следуя предыдущим образцам, рассмотрим точку S_1, симметричную S относительно прямой L. Пусть A — точка пересечения прямых L и D. Прямая L разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит S, в другой S_1. Обозначим последнюю полуплоскость через Π_1 и отметим какую-нибудь точку Q на начинающемся в A луче прямой L, противоположном лучу AP. Наконец, пусть D' — луч AH прямой D. Он разбивает Π_1 на два угла — $\angle PAH$ и $\angle HAQ$.

параболу параллельно её оси, после отражения собираются в её фокусе. Это объясняет, почему в прожекторах и зеркальных телескопах используются параболические зеркала, т. е. зеркала, поверхности которых являются параболоидами вращения. (Впрочем, в XX в. были разработаны и стали использоваться конструкции телескопов, в которых зеркало не параболическое, а направление лучей корректируется посредством дополнительного преломления или отражения.)

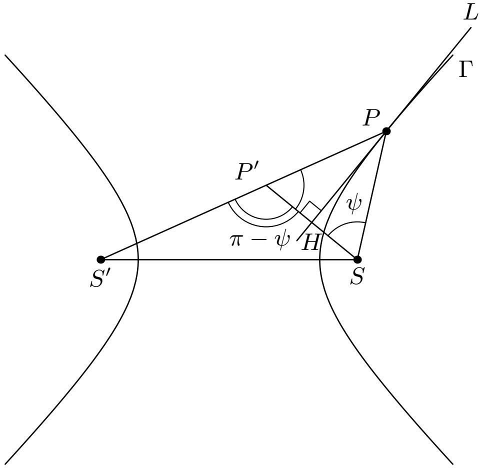


Рис. 67

Упражнение 7.6. а. Докажите, что если S_1 лежит внутри угла $\angle HAQ$, то $|S_1P| > |HP|$, хотя $|S_1P| = |SP| = |HP|$, а если S_1 лежит внутри угла $\angle PAH$, то на луче AP имеется точка P', для которой

$$|S_1P'| < \textit{расстояние от } S_1 \textit{ до } D.$$

б. Выведите отсюда сперва, что S_1 лежит на луче D', а затем — что $S_1 = H$.
в. Покажите, что $\angle SPA = \angle HPA$.

Упражнение 7.7. а. Пусть P — точка эллипса с фокусами S, S', P' — точка его директориальной окружности, лежащая на луче SP, а PH — перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую $S'P'$ (рис. 63). Докажите, что основание H этого перпендикуляра делит отрезок $S'P'$ пополам (указание: что можно сказать о треугольнике $\triangle S'HP'$?) и что прямая PH является касательной к эллипсу в точке P
Указание. Используйте упражнение 7.2.

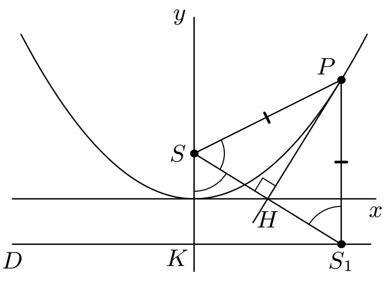


Рис. 68

б. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для гиперболы и параболы.

Упражнение 7.8. Докажите, что произведение длин перпендикуляров SK и $S'H$, опущенных из двух фокусов S и S' эллипса или гиперболы на касательную к этой кривой в какой-нибудь точке P, равно, в обычных обозначениях, b^2. Указание. В случае эллипса отложим, как и раньше, на продолжении отрезка SP за точку P отрезок PP' длины $|PP'| = r'$ $(= |S'P|)$ (так что $|SP'| = 2a$, точка P' лежит на

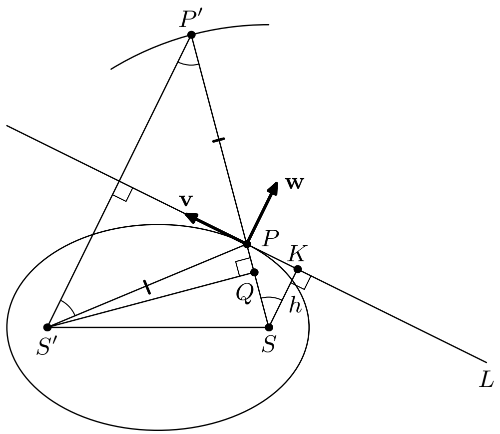


Рис. 69

директориальной окружности эллипса) и опустим из S' перпендикуляр $S'Q$ на прямую SP. Докажите, что прямоугольные треугольники $\triangle SPK$ и $\triangle P'S'Q$ подобны (их вершины, соответствующие друг другу при этом подобии, берутся в указанном выше порядке). Для этого сперва проверьте, что $\angle PSK = \angle S'P'Q$. Убедитесь также, что $|S'H| = |S'P'|/2$. Выведите отсюда, что

$$|S'H| \cdot |SK| = \frac{1}{2}|S'P'| \cdot |SK| = \frac{1}{2}|SP| \cdot |S'Q|.$$

Наконец, покажите, что при использовании обычной угловой координаты φ точки P (полюс в S, начальная ось направлена от S к перигелию) выполняется равенство $|S'Q| = 2a(1 + e\cos\varphi)$. (Не упустите из виду, что $\cos\varphi > 0$ при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $\cos\varphi < 0$ при $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. Проследите, что геометрически это отражается в том, находится ли Q по другую сторону от S, нежели P', или по ту же.) Другой сомножитель $|SP| = r = p/(1 + e\cos\varphi)$, так что

$$|S'H| \cdot |SK| = \frac{1}{2}\frac{p}{1 + e\cos\varphi}2a(1 + e\cos\varphi) = pa = b^2.$$

В случае гиперболы будем считать, что P находится на той ветви Γ гиперболы, которая ближе к S. Отложим на продолжении отрезка PS за точку S отрезок SP' длины $2a$ (так что $|PP'| = r' = |S'P|$; забавно, что нужная нам точка P' лежит на директориальной окружности второй ветви гиперболы — той ветви, с которой мы не имеем дела). Дальнейшее аналогично случаю эллипса. Слова и формулы почти такие же (только равенство углов $\angle PSK = \angle S'P'Q$ мотивируется чуть иначе), а рисунки выглядят по-разному.

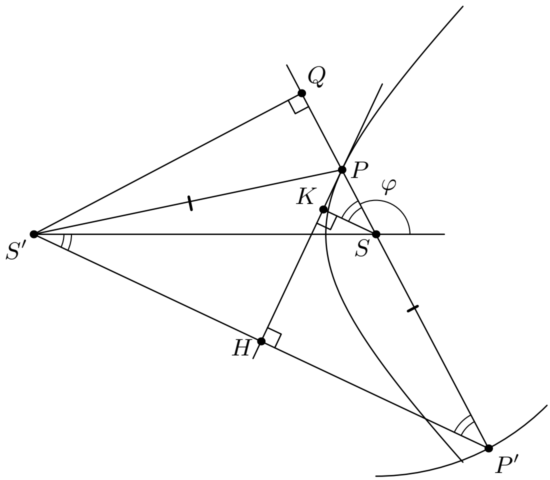


Рис. 70

Теперь, наконец, мы можем заняться непосредственно обратной задачей Кеплера. Рассуждения для эллипса и гиперболы почти совершенно одинаковы, но ради определённости я всё-таки начну с эллипса.

Мы, как обычно, считаем, что движение точки P по орбите происходит против часовой стрелки, т. е. в сторону возрастания φ, а второй фокус S' расположен левее первого S (начальный луч не проходит через S'). Скорость направлена по касательной и потому перпендикулярна прямой $S'P'$. Значит, при повороте вектора скорости $\mathbf{v}$ на 90° по часовой стрелке[5] получится вектор $\mathbf{w}$, параллельный прямой $S'P'$, но в какую сторону он направлен — совпадает ли его направление с направлением вектора $\overrightarrow{S'P'}$ или с направлением противоположного вектора $\overrightarrow{P'S'}$? Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ мы сейчас представляем себе приложенными к точке P. Тогда из рисунка ясно, что направление вектора $\mathbf{w}$ совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{S'P'}$ (читателю не лишне будет убедиться в этом, пробуя различные положения точки P на эллипсе). А можно ли убедиться в этом с помощью какого-то

[5]Если бы движение точки P по орбите происходило по часовой стрелке, надо было бы поворачивать $\mathbf{v}$ против часовой стрелки.

рассуждения, не взывая к наглядности рисунков? Да. (Правда, Ньютон и другие корифеи небесной механики никакой потребности в каких-то особых обоснованиях в подобных случаях не испытывали, и читатель вправе присоединиться к их компании. Но если бы кто-то уж очень настойчиво потребовал от этой компании формального доказательства, они, конечно, смогли бы сразу предъявить таковое, так что они были вправе считать данный вопрос очевидным. А вот учащиеся порой говорят «очевидно» и при этом затрудняются объяснить, почему же всё-таки «очевидное» утверждение справедливо.) Поскольку при движении P по эллипсу угловая координата φ возрастает, при $0 < \varphi < 180°$ вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен налево (в обычных декартовых координатах, в которых уравнение эллипса имеет вид (8), x-координата вектора $\mathbf{v}$ положительна), а при $180° < \varphi < 360°$ — направо. При повороте на $90°$ против часовой стрелки из $\mathbf{v}$ получается вектор $\mathbf{w}$, направленный при $0 < \varphi < 180°$ вверх (его y-координата положительна), а при $180° < \varphi < 360°$ — вниз. Вектор $\overrightarrow{S'P'}$ тоже в первом случае направлен вверх, а во втором — вниз (ибо S' лежит на оси абсцисс, а P' находится в соответствующей полуплоскости). Следовательно, раз мы уже знаем, что векторы $\mathbf{w}$ и $\overrightarrow{S'P'}$ параллельны, то эти два вектора имеют также одинаковое направление, т. е. $\mathbf{w} = \lambda\overrightarrow{S'P'}$ с некоторым $\lambda > 0$.

Это λ, конечно, равно отношению длин векторов $\mathbf{w}$ и $\overrightarrow{S'P'}$. Первая длина равна $M/h = M/|SK|$, так что

$$\lambda = \frac{M}{|SK| \cdot |S'P'|} = \frac{M}{2}\frac{1}{|SK| \cdot |S'H|} = \frac{M}{2b^2}$$

(в последнем шаге используется упражнение 7.8). Итак,

$$\mathbf{w} = \frac{M}{2b^2}\overrightarrow{S'P'}. \tag{48}$$

При изменении φ конец P' вектора $\overrightarrow{S'P'}$ (начало которого всё время находится в S') вращается по окружности радиуса $2a$ с центром в S. Если рассматривать φ как время, то вращение происходит с единичной угловой скоростью — ведь угловая координата точки P' в обычной для нас системе полярных координат (с полюсом S и начальным лучом, направленным из S по большой оси эллипса направо, т. е. в противоположную от S' сторону) как раз и есть φ. Следовательно,

$$\frac{d}{d\varphi}\overrightarrow{S'P'} = \frac{d}{d\varphi}\overrightarrow{SP'} = 2a\mathbf{e}_\varphi,$$

и потому

$$\frac{d}{d\varphi}\mathbf{w} = \frac{M}{2b^2}2a\mathbf{e}_\varphi.$$

Вектор же $\mathbf{v}$ получается из $\mathbf{w}$ путём поворота на $90°$ против часовой стрелки. Потому и скорость изменения первого вектора получается из скорости изменения вектора $\mathbf{w}$

путём такого же поворота. При нём $\mathbf{e}_\varphi$ переходит в $-\mathbf{e}_r$. Итак,

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = -\frac{2aM}{2b^2}\mathbf{e}_r = -\frac{M}{p}\mathbf{e}_r.$$

Последний шаг — переход к независимой переменной t вместо φ — делается с учётом II закона Кеплера. В нужной для нас форме этот закон, как мы знаем, указывает, что $\dot{\varphi} = M/r^2$. Стало быть,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{M^2}{p}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

а это и есть уравнение (2) (ведь $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$) с коэффициентом

$$k = \frac{M^2}{p}. \tag{49}$$

Последняя формула выглядит (с точностью до тривиального преобразования) точно так же, как формула (36), но сейчас она имеет иной смысл. В § 6 мы исходили из центрального поля, в котором ускорение равно $-(k/r^2)\mathbf{e}_r$ (константа k, стало быть, задана с самого начала), и получили, что движение происходит по кривой второго порядка (8) с e и p, определяющимися согласно формулам (35) и (36). Теперь же мы исходили из движения по эллипсу (теперь, стало быть, с самого начала задан фокальный параметр p, равно как и эксцентриситет e), происходящего с сохранением вращательного момента относительно фокуса, и получили выражение для ускорения при таком движении, содержащее множитель $k = M^2/p$. (Сказанное относится и к упоминаемым ниже движению по параболе или гиперболе, где тоже получается формула (49).)

Замечание 7.1. Один из прискорбных недостатков геометрических рассуждений состоит в том, что в них обычно имеется в виду определённое расположение деталей рассматриваемых фигур, а оно в различных случаях может быть различным. Сейчас для эллипса мы должны были отдельно рассматривать случаи $0 < \varphi < 180°$ и $180° < \varphi < 360°$, а раньше, в упражнении 7.8, — случаи $-90° < \varphi < 90°$ и $90° < \varphi < 270°$ (в первом случае $|P'L| = |P'S| + |SL|$, во втором — $|P'L| = |P'S| - |SL|$. Кроме того, решая данное упражнение, читатель должен был найти, что угол $\angle S'SQ$ в этих двух случаях равен соответственно $|\varphi|$ и $|180° - \varphi|$, причём в соответствующем геометрическом рассуждении надо отдельно рассматривать не два, а четыре случая, отвечающие положению SP в четырёх квадрантах (получающихся при декартовой координатной системе с началом координат в S и положительной полуосью абсцисс, идущей из S в ближайшую вершину эллипса). Собственно, надо было бы остановиться ещё на исключительных случаях, когда φ кратно $90°$. Использование знака модуля позволяет уменьшить число случаев до двух, а затем известные свойства косинуса позволяют при всех φ написать одну и ту же формулу для $|P'Q|$. При более аналитическом характере изложения можно было бы во всех этих случаях действовать единообразно. Но тогда, собственно, не было бы и рисунка, а без него как-то тоскливо. Обычно поступают следующим образом: приводят рисунок, расположение деталей на котором на самом деле имеет место только в каких-то

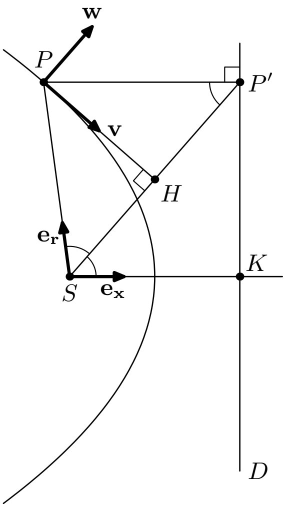


Рис. 71

случаях, а рассуждение с использованием координатных формул, алгебры (обычной и векторной) и т. п. проводят так, чтобы оно от этих подробностей расположения деталей не зависело.

Для тех случаев, когда P движется по другим коническим сечениям, снова нужны свои рисунки и небольшие изменения в рассуждениях.

Упражнение 7.9. Рассмотрите движение точки P по гиперболе.

Остаётся рассмотреть движение планеты P по параболе с фокусом S, директрисой D и параметром (т. е. расстоянием от S до D, см. упражнение 3.2) p. Основание перпендикуляра, опущенного из S на D, обозначим через K. Используем полярные координаты с полюсом в S и начальной полуосью SK. Пусть P движется в направлении возрастания полярного угла φ. Опустим из P перпендикуляр PP' на D, а затем из P перпендикуляр PH на SP'.

Упражнение 7.10. Докажите следующие утверждения.

а. Отрезок PH лежит на касательной к параболе в точке P.

б. $\angle PSH = \angle PP'S = \angle HSK = \varphi/2$, где прицельный параметр имеет вид $h = |SH| = p/2\cos(\varphi/2)$.

в. Вектор $\mathbf{w}$, получающийся при повороте вектора скорости $\mathbf{v}$ на 90° по часовой стрелке, совпадает с

$$v\frac{\overrightarrow{SH}}{|SH|} = \frac{M}{h}\,\frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r}{|\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r|} = \frac{M}{p}\,\frac{2\cos(\varphi/2)}{|\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r|}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r),$$

где $\mathbf{e}_x$ — единичный вектор, лежащий на оси SK и направленный от S к K (обозначение связано с тем, что эту полуось естественно принять за одну из координатных полуосей, чем, впрочем, мы не будем пользоваться), а $\mathbf{e}_r$ имеет обычный смысл.

г. Справедливо равенство $|\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r| = 2\cos(\varphi/2)$. Отсюда

$$\mathbf{w} = \frac{M}{p}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_r), \qquad \frac{d\mathbf{w}}{d\varphi} = \frac{M}{p}\left(\frac{d\mathbf{e}_x}{d\varphi} + \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi}\right) = \frac{M}{p}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = -\frac{M}{p}\mathbf{e}_r, \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{M^2}{p}\,\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

а это и есть уравнение (2) с коэффициентом $k = M^2/p$.

Замечание 7.2. В первоначальном варианте этой книжки излагалось решение обратной задачи, выдержанное в том же духе, что и решение прямой задачи, и в значительной степени получающееся путём проведения соответствующих рассуждений в обратном порядке. Раз уж на таком пути мы всё время хотя бы в общих чертах знаем, что надо делать, то общая схема действий понятна, но в целом это решение, пожалуй, было каким-то более скучным — блестящая идея Гамильтона в нём как-то «размывалась», «отступала на задний план» (в бóльшей степени, чем в геометрическом решении Максвелла).

Если читатель очень уж увлечётся данной темой, он может попробовать восстановить такое решение самостоятельно. При этом надо: выяснить, какими формулами описывается изменение координат вектора при повороте на 90°; найти уравнение касательной к окружности, а затем и к эллипсу; найти отсюда соотноешние между координатами v_x и v_y вектора скорости $\mathbf{v}$ в обычно используемой декартовой системе координат (в которой эллипс имеет уравнение (8)); перейти к соотношению между v_r и v_φ; сочетая это со вторым законом Кеплера, найти v_r и v_φ как функции угловой координаты планеты φ, а затем построить годограф скорости и убедиться, что он является окружностью и что с изменением φ конец вектора скорости движется по этой окружности с постоянной скоростью, откуда легко перейти к уравнению (2).

Упомяну также о другом геометрическом решении обратной задачи, которое мне сообщил немецкий математик Г. Кархер. Идея Кархера состоит в том, чтобы вначале, опираясь только на то, что нам дано в задаче Кеплера, — на то, что движение происходит по эллипсу, параболе или гиперболе и что при этом сохраняется момент M относительно фокуса S, — доказать такое же соотношение между квадратом скорости планеты v^2 и её расстоянием до Солнца r, о каком говорится в законе сохранения энергии. Прежний вывод этого соотношения опирался на уравнение (2), которое теперь нам не дано с самого начала, а является нашей целью. Кроме того, в выражении для потенциальной энергии фигурирует константа k; раньше она была дана нам с самого начала как константа в правой части уравнения (2), теперь же мы должны доказать, что если взять константу k, определённым образом выражающуюся через параметры эллипса (или иного конического сечения — орбиты планеты) и M, то величина $m_P v^2/2 - k m_P/r$ будет сохраняться при движении. А так как $M = vh$, где, как обычно, h — прицельный параметр, достаточно установить соответствующую связь между h и r. В таком виде задача становится чисто геометрической — ни о каком движении больше нет речи, а речь идёт о некотором свойстве расстояния от фокуса кривой второго порядка до касательной к ней. Но, на мой взгляд, решение Максвелла проще. С решением Кархера можно ознакомиться по его собственному изложению [33].

Замечание 7.3. Мы видели, что при повороте вектора $\mathbf{v}$ на 90° по часовой стрелке получается вектор $\mathbf{w}$, равный $\lambda\overrightarrow{S'P'}$ с некоторым множителем $\lambda = M/(2b^2)$. Фейнман заметил, что если повернуть на 90° по часовой стрелке весь рис. 54, совмещая при этом V_0 с точкой на рис. 63, обозначенной через S, и осуществить затем гомотетию[6] с центром в S и коэффициентом λ^{-1}, то треугольник $\triangle SV_0V$ перейдёт в $\triangle S'SP'$, а окружность, являющаяся годографом скорости, перейдёт в директориальную окружность эллипса[7]. По словам Гудстейна, издавшего лекцию Фейнмана, для Фейнмана открытие данного подобия было самым трудным шагом. Я этому верю, поскольку сам я до этого подобия вообще не додумался (как, возможно, не додумался и Максвелл). Правда, в прежних доказательствах мне этого не было нужно, да и в доказательстве Максвелла нужна только связь между $\mathbf{w}$ и $\overrightarrow{S'P'}$. Так что красивое наблюдение Фейнмана в настоящей книжке остаётся без применений.

В справедливости фейнмановского наблюдения легко убедиться, используя известные нам сведения о задаче Кеплера и связанные с ней геометрические факты. Другое дело — использовать его для решения прямой задачи Кеплера, как делает Фейнман. Вначале Фейнман доказывает, что годограф скорости Γ является окружностью; это он делает практически так же, как и мы в § 6, только вместо алгебры, тригонометрии и элементов дифференциального исчисления он обходится геометрией старинного образца. Но дальше он действует иначе.

---

[6] При этой гомотетии каждая точка A переходит в конец вектора $\lambda^{-1}\overrightarrow{SA}$ (который подразумевается исходящим из S), т. е. расстояние от неё до центра гомотетии S изменяется в λ^{-1} раз, а направление от S к A не меняется.

[7] Читатель, конечно, понимает, что при этом оба рисунка подразумеваются относящимися к одному и тому же положению точки P на орбите, т. е. к одному и тому же φ (на наших рисунках это не совсем так).

Следуя его пути, мы не знаем заранее, что орбита является эллипсом[8], поэтому заранее мы не имеем ни осей эллипса, ни его второго фокуса S', ни директориальной окружности. Но можно, предугадывая истинное положение дел, использовать гипотетическое подобие треугольников $\triangle SV_0V$ и $\triangle S'SP'$ (даром что две вершины последнего нам пока не известны) как «подсказку» при построении некоторой «модели» планетной орбиты. Приступая к этому построению, Гудстейн в своей части книги [25] говорит, что «размеры (модельной — Д. А.) орбиты будут произвольны, но все направления, а значит, и форма орбиты „правильны“». Сказано не очень чётко. В самой записи лекции Фейнмана чёткости не больше. Однако из построения видно, что именно имеется в виду. Строится некий эллипс $Э$ с фокусом S, обладающий следующим свойством: при любых φ касательная к $Э$ в точке с обычной угловой координатой (полярным углом) φ параллельна касательной к настоящей орбите в точке с той же угловой координатой[9]. Отсюда действительно следует, что настоящая орбита является эллипсом, гомотетичным $Э$ при некоторой гомотетии с центром гомотетии S (стало быть, Солнце действительно находится в фокусе планетной орбиты). Но мне не кажется, что данное следствие можно считать очевидным. Его легко доказать, если использовать дифференциальное исчисление в чуть бóльшем объёме, чем принято в этой книжке (нужна формула Лейбница для производной произведения), но я не вижу, как обойтись более элементарными средствами, не утопая в громоздких рассуждениях. Быть может, Фейнман почувствовал в этом месте некоторую неудовлетворённость и, надеясь когда-нибудь к нему вернуться, отложил на неопределённый срок обработку своей лекции для публикации.

[8]Речь идёт именно об эллипсе, а не другой кривой второго порядка, ибо в этом месте своей лекции Фейнман считает, что в плоскости годографа точка S лежит внутри окружности годографа скорости Γ. В § 6 мы видели, что тогда орбита действительно является эллипсом. Цель Фейнмана — прийти к тому же заключению другим путём.

[9]Сперва в плоскости годографа строим эллипс $Э_1$ с фокусами S, V_0, директориальная окружность которого совпадает с окружностью годографа скорости Γ. (В середине отрезка SV, где V лежит на Γ, восставим перпендикуляр к этому отрезку и возьмём точку Q пересечения перпендикуляра с SV. Когда V пробегает всю окружность Γ, точка Q «зачерчивает» эллипс $Э_1$ (почему?).) Затем эллипс $Э_1$ поворачиваем на 90° по часовой стрелке, причём его фокус V_0 совмещаем с точкой S в плоскости орбиты. Почему полученный эллипс $Э$ обладает указанным выше свойством?

§ 8. О связи между прямой и обратной задачами Кеплера

Читателю, конечно, известно, что прямое и обратное утверждение — это разные вещи. Бывает даже так, что одно из них верно, а другое — нет.

В этом параграфе речь будет идти не вообще о прямых и обратных утверждениях[1], а о двух конкретных и уже известных нам утверждениях. Прямое состоит в том, что в задаче Кеплера движение происходит по кривой второго порядка с фокусом «в Солнце S», т. е. в центре силового поля (I закон Кеплера), причём при этом, в обычных обозначениях, $M = r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$ (II закон Кеплера). С математической точки зрения это есть утверждение о решениях векторного дифференциального уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{50}$$

Обратное же утверждение гласит, что если точка P движется согласно I и II законам Кеплера, то вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{SP}$ удовлетворяет уравнению (50) с некоторой константой k. Поскольку в нашем случае справедливы оба утверждения — и прямое, и обратное, — напрашивается вопрос: а может быть, в нашем случае эти утверждения всё-таки эквивалентны? Как мы увидим, на этот вопрос можно ответить утвердительно, но сперва надо уточнить, что это значит, т. е. в каком смысле можно говорить о положительном ответе? Поскольку нет общего логического принципа, будто

$$\text{прямое утверждение} \Longleftrightarrow \text{обратное утверждение},$$

в нашем случае эквивалентность должна доказываться с помощью каких-то конкретных соображений, учитывающих специфику задачи Кеплера. Но ведь оба наши утверждения, прямое и обратное, тоже доказываются с помощью некоторых «конкретных соображений, учитывающих специфику задачи Кеплера». Чем же доказательство эквивалентности этих утверждений отличается от доказательства каждого из них? Принципиально — ничем: «под видом» вывода одного утверждения из второго можно «подсунуть» независимое доказательство первого утверждения. Но, видимо, можно стать на такую точку зрения, что доказательство эквивалентности двух утверждений должно быть проще, чем самостоятельное доказательство того или иного из этих утверждений. В данном случае действительно можно дать такое доказательство эквивалентности. Оно, пожалуй, и не намного короче (если вообще короче), но уж точно не требует особой изобретательности. В своё время Ньютон по поводу «половины» этой эквивалентности

$$\text{обратное утверждение} \Longrightarrow \text{прямое утверждение} \tag{51}$$

ограничился полутора фразами. Однако он фактически обращался к И. Бернулли — математику хотя и не высочайшего (как сам Ньютон), но всё же весьма высокого уровня. (См. часть 2 приложения VIII.) Я же обращаюсь к читателю, не предполагая у него ни подготовки, ни (увы!) способностей И. Бернулли. Поэтому полутора фразами я не обойдусь.

Если само по себе утверждение (51) имеет методическое и историческое значение, то при его доказательстве мы столкнёмся с другими утверждениями, значение которых является уже принципиальным. Поэтому я займусь преимущественно утверждением (51) и уделю лишь немного внимания доказательству того, что

$$\text{прямое утверждение} \Longrightarrow \text{обратное утверждение}. \tag{52}$$

Принципиальный момент в доказательстве утверждения (51) состоит в следующем. Зададимся каким-нибудь «начальным состоянием» материальной точки P,

---

[1] В общем виде связи между ними посвящена книжка [22].

находящейся в поле тяготения с центром в S, т. е. зададимся начальным положением P_0 этой точки в начальный момент времени $t = 0$ и её скоростью $\mathbf{v}_0$ в тот же момент. Согласно нашим физическим представлениям, точка P будет как-то двигаться, занимая в момент времени t какое-то положение $P(t)$ и имея скорость $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$, где, как обычно, $\mathbf{r} = \overrightarrow{SP}$. В чисто математическом отношении речь идёт о решении $\mathbf{r}(t)$ дифференциального уравнения (50) с предписанными «начальными данными»

$$\left(\mathbf{r}(0),\, \frac{d\mathbf{r}(0)}{dt}\right) = (\mathbf{r}_0,\, \mathbf{v}_0)$$

(говорят ещё о «начальном условии», которому удовлетворяет решение)[2]. С этой точки зрения утверждение, что P будет как-то двигаться, означает, что у уравнения (50) имеется решение с указанными начальными данными и что оно единственно.

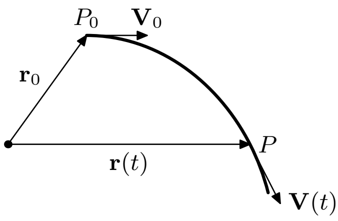


Рис. 72

Если мы уверены, что состояние при $t = 0$ однозначно определяет состояния в другие моменты времени, т. е. что после того, как материальную точку P поместили в начальное положение P_0 и придали ей начальную скорость $\mathbf{v}_0$, точка P будет как-то двигаться, то зачем ещё заниматься только что сформулированным математическим утверждением? Ответ: если мы заранее абсолютно уверены в точности нашего математического описания (так сказать, математической модели) природного процесса, то (по крайней мере с физической точки зрения) незачем. Но откуда может быть такая априорная уверенность? Научные труды, даже и такие, как «Начала» Ньютона, — не Священное писание, в точности которого не приходится сомневаться, раз оно продиктовано Богом. В точности математической модели можно убедиться только после тщательной проверки. (В нашем случае проверке подлежит, собственно, не только уравнение (50), но и то, что состояние материальной точки P действительно сводится к её положению и скорости. А что, если в «состояние» входит ещё и ускорение? А что, если даже и при пренебрежении размерами планеты надо всё-таки как-то учитывать её вращение? А уж о дифференциальном уравнении (50) и говорить нечего.)

Один из элементов такой проверки — проверка внутренней состоятельности модели: действительно ли уравнение (50) имеет решение с любыми наперёд предписанными начальными данными и притом ровно одно? Тогда, конечно, в этой математической модели состояние действительно описывается положением и скоростью. Это не гарантирует правильности модели (в модели двигаться-то P будет, но так ли, как на самом деле движутся планеты?[3]). В полной мере уверенность в правильности модели может основываться только на наблюдательных данных. Но

[2]Фигурирующее здесь $\mathbf{v}_0$, конечно, не имеет отношения к величине, обозначенной так же в § 6. Там это был некий вспомогательный вектор, который появился при решении задачи и который затем был геометрически представлен вектором $\overrightarrow{SV_0}$ в плоскости годографа. Сейчас же $\mathbf{v}_0$ — это значение скорости в начальный момент времени.

[3]Между прочим, по крайней мере дважды всерьёз (и на самом высоком уровне) обсуждался вопрос, что, может быть, сила притяжения не в точности обратно пропорциональна r^2. В середине XVIII в. в связи с движением Луны А. Клеро (1713—1765), Ж. Даламбер (1717—1783), Л. Эйлер (1707—1783) одно время пробовали добавлять к k/r^2 слагаемое, обратно пропорциональное r^3 или r^4, а во второй

если бы ответ на вопрос о внутренней согласованности модели был отрицательным, то модель уж точно не могла бы быть правильной (разве что ею можно было бы пользоваться в каких-то особых случаях, когда нужное нам решение всё-таки существует). Родственный исторический пример: в древности в «состояние» не включали скорость, а тогда получается, что состояние не должно меняться, т. е. в такой «модели» невозможно движение (см. приложение III). И что же? В эллинистический период уже была вполне приличная статика, но не было динамики (да, в сущности, и кинематики), в связи с чем движение планет рассматривалось вне всякой связи с механикой.

Помимо этой чисто теоретической стороны дела, есть ещё и такая: если действительно существует решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, то как это решение его найти? Практически в астрономии ситуация бывает иной — орбита планеты определяется не по начальным данным[4], а по нескольким наблюдениям, сделанным в разное время. Но разработка соответствующих способов требует предварительных исследований, для которых решение задачи Кеплера при известном начальном условии играет роль важной теоретической предпосылки. В механике вопрос об определении движения по известным начальным данным иногда представляет непосредственный интерес, иногда же он, как и в небесной механике, служит теоретической предпосылкой для исследования других вопросов.

Мы начнём с вопроса о решении задачи Кеплера с заданным начальным условием, — его называют «начальной задачей» или ещё «задачей Коши»[5] для дифферен-

---

половине XIX века в связи с движением Меркурия С. Ньюком (1835—1909) пробовал заменить k/r^2 на $k/r^{2+\delta}$ с некоторым ненулевым, хотя и малым δ. С Луной в конце концов уточнение теории, учитывающей влияние Солнца и других факторов, показало, что менять ньютоновскую формулировку закона всемирного тяготения незачем. С Меркурием пришли было к выводу, что надо или заменить показатель 2 на $2 + \delta$, или признать, что внутри орбиты Меркурия движется ещё одна планета, притяжение которой влияет на Меркурий. Но вопрос решился иначе. В начале XX в. появилась эйнштейновская теория гравитации, более точная, чем ньютоновская, и основанная на другой системе исходных понятий. Применительно к планетам Солнечной системы она вносит лишь небольшие поправки к ньютоновскому описанию их движений и объясняет те особенности движения Меркурия, которые смущали астрономов.

[4]Начальное положение планеты ещё можно в принципе считать известным, хотя и не очень точно. (Ещё в первой половине XX века непосредственно определялось только направление на планету, но теперь радиолокация позволяет измерить и расстояние до неё. Что же касается погрешностей, неизбежных при наблюдениях, то при нескольких наблюдениях погрешности отчасти как бы взаимно компенсируются, — это особая наука, — но когда мы говорим о начальных данных, то, значит, исходим из одного-единственного наблюдения, сделанного в этот момент; оттого я и сказал, что начальное положение планеты бывает известно не очень точно.) Однако со скоростью дело обстоит иначе. Прежде одно наблюдение ничего о ней не позволяло установить, а теперь радиолокация, используя эффект Допплера, позволяет найти компоненту скорости планеты (относительно Земли) в направлении на Землю, но не компоненту скорости в поперечном направлении.

[5]По имени великого французского математика О. Коши (1789—1857). Он первым сформулировал и исследовал начальную задачу не для какого-нибудь специального дифференциального уравнения (вроде, скажем, нашего уравнения (50)), а в общем виде. Надо заметить, что этот прогресс был достигнут не на пустом месте: уже Ньютон ясно представлял себе, по крайней мере для задач механического проис-

циального уравнения (50), — а потом увидим, что по внесении небольших изменений в обсуждение этого вопроса получается доказательство утверждения (51). Сперва же приведём более простой пример.

Рассмотрим движение материальной точки по прямой линии с координатой x, происходящее с постоянным ускорением a. (Например, таково движение под действием силы тяжести в вертикальном направлении возле Земли, где ускорение силы тяжести g можно считать постоянным. Если положительную полуось оси Ox направить вниз, то $a = g$.) На математическом языке речь идёт о решениях дифференциального уравнения $\ddot{x} = a$. Из школьного курса физики известно, что в момент времени t движущаяся точка имеет координату

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + Bt + C, \tag{53}$$

где B, C — некоторые константы (свои для каждого движения $x(t)$). Раз мы кое-как умеем дифференцировать, то, не повторяя рассуждений из этого курса, мы можем непосредственно проверить, что правая часть равенства (53) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\ddot{x} = a$. Остаются два вопроса:

— можно ли получить таким путём решение данного уравнения с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0? \tag{54}$$

— нет ли у уравнения $\ddot{x} = a$ других решений?

Для ответа на первый вопрос надо подобрать такие константы B, C, чтобы при $t = 0$ решение (53) удовлетворяло условиям (54). Читатель сам без труда найдёт, что надо взять $B = v_0$, $C = x_0$. Пусть теперь $x(t)$ — какое-нибудь решение уравнения $\ddot{x} = a$. Мы знаем, что у этого уравнения имеется решение $x_1(t)$ вида (53), удовлетворяющее начальному условию[6] $x_1(0) = x(0)$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}(0)$. Тогда $d^2(x - x_1)/dt^2 = 0$. Стало быть, $d(x - x_1)/dt$ — константа (одно и то же число при всех t). Но при $t = 0$ последняя производная (равная разности $\dot{x}(0) - \dot{x}_1(0)$) равна нулю, так что она должна равняться нулю при всех t. Теперь можно сделать вывод, что разность $x(t) - x_1(t)$ постоянна, а ведь при $t = 0$ она равна нулю.

В этом рассуждении нам помогло, что решения дифференциального уравнения $\ddot{x} = a$ мы знаем «в явном виде», т. е. можем написать для них формулу, указывающую

хождения, какими начальными данными определяется решение (хотя я не знаю, закрепил ли он это понимание в обобщающих формулировках), и он умел строить решения в виде рядов по степеням независимого переменного (в [7] указывается даже, что он считал последнее своим основным математическим достижением). Однако исследовать сходимость этих рядов в сколько-либо общем виде смог только Коши благодаря изобретённому им «способу мажорант». (Это только часть его обширного научного наследия.)

[6]То, что говорится о значении решения $x(t)$ и его производной при $t = 0$ (а значит, решение подразумевается определённым на каком-то интервале числовой оси, содержащем точку 0) не вносит никаких ограничений в наши рассуждения. Речь идёт просто о выборе начального момента отсчёта времени. Говоря более формально, если роль «начального момента» играет некоторое t_0, то можно перейти к «новому времени» — новой независимой переменной $t - t_0$ — и обозначить его снова через t. При этом ничего не изменится в дифференциальном уравнении $\ddot{x} = a$ (проверьте!) и правая часть равенства (53) останется функцией того же вида, только константы B и C могут измениться.

их зависимость от t. Для решений задачи Кеплера общей формулы нет[7], нет даже формулы для многих конкретных решений. Мы умеем описывать решения задачи Кеплера только несколько косвенным образом — это такие вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, которые удовлетворяют I и II законам Кеплера. (О III законе нет речи, пока говорится о движении одной планеты.) В I законе говорится, что орбита является кривой второго порядка с фокусом S. Это объект, который можно описать вполне обозримым образом (скажем, указав, в какой плоскости эта кривая лежит, какое направление имеет отрезок от S к перигелию и чему равен фокальный параметр p, а в случае эллипса или гиперболы — также чему равен эксцентриситет). С положением точки P на орбите дело обстоит сложнее (см. замечание 6.2), но во всяком случае мы знаем, что если орбита известна и если известно, где на ней находилась материальная точка P в начальный момент времени и какую она имела скорость, то тем самым однозначно определяется и положение точки P в любой другой момент времени t. (Хотя здесь нет ни явных формул, как для равномерно ускоренного движения, ни даже косвенного описания в терминах каких-то геометрических понятий, как для орбиты. Практически для нахождения соответствующего полярного угла $\varphi(t)$ приходится иметь дело с эксцентрической аномали́ей и уравнением Кеплера. Множитель $2\pi/T = M/(ab)$, фигурирующий в левой части уравнения Кеплера, однозначно определён, если известны форма орбиты и $(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)$.).

Поэтому мы ограничимся подбором конического сечения, которое будет орбитой.

Зная фокус S искомой кривой второго порядка и начальные данные $(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0)$, мы можем найти:

— прямую L, которая проходит через точку P_0 (имеющую радиус-вектор $\overrightarrow{SP_0} = \mathbf{r}_0$, т. е. ту точку, где находится «планета» в начальный момент времени); эта прямая является касательной к искомой орбите в точке P_0; заметим сразу же, что мы, как обычно, исключаем из рассмотрения тот случай, когда L проходит через S;

— плоскость орбиты (это есть плоскость Π, содержащая точку S и прямую L);

— прицельный параметр h_0 прямой L (т. е. длину перпендикуляра, опущенного из S на L); по нашему соглашению $h_0 \neq 0$;

— вращательный момент $M = h_0 v_0$ (где $v_0 = |\mathbf{v}_0|$);

— энергию $E = v_0^2/2 - k/r_0$.

Знак E определяет, будет ли орбита эллипсом, параболой или гиперболой.

Рассмотрим сперва случай параболы, который оказывается более простым. Если читатель проделал упражнение 7.10, то по ходу дела он мог убедиться, что перпендикуляр P_0H_0, опущенный из точки P_0 на директрису, должен образовывать тот же угол с начинающейся в P_0 «половиной касательной L», что и прямая SP_0, а его длина должна совпадать с длиной отрезка $|SP_0|$. (См. рис. 68, где вместо P_0 и H_0 фигурируют P и H. Можно, значит, сказать, что основание H_0 этого перпендикуляра симметрично точке S относительно прямой L.) Итак, директриса D должна проходить через известную нам точку H_0 и быть перпендикулярной известной нам прямой P_0H_0; этим директриса полностью определяется. Стало быть, полностью определяется и парабола с фокусом S и директрисой D. Эта парабола проходит через точку P_0 (ведь расстояния от точки P_0 до S и до D совпадают) и имеет в этой точке касательную L (ведь касательная должна быть биссектрисой угла $\angle SP_0H_0$). Мы видим, что имеется единственная парабола, проходящая через P_0 и имеющая там касательную L. Следовательно, эта парабола и является орбитой нашей материальной точки, ибо орбита должна быть как раз такой параболой.

[7] Дело не в том, что мы не знаем формулы, которая давала бы «общее» решение задачи Кеплера, а в том, что такой формулы не может быть. Это особая и очень интересная тема, но она увела бы нас слишком в сторону.

Займёмся теперь несколько более сложным случаем $E < 0$, когда орбита эллиптическая. Эллипсов, проходящих через P_0 и касающихся там прямой L, много, и чтобы выделить там нужный нам эллипс, нам понадобится ещё длина большой полуоси эллипса a. Её можно найти на основании формулы (38). Из § 7 мы знаем, что полупрямая L', начинающаяся в точке P_0 и проходящая через второй фокус S', расположена по ту же сторону от L, что и S, и образует с L такой же угол, что и P_0S. Этим L' определяется однозначно. Точку S' надо взять на этой полупрямой на расстоянии $|S'P_0| = 2a - |SP_0| = 2a - r_0$ от P_0. Тем самым эта точка однозначно определяется, а вместе с ней и эллипс, имеющий фокусы S, S' и длину большой полуоси a. Этот эллипс и является искомой орбитой (почему?).

Упражнение 8.1. Разберите случай $E > 0$.

Наше исследование начальной задачи для векторного дифференциального уравнения (50) показывает, что его решение однозначно определяется начальными данными $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Действительно, орбита определяется этими данными однозначно, а в замечании 6.2 указано, что движение материальной точки по орбите (происходящее согласно II закону Кеплера) однозначно определяется (при заданном вращательном моменте) начальным положением этой точки на орбите. Таким образом, в этом отношении наша математическая модель вполне соответствует нашим физическим представлениям.

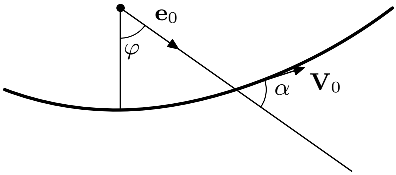
Доказательство утверждения (51) близко к только что проведенным рассуждениям о начальной задаче, но к ним надо кое-что добавить. Теперь мы не знаем заранее, действительно ли движение происходит по кривой второго порядка и действительно ли при этом выполняются различные соотношения, указанные в § 6. Но мы можем взять такую кривую второго порядка Γ, которая проходит через точку P_0 (начальное положение планеты) и имеет касательную L (проходящую через P_0 в направлении $\mathbf{v}$), и рассмотреть движение по этой кривой, происходящее согласно II закону Кеплера, т. е. согласно уравнению (40). Как обычно, обозначим радиус-вектор движущейся точки через $\mathbf{r}(t)$. Как мы знаем из решения обратной задачи Кеплера, при таком движении ускорение направлено в сторону S и равно по величине k_1/r^2, где k_1 — некоторая константа, зависящая, конечно, от конкретного выбора кривой Γ. Иными словами, $\ddot{\mathbf{r}} = -(k_1/r^2)\mathbf{r}/r$. Если при некотором выборе Γ окажется, что $k_1 = k$, то получится, что $\mathbf{r}(t)$ — решение векторного дифференциального уравнения (50). Это решение соответствует движению точки P по эллипсу с центром в S, т. е. движению, происходящему в соответствии с I законом Кеплера (а ещё раньше было сказано, что оно происходит также и в соответствии с II законом). Но предписание начальных данных $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ однозначно определяет движение точки P, а эти начальные данные у нас могли быть какими угодно (с единственной оговоркой, что мы игнорируем тот случай, когда L проходит через S). Стало быть, каково бы ни было начальное состояние материальной точки P, она движется в соответствии с I и II законами.

О том, как подобрать подходящую кривую Γ, будет сказано ниже. А сперва я остановлюсь на другом вопросе.

С математической точки зрения утверждение, что предписание начальных данных $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ однозначно определяет движение точки P, означает единственность решения $\mathbf{r}(t)$ дифференциального уравнения (50) с этими начальными данными. Ньютон использовал эту единственность, никак её не мотивируя. Видимо, она казалось ему чем-то само собой разумеющимся, а в подобных случаях аргументацию обычно не только не приводят, но часто и не додумывают её до конца. Несомненно, что у Ньютона были серьёзные основания для уверенности в единственности. Физические основания для подобной уверенности основывались, как уже отмечалось, на том, что состояние материальной точки определяется её положением и скоростью и что состояние в начальный момент времени определяет состояния в другие моменты; это общее положение, несомненно, оправдывалось опытом, относящимся к более простым случаям вроде равномерно ускоренного движения. Имелись и математические основания, см. часть 2 приложения VIII. Однако надо сказать, что у Ньютона в этом отношении всё же был пробел по крайней мере в изложении хода мыслей[8].

Перейдём к обсуждению того, как подобрать такую кривую Γ, что при движении по ней коэффициент k_1 окажется равным k. «Заглядывая в ответ», мы предполагаем, что орбита будет эллипсом, параболой или гиперболой в зависимости от знака энергии $E = v_0^2/2 - k/r_0$. Случай $E = 0$ по-прежнему оказывается более простым, и мы начнём с него. В этом случае мы догадываемся, что искомая кривая Γ должна быть параболой. Последняя должна проходить через P_0 и касаться L; как мы знаем, этими условиями парабола определяется однозначно. Надо выяснить, будет ли при использовании этой параболы выполняется равенство $k_1 = k$.

Естественно, приходится вновь подразумевать читателя, который проделал упражнение 7.10. Ему должно быть известно, что $k_1 = M^2/p_1$, где p_1 — фокальный параметр построенной параболы. Заранее не ясно, совпадает ли он с числом $p = M^2/k$. Мы фактически как раз и собираемся доказать их совпадение, откуда будет следовать совпадение k_1 и k.



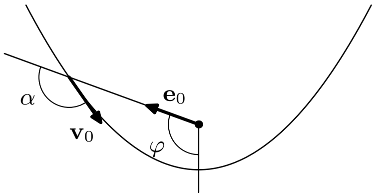


Рис. 73

[8]Выше мы видели, что применительно к задаче Кеплера единственность можно доказать, основываясь на решении прямой задачи. Но в изложении Ньютона исходным было решение обратной задачи, хотя он мог бы доказать единственность, опираясь на не доведённое до конца непосредственное исследование прямой задачи, см. часть 2 приложения VIII.

Во времена Ньютона и намного позднее никто не предъявлял Ньютону претензий в связи с данным вопросом — видимо, корифеи небесной механики XVIII в. разделяли те же не высказанные до конца доводы, что и он. В начале XIX в. А. Ф. Мёбиус (1790—1868), чувствуя потребность в чисто математической аргументации в пользу единственности в более общей ситуации, чем одна только задача Кеплера, привёл в своём учебнике небесной механики неправильное доказательство единственности. А Мёбиус был весьма известным учёным. (Для широких кругов любителей математики имя Мёбиуса связано с открытием примечательной поверхности, которую так и называют «листом Мёбиуса», но у него были и другие заслуги.) Ошибка такого автора в этом вопросе свидетельствует, что у последнего есть не столь уж очевидные стороны. («Техническое» замечание для подготовленных читателей: в отличие от Ньютона и корифеев XVIII в., Мёбиус почему-то не захотел опираться на аналитичность, хотя в его время всё ещё было принято считать все функции аналитическими. Может быть, адресуясь к не очень подготовленным читателям, он не хотел говорить об аналитичности, а может быть, он уже чувствовал, что в действительности дело не в ней.)

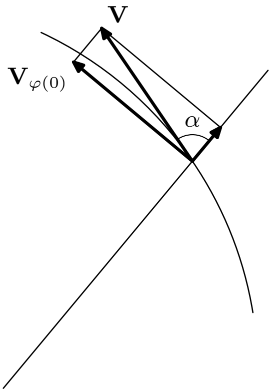


Рис. 74

Обозначим посредством α угол между векторами $\mathbf{e}_0 = \mathbf{r}_0/r_0$ и $\mathbf{v}_0$. Угол между прямыми SP_0 и L — это либо α, либо $180° - \alpha$, смотря по тому, будет ли $\alpha \leqslant 90°$ или $\alpha > 90°$. Угол $\angle SP_0H_0$ (обозначения те же, что и при разборе параболического случая перед упражнением 8.1) в два раза больше угла между указанными прямыми, поэтому он равен 2α или $360° - 2\alpha$. А перпендикулярный к D луч SK (пересекающий D в точке K) — это начальный луч системы полярных координат, обычно используемых нами в случае параболы, поэтому $\angle KSP_0$ — это, с точностью до знака, полярный угол φ_0 точки P_0. Углы $\angle KSP_0$ и $\angle H_0P_0S$ — это смежные углы при секущей SP_0 и параллельных прямых KS и H_0P_0, так что $\angle KSP_0 + \angle H_0P_0S = 180°$. Стало быть, угол $\varphi_0 = \angle KSP_0$ равен $180° - 2\alpha$ или $180° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha - 180°$. В обоих случаях $\cos\varphi_0 = -\cos 2\alpha$.

Согласно уравнению (13) получаем равенство $p_1 = r_0(1 + \cos\varphi_0) = 2r_0 \sin^2\alpha$. А $\sin\alpha$ фигурирует в выражении для проекции $v_\varphi(0)$ вектора $\mathbf{v}_0$ на касательную L к нашей параболе: $v_\varphi(0) = \pm v_0 \sin\alpha$ (знак может быть и $+$, и $-$, ибо, говоря об угле α, мы считаем этот угол положительным, не обращая внимания на то, в какую сторону надо поворачивать вектор $\mathbf{v}_0$, чтобы направить его по направлению вектора $\mathbf{v}_0$). Значит,

$$p_1 = 2r_0 \frac{v_\varphi^2(0)}{v_0^2} = 2\frac{r_0^2 v_\varphi^2(0)}{r_0 v_0^2} = 2\frac{M^2}{r_0 v_0^2}.$$

Вспомним, что мы имеем дело с параболой, когда

$$E = 0, \qquad \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{r_0} = 0, \qquad \frac{r_0 v_0^2}{2} = k.$$

Поэтому $p_1 = M^2/k$, а это и означает, что $k_1 = k$.

Переходим к случаю $E < 0$. В этом случае мы догадываемся, что искомой кривой Γ будет эллипс, и притом тот самый эллипс, построение которого было указано в связи с начальной задачей. Оно включает два шага: сперва чисто геометрически строится полупрямая, на которой должен лежать второй фокус S' эллипса; затем S' находится как та точка этой полупрямой, для которой $|S'P_0| = 2a - r_0$ (где $r_0 = |SP_0|$). Фигурирующее здесь a вычисляется по начальным данным на основании формулы (38). Теперь, когда мы «позабыли» о решении прямой задачи Кеплера в § 6 и хотим заново решить её с помощью результатов § 7, формулу (38) нельзя считать доказанной. Но мы всё-таки вправе взять такое a, которое получается из этой формулы. При этом надо ответить на два новых вопроса.

— Будет ли $2a > r_0$? Это вопрос об осуществимости нашего построения. Ведь если бы оказалось, что $2a < r_0$, то формула $|S'P_0| = 2a - r_0$ предписывала бы отрицательное расстояние от P_0 до S', что невозможно, а если бы оказалось, что $2a = r_0$, то та же формула предписывала бы, что $S' = P_0$, а это тоже невозможно — точки эллипса не являются его фокусами.

— Получится ли при таком a, что $k_1 = k$?

(При обсуждении начальной задачи этих вопросов не возникало. Там мы знали, что движение материальной точки согласно уравнению (2) с константой k происходит по тому самому эллипсу, который мы построили, — эллипсу, который проходит через точку P_0, касается там прямой L, имеет фокус S и длина большой полуоси которого равна a.)

Ответить на первый вопрос несложно. Раз $E < 0$, то $k/r_0 > k/r_0 - v_0^2/2 > 0$ и

$$2a = \frac{k}{|E|} = \frac{k}{\frac{k}{r_0} - \frac{v_0^2}{2}} > \frac{k}{k/r_0} = r_0.$$

Ответ на второй вопрос связан со следующей мыслью. В § 6 мы говорили о свойствах энергии, имея в виду, что движение происходит согласно законам механики, и опираясь на полученные нами результаты о прямой задаче Кеплера. А что можно сказать, если ничего этого мы не знаем, но зато располагаем определёнными сведениями об обратной задаче Кеплера? (Если мы рассчитываем на эквивалентность этих задач, то в конечном счёте должно получиться то же самое, но иным путём.)

Прежде всего, что теперь понимать под энергией? Так как теперь ускорение $\mathbf{w} = -(k_1/r^2)\mathbf{r}/r$ (а о коэффициенте k_1 мы ещё не выяснили, совпадает ли он с k), роль потенциальной энергии должна играть величина $-k_1/r$. Кинетическая же энергия, конечно, остаётся прежней — скорость как была $\mathbf{v}$, так и осталась. Итак, теперь мы называем энергией величину[9]

$$E_1 = \frac{v^2}{2} - \frac{k_1}{r}.$$

Сохраняется ли она при движениях, рассматриваемых в §§ 6, 7, и как она связана с величинами, характеризующими орбиту? Надо иметь в виду, что теперь мы заранее не знаем, имеют ли эксцентриситет и фокальный параметр нашей кривой Γ такие значения, какие можно найти на основании начальных данных, используя формулы из § 6, потому что эти формулы сейчас не доказаны. (Другое дело — a; мы просто взяли a, соответствующее формуле (38), и построили Γ как некоторый эллипс с большой полуосью a.) Поэтому временно лучше писать не e и p (оставляя эти обозначения для величин, фигурирующих в прежних формулах, например, в формулах (35) (в которой фигурирует какое-то — теперь непонятное — v_0) и (36)), а e_1 и p_1. Соответственно, теперь $r = p_1/(1 + e_1 \cos\varphi)$, а формулы (48) и (49) надо записывать так:

$$\mathbf{w} = \frac{M}{2b_1^2}\overrightarrow{S'P'}, \qquad \text{где} \quad b_1 = a\sqrt{1 - e_1^2},$$

$$k_1 = \frac{M^2}{p_1}. \tag{55}$$

Формулу для $\mathbf{w}$ можно использовать, чтобы выразить $v = |\mathbf{w}|$ через φ и параметры эллипса: применив теорему косинусов к треугольнику $\triangle S'SP$, получаем

$$|S'P'|^2 = |S'S|^2 + |SP'|^2 - 2|S'S| \cdot |SP'| \cos\angle S'SP =$$
$$= 4e_1^2a^2 + 4a^2 + 8e_1a \cdot 2a\cos\varphi = 4a^2(1 + e_1^2 + 2e_1\cos\varphi)$$

(здесь использовано, что $\angle S'SP = 180^\circ - \varphi$). Стало быть,

$$v^2 = \frac{M^2}{4a^4(1 - e_1^2)^2}4a^2(1 + e_1^2 + 2e_1\cos\varphi) = \frac{M^2}{p_1^2}(1 + e_1^2 + 2e_1\cos\varphi).$$

[9] Но не будем забывать и о прежней энергии $E = v^2/2 - k/r$. Мы теперь «не знаем», сохраняется ли она при движении, но мы использовали значение E в начальный момент времени, чтобы предписать длину большой полуоси эллипса a.

Теперь можно найти E_1:

$$E_1 = \frac{v^2}{2} - \frac{k_1}{r} = \frac{M^2}{2p_1^2}(e_1^2 + 1 + 2e_1\cos\varphi) - \frac{k_1}{p_1}(1 + e_1\cos\varphi).$$

Ввиду равенств (55) множители $\dfrac{M^2}{p_1^2}$ и $\dfrac{k_1}{p_1}$ равны, и получается, что

$$E_1 = \frac{k_1}{2p_1}(e_1^2 - 1),$$

а в интересующем нас случае, когда $e_1 \neq 1$, это даёт точный аналог формулы (38):

$$|E_1| = \frac{k_1}{2a}.$$

Заметим ещё, что сейчас (когда Γ — эллипс) $e_1 < 1$ и, значит, $E_1 < 0$.

А теперь легко получается, что $k_1 = k$. Мы с самого начала взяли $a = k/(2|E|)$, где E вычисляется по начальным данным (и с той константой k, которая фигурирует в исходной постановке задачи Кеплера). С другой стороны, мы установили, что $a = k_1/(2|E_1|)$, где E_1 соответствует рассматриваемому движению по Γ. Это E_1 можно вычислять в любой момент времени; мы возьмём начальный момент, когда движущаяся точка занимает положение P_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и имеет скорость $v(0) = v_0$[10]. Учитывая ещё знаки, имеем

$$|E| = \frac{k}{r_0} - \frac{v_0^2}{2}, \qquad |E_1| = \frac{k_1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2},$$

и раз $\dfrac{|E|}{k} = \dfrac{|E_1|}{k_1}$, то

$$\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2k} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2k_1},$$

откуда и явствует, что $k = k_1$.

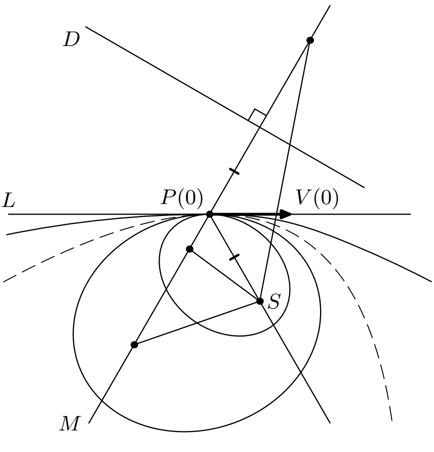


Рис. 75.

Упражнение 8.2. Разберите случай $E > 0$[11].

Итак, мы смогли доказать утверждение (51), и тем самым нам осталось убедиться в справедливости обратного умозаключения (52). Оно не имеет такого исторического значения и принципиальных связей, как (51), и я позволю себе быть здесь намного более кратким.

Нам дано, что P движется по кривой второго порядка Γ с фокусом S в соответствии со II законом Кеплера, занимая в момент времени t положение $P(t)$ с радиус-вектором $\overrightarrow{SP(t)} = \mathbf{r}(t)$ и имея при этом скорость $\mathbf{v}(t)$. Нас интересует ускорение этой точки.

Решение прямой задачи Кеплера теперь подразумевается известным. Стало быть, мы знаем, что при любом k материальная точка Q, которая движется в центральном поле вида $-(kr^2)\mathbf{r}/r$ и которая занимает в начальный момент времени положение

[10] Не путайте это v_0 с v_0 из § 6.

[11] Чем это упражнение отличается от упражнения 8.1?

$Q(0) = P(0)$ (т. е. то же положение, что и P) и имеет при этом скорость $\mathbf{v}(0)$, будет двигаться по некоторой кривой второго порядка Γ_1 с фокусом в S. При различных k получаются различные кривые Γ_1; все они проходят через $P(0)$ и касаются в этой точке вектора $\mathbf{v}(0)$. (На рис. 75 изображены четыре такие кривые Γ_1 — два эллипса, пунктирная парабола и гипербола. Через L обозначена линия действия вектора $\mathbf{v}_0$, являющаяся касательной ко всем Γ_1, через M — проходящая через $P(0)$ прямая, образующая с L тот же угол, что и $SP(0)$. Эллипсы и гиперболы получаются при различных расположениях второго фокуса на M. Директриса параболы перпендикулярна M и отстоит от $P(0)$ на расстояние, равное $|SP(0)|$.) Мы подберём такое k, что кривая Γ_1 окажется совпадающей с Γ. В таком случае при всех t будет выполняться равенство $Q(t) = P(t)$ (почему?); следовательно, ускорение нашей точки P должно будет совпадать с ускорением точки Q, а о последнем мы знаем[12], что оно направлено к S и обратно пропорционально r^2.

Небольшая хитрость заметно облегчает подбор k. Во время своего движения по Γ точка $P(t)$ в какой-то момент времени проходит через перигелий (ближайшую к S точку орбиты). Вот этот-то момент мы и примем за начальный.

---

[12]При большом педантизме можно придраться к тому, что в этом рассуждении подразумевается само собой разумеющимся, что при предписанных начальных данных $(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0))$ существует решение векторного дифференциального уравнения (50) с этими начальными данными. Доказывая утверждение (51), мы заодно убедились, что это так, но сейчас правила игры изменились, и мы «не знаем» того, что знали тогда. (В §§ 5, 6 мы доказали, что если решение существует, то оно обладает определёнными свойствами, но вдруг наша «математическая модель» настолько несостоятельна, что такого решения не существует?) Сейчас мы можем оправдывать это молчаливо принятое предположение ссылкой либо на физическую интуицию (должна же точка Q, помещённая в указанное поле, как-то двигаться, какими бы ни были её начальное положение и скорость!), либо на некую общую теорему о дифференциальных уравнениях, которую я даже не буду формулировать. Первое интуитивно убедительно, но не столь уж безукоризненно с чисто математической точки зрения. Второе с этой точки зрения безукоризненно, если читатель готов поверить автору на слово, а с физической точки зрения, вероятно, излишне.

Конечно, в физике и других науках, использующих математику, далеко не всегда доказывают существование рассматриваемых объектов (скажем, решений дифференциальных уравнений). Но в чистой математике надо доказывать всё.

В связи с этим укажу забавный пример, который по другому поводу привёл немецкий математик О. Перрон (1880—1975) и который в гротескном стиле демонстрирует, что если, ничтоже сумняшеся, подразумевать как достоверный факт существование некоторого объекта (хотя на самом деле такового может не быть), то можно прийти к неверным выводам.

«Теорема»: единица является самым большим натуральным (т. е. положительным целым) числом. «Доказательство»: пусть n — наибольшее натуральное число. Тогда n^2 тоже натуральное число, и потому оно не превосходит n. Отсюда $n - n^2 \geqslant 0$, $n(1 - n) \geqslant 0$, и раз $n > 0$, то получается, что $1 - n \geqslant 0$, $n \leqslant 1$. Но n не может быть меньше единицы, значит, $n = 1$, что и требовалось доказать. Рассуждение после слова «Тогда» столь просто, что ошибиться в нём негде. Ошибка содержится в первой фразе: «Пусть n — наибольшее натуральное число», которая совмещает в себе (не выделенное явно) утверждение, что среди натуральных чисел имеется наибольшее, и обозначение для этого числа. Перрон нарочно отредактировал фразу так, чтобы «сомнительное» утверждение маскировалось невинным соглашением об обозначениях и чтобы в то же время эта «хитрость» была шита белыми нитками.

Если дана кривая второго порядка Γ, то известен фокальный параметр p, а по начальным данным вычисляется момент M. При движении точки Q согласно уравнению (50) орбита Γ_1 будет некоторым коническим сечением Γ_1, фокальный параметр которого $p_1 = M^2/k$ (см. (36); я сейчас написал p_1, потому что в общем случае, при произвольном k, это p_1 может отличаться от p). Но если $\Gamma_1 = \Gamma$, то, в частности, $p_1 = p$. Значит, коэффициент k надо взять равным M^2/p.

Дальше надо отдельно рассматривать случаи эллипса, параболы и гиперболы. Второй из них, как обычно, оказывается проще. Равенство $\Gamma_1 = \Gamma$ будет обеспечено, если Γ_1 — парабола, потому что имеется только одна парабола с фокусом S, проходящая через точку $P(0)$ и касающаяся там $\mathbf{v}(0)$[13], а между тем и исходная парабола Γ, и вспомогательная орбита Γ_1 именно таковы. Кривая Γ_1 — парабола, если $E=0$. Проверим, что при нашем выборе k так и будет.

Точка $P(0)$ — перигелий, т. е. вершина параболы. Расстояние r_0 от S до вершины равно $p/2$, а скорость $\mathbf{v}(0)$ перпендикулярна $SP(0)$; стало быть, прицельный параметр совпадает с r_0 и тоже равен $p/2$. Отсюда $M = pv(0)/2$,

$$k = \frac{M^2}{p} = \frac{(v(0)p)^2}{4p} = \frac{pv^2(0)}{4},$$
$$\frac{k}{r_0} = \frac{pv^2(0)}{4}\frac{2}{p} = \frac{v^2(0)}{2},$$

и ясно, что $E=0$.

В случае эллипса Γ при прохождении точки P через перигелий мы имеем соотношения

$$h_0 = r_0 = a - c = a(1-e),$$

так что

$$M = v(0)a(1-e), \qquad k = \frac{M^2}{p} = \frac{v^2(0)a^2(1-e)^2}{a(1-e^2)} = v^2(0)a\frac{1-e}{1+e},$$
$$\frac{k}{r_0} = v^2(0)a\frac{1-e}{1+e}\frac{1}{a(1-e)} = \frac{v^2(0)}{1+e},$$
$$E = \frac{v^2(0)}{2} - \frac{v^2(0)}{1+e} = \frac{e-1}{2(1+e)}v^2(0).$$

(В этом вычислении мы не использовали никаких данных о Γ_1, а только о Γ.) Отсюда видно, прежде всего, что Γ_1 тоже эллипс (раз $e<1$, то $E<0$). Теперь из формулы (38) получается, что длина большой полуоси a_1 этого эллипса вычисляется по формуле

$$a_1 = \frac{k}{2|E|} = v^2(0)a\frac{1-e}{1+e}\frac{(1+e)v^2(0)}{1-e} = a.$$

Раз у Γ и Γ_1 совпадают и длины больших полуосей, и фокальные параметры, то совпадают и эксцентриситеты, а также длины b и c. Поскольку ближайшая к S вершина эллипса $P(0)$ лежит на главной оси, расстояние от S' до $P(0)$ равно $a+c$. Иными словами, второй фокус эллипса Γ_1 совпадает со вторым фокусом эллипса Γ. И раз длины главных полуосей у них одинаковы, то $\Gamma_1 = \Gamma$.

Упражнение 8.3. Рассмотрите случай гиперболы.

---

[13]Мы в этом убедились, когда говорили о решении дифференциального уравнения (50) с заданными начальными данными. В данном случае всё сводится к простому геометрическому рассуждению и не связано непосредственно ни с утверждением (51), ни с утверждением (52).

Приложение I. До Кеплера

Эта книжка посвящена в основном событиям в науке, происходившим в XVII веке. Но, как это бывает в некоторых пьесах, основному действию можно было бы предпослать вступительный акт, посвящённый событиям, происходившим до того. Только у нас этот акт вынесен в приложение.

Очень давно — вероятно, ещё в доисторическую эпоху, — люди заметили, что небосвод вращается, делая один оборот за одни сутки, и что относительное расположение большинства светил (общая картина созвездий) при этом не меняется, но что есть несколько исключительных светил, которые помимо участия в общем вращении имеют ещё своё собственное движение, более медленное, но вполне заметное благодаря тому, что за несколько дней становится заметным изменение положения этих светил относительно остальных. Таких светил семь: Солнце, Луна и ещё пять, которые мы теперь называем планетами, — Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн. Слово «планета» на древнегреческом языке означает «блуждающая звезда», поэтому древние астрономы (уже в историческую эпоху) причисляли Солнце и Луну, которые тоже «блуждают» (среди «неподвижных звёзд»), к «планетам», хотя, конечно, они не хуже нас знали, что своими размерами и яркостью Солнце и Луна резко отличаются от всех остальных светил. Для древних астрономов главная задача состояла в описании движения небесных светил, а в этом отношении для Солнца и Луны возникали примерно такие же трудности, как и для пяти настоящих планет[1]. Кстати, отличие других планет от звёзд тоже не сводится к их движению: звёзды мерцают, а планеты нет; яркость звёзд постоянна, а планет — нет.

На самом деле последнее не совсем верно. Во-первых, иногда на короткий срок на небе появляются «новые звёзды», которые затем исчезают. Средневековые арабы придумали красивое объяснение этому феномену: дьявол, завидуя богу, пытается создать себе свою собственную звезду, но у него что-то не получается — звезда посветит и погаснет. Во-вторых, имеются переменные звёзды, которые светят то ярче, то тусклее. Первую такую звезду (β Персея, т. е. вторая по яркости звезда в этом созвездии) открыли арабы, связавшие её с упомянутым выше отрицательным персонажем, откуда и её другое название

[1] Ведя в этом приложении речь о древней астрономии, я буду говорить (точнее, писать) «планеты» (в кавычках), когда я, как и астрономы того времени, причисляю Солнце и Луну к числу планет, и планеты (без кавычек), когда подразумевается 5 настоящих планет. В других местах книги «планет» нет — после Коперника нельзя было не отличать Солнце и Луну (как спутник Земли) от пяти планет.

«Алголь» — европеизированное «Эль-Гуль», дьявол. Эти звёзды хоть всё-таки остаются на своих местах, но, в-третьих, время от времени на небе появляются объекты, совсем не похожие на остальное: проносятся падающие звёзды и иногда — более яркие болиды; порой появляются кометы. Читатель, вероятно, знает, что по части новых и переменных звёзд дьявол давно реабилитирован и что любой из названных объектов заслуживает особого разговора. Но это не относится к нашей теме и не меняет отмеченных выше различий между «планетами» (включая Солнце, которое на самом деле является довольно типичной звездой) и «неподвижными звёздами» (которые на самом деле всё-таки не совсем неподвижны, см. ниже). Тем более что древние греки, к которым мы сейчас обратимся, сомневались в «небесной принадлежности» падающих звёзд и комет, а о переменных звёздах не знали[2].

Одним из первых научных достижений древних греков было открытие шарообразности Земли, приписываемое Пифагору (ок. 580—500 до н. э.). Это отразилось и на представлениях о небосводе, который раньше считался чашей, опрокинутой над плоской Землёй[3], теперь же его стали рассматривать как небесную сферу с центром в центре Земли. В современной астрономии тоже говорят о небесной сфере — конеч-

[2]Зато одна новая звезда, по дошедшим до нас сведениям, оказала науке немалую услугу: она побудила великого древнегреческого астронома Гиппарха (около 150 г. до н. э.) составить каталог звёзд, дабы в дальнейшем при появлении новой звезды можно было проверить, действительно ли её раньше не было. Это, по-видимому, был первый более или менее систематический каталог, хотя координаты ряда звёзд определялись и раньше.

Теперь мы знаем, что Гиппарх наблюдал так называемую сверхновую звезду, при вспышке которой — собственно, не вспышке, а взрыве, — излучается в миллион раз больше энергии, чем при вспышке обычной новой звезды, а то и более того. Поэтому с Земли могут быть видны сверхновые, взорвавшиеся в любой части нашей Галактики, если только этому не мешает поглощение света в межзвёздной среде, особенно в газопылевых облаках. Несколько других «новых» звёзд, наблюдавшихся в древности и в средние века, тоже были сверхновыми. Все они находились намного дальше обычных новых и всё же казались ярче — их было видно даже днём; они намного дольше, чем обычные новые, оставались достаточно яркими, чтобы на них могли обратить внимание. Но после Гиппарха только в 1572 г. в Галактике вспыхнула сверхновая, которая сразу же принесла пользу науке, см. приложение II. (Я говорю о пользе, принесённой сразу же, потому что в наши дни, когда научились обнаруживать остатки сверхновых звёзд, старинные записи стали приносить пользу, помогая уточнить время и некоторые характеристики взрыва — продолжительность периода, когда звезда была видна днём, а затем когда она ещё была видна ночью, яркость, которую обычно сравнивали с яркостью других звёзд и планет, цвет, который обычно менялся со временем.)

[3]Таких представлений придерживались вполне культурные народы, например древние египтяне, полагавшие, что Солнце по ночам проходит под Землёй с запада на восток, причём это подземное путешествие является трудным и опасным — приходится сражаться с подземными чудовищами.

но, имея в виду не хрустальную сферу, на которой древние размещали звёзды, а воображаемую сферу очень большого радиуса с центром в центре Земли. Радиус столь велик, что направления на любую точку этой сферы из любой точки Земли практически одинаковы. Эта сфера нужна для того, чтобы характеризовать направления на небесные объекты. (Более абстрактно можно сказать, что современная небесная сфера — это как раз «сфера направлений», но я не буду уточнять эту мысль). Как и на Земле, положение точки на небесной сфере характеризуется её координатами (см. ниже).

Земля вращается вокруг своей оси, причём практически равномерно (небольшие неравномерности в её вращении были обнаружены только около 1900 г.; см. [44]; для нас они несущественны). Нам же кажется, что Земля неподвижна, а вращается небесная сфера вместе со всеми небесными светилами. Она вращается вокруг невидимой оси, направление которой, конечно, есть просто направление земной оси и которую называют «осью мира» — ни мало, ни много, как всего мира! В старину это название понимали буквально, а теперь употребляют как дань традиции. Ось мира пересекает небесную сферу в двух полюсах («полюса мира»). Северный полюс расположен около хорошо известной Полярной звезды, а южный нам, жителям России, не виден. (Но и там, где он должен быть виден, указать его положение труднее, ибо около него никакой заметной звезды нет.) Вращение небесной сферы происходит в направлении с востока на запад. (Впрочем, это сказано не совсем точно. С востока на запад движется большинство звёзд, но возле полюса, как всегда при вращении вокруг некоторого центра, направления движения различных звёзд различны и часть их движется с запада на восток.) Звёзды неподвижны относительно небесной сферы. (Так считалось с древности до 1718 г. На самом деле звёзды двигаются в пространстве и в результате у ряда звёзд, которые не слишком далеки от нас, удалось обнаружить их собственное движение по небесной сфере. Впервые это сделал в 1718 г. Э. Галлей (1656—1742), о котором широкая публика в наши дни знает по той причине, что он догадался о периодических возвращениях кометы, называемой теперь его именем[4]. Собственное движение звёзд очень медленное — измеряется секундами в год; Галлей обнаружил его, сопоставляя новые данные о положении этих звёзд на небесной сфере с древнегреческими, а одна звезда — Сириус — заметно сместилась даже со сравнительно недавних времён Тихо де Браге, о котором см. в приложении II. Если точность древнегреческих каталогов

[4]Это имя, кстати, англичане произносят как «Хэлли». Изменить русскою транскрипцию имени астронома было бы возможно, но едва ли можно изменить транскрипцию названия кометы.

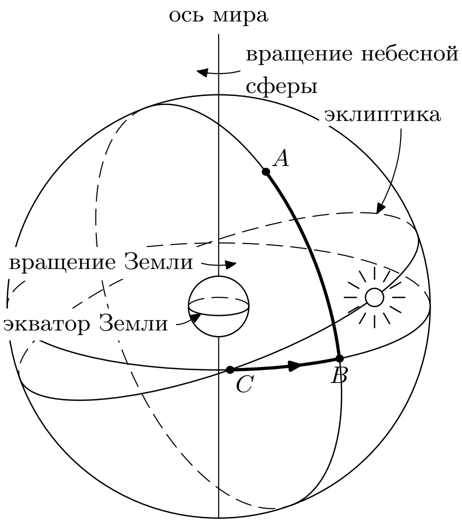


Рис. 76

ещё могла вызывать сомнения, то уж в точности наблюдений Тихо сомнений не было.) «Планеты» же (включая Солнце и Луну) как бы ползают по этой вращающейся сфере, что можно заметить за несколько дней по изменению их положения относительно неподвижных звёзд. Задача, которую уже в древности ставили перед собой астрономы, состоит в описании этого движения, причём не только качественном, но и количественном. Поскольку на небесной сфере имеются координаты (см. ниже), можно спросить, какие координаты будет иметь, скажем, Юпитер ровно через год после того момента, когда пишутся эти строки.

Ниже ради полноты и конкретности описывается одна из употребляющихся в астрономии систем координат на небесной сфере, хотя надо сказать, что это не связано непосредственно с нашей основной темой — выводом законов Кеплера. Зато при этом представится случай сказать об одном из крупнейших астрономических открытий древности — предварении равноденствий. В то же время понятно, что если вывод законов Кеплера из законов механики не требует использования координат на небесной сфере, то обращение к ним неизбежно при переходе от движения планеты по законам Кеплера к её видимому перемещению по небесной сфере. Это чисто математическая задача, которой мы не будем заниматься, но которую был вынужден решать уже сам Кеплер.

Проекция земного экватора на небесную сферу называется экватором небесной сферы или небесным экватором. Он является большим кругом этой сферы[5], равноотстоящим от её полюсов. Проекция земной орбиты на небесную сферу называется эклиптикой. Это один из больших кругов этой сферы (он получается как её пересечение с проходящей через её центр плоскостью земной орбиты). С Земли кажется, что по эклиптике с востока на запад движется Солнце, делая один оборот за год. Из-за этого движения Солнца мы видим по ночам разные созвездия летом и зимой: раз летом и зимой положение Солнца на небесной сфере бывает диаметрально противоположным, то созвездия, оказывающиеся над горизонтом, когда Солнце под горизонтом, — именно их мы и видим ночью, — оказываются различными. Эклиптика не совпадает с экватором; эти два больших круга пересекаются под углом примерно 23° в двух диаметрально противоположных точках, называемых точками весеннего и осеннего равноденствий. Название связано с тем, что, когда Солнце проходит через точку равноденствия, продолжительность дня всюду на Земле должна точно равняться продолжительности ночи. На самом деле это не совсем так из-за преломления лучей света в земной атмосфере (атмосферной рефракции); день получается на несколько минут длиннее. Об этом знали ещё древние греки, по крайней мере Птолемей, который жил во II в. н. э. и на котором история античной астрономии практически завершается. Но мы не будем принимать рефракцию во внимание. Хотя видимый путь Солнца по небесной сфере известен, с описанием движения Солнца возникают проблемы, потому что оно не совсем равномерное: осенью и зимой оно быстрее. Весна и лето (от точки весеннего равноденствия к точке осеннего) — 186 дней, осень и зима — 179. Эта неравномерность отражает тот факт, что Земля движется по эллипсу с неравномерной скоростью. Когда она ближе к Солнцу (это бывает осенью и зимой[6], то движется несколько быстрее (что следует из II закона Кеплера). Для наблюдений, при которых фиксируется только направление от Земли на Солнце, изменения скорости Земли существенны потому, что они отражаются на её угловой скорости относительно Солнца. Иными словами, если мы будем измерять угол в плоскости земной орбиты между двумя лучами с вершиной в Солнце, один из которых направлен в какую-нибудь фиксированную точку орбиты, — скажем, туда, где Земля оказывается в день весеннего равноденствия, — а другой направлен в движущуюся по орбите Землю, то этот

[5] Большие круги — это круги на сфере, получающиеся как её пересечения с плоскостями, проходящими через центр. Круги, получающиеся при пересечении сферы с плоскостями, не проходящими через её центр, называются малыми.

[6] Но хотя зимой Земля чуть ближе к Солнцу, чем летом, это не делает зиму более тёплым временем года — разница слишком небольшая. Главную роль играет наклон солнечных лучей (и связанная с ним продолжительность светового дня).

угол возрастает со временем, но он изменяется иногда быстрее, иногда медленнее. (Скорость изменения этого угла и есть та самая угловая скорость, о которой говорилось выше.) А при наблюдении с Земли это проявляется таким образом, что угол между направлением в точку весеннего равноденствия и направлением на Солнце изменяется неравномерно.

Теперь можно сказать, какие координаты используются на небесной сфере. Они называются экваториальными координатами[7] и аналогичны известным из географии широте и долготе. В географии проводят через данную точку на Земле и полюса большой круг — меридиан. Аналогично на небесной сфере проводят большой круг через данное светило и полюса мира; он называется кругом склонения. Угловое расстояние между небесным экватором и светилом, отсчитываемое по кругу склонения (дуга AB на рис. 76), называется склонением светила; в южном полушарии оно берётся со знаком минус. Склонение аналогично географической широте. Угловое расстояние между точкой весеннего равноденствия и кругом склонения, отсчитанное вдоль небесного экватора в сторону, противоположную направлению видимого вращения небесной сферы (дуга CB на рис. 76), называется прямым восхождением светила. Оно аналогично географической долготе, причём круг склонения, проходящий через точку весеннего равноденствия, играет роль, аналогичную роли Гринвичского меридиана. Но только на Земле от Гринвичского меридиана ведут отсчёт долготы в обоих направлениях — к востоку и западу, и соответственно долгота бывает восточной или западной, а вот прямое восхождение отсчитывается только в одну сторону. Значит, оно должно было бы принимать значения от 0° до 360°. Однако — в этом состоит второе отличие прямого восхождения от долготы — для прямого восхождения принято измерять углы не в градусах и соответствующих их долях, а иначе. Экватор делят на 24 равные части («часы»); таким образом, час как угловая мера равен 15 градусам. Час делят на 60 «минут», минуту — на 60 «секунд» (таким образом, эти новые минуты и секунды в 15 раз больше привычных из геометрии). Это, конечно, связано с тем, что небесная сфера делает один оборот за 24 часа, вращаясь равномерно, поэтому использование новой меры углов упрощает вычисления, которые нужны, чтобы по координатам небесного светила в экваториальной системе определить направление на него в данной точке Земли и в данное время. Но так как мы таких вычислений делать не будем, использовать «угловые» часы и их доли нам не понадобится, так что везде в этой книжке минуты и секунды обычные.

[7] Как уже говорилось, я описываю только одну из нескольких используемых в астрономии систем координат на небесной сфере.

Луна тоже движется по небесной сфере с запада на восток, делая один оборот примерно за 28 дней. Она также движется приблизительно по некоторому большому кругу (проекция на небесную сферу орбиты, по которой Луна движется вокруг Земли), но если путь Солнца всегда эклиптика (по крайней мере, это так с той точностью, которая была достижима в дотелескопическую эру), то видимый путь Луны всё-таки не совсем большой круг. Со временем он заметно изменяется. (Прежде всего, Луна движется как бы по поворачивающемуся со временем большому кругу, так что её видимый путь на небесной сфере, строго говоря, вообще не является замкнутой кривой.) И, как у Солнца, движение Луны не является равномерным.

Движение планет является более сложным в качественном отношении. В основном они тоже движутся по сфере неподвижных звёзд с запада на восток, но иногда останавливаются и некоторое время движутся в обратную сторону (это называется «обратным движением», тогда как более обычное движение с запада на восток называют «прямым»). При этом их путь выглядит весьма замысловато — из-за обратного движения получаются зигзаги и петли, причём не похожие друг на друга.

У Луны, как и у Солнца, попятного движения нет, но в количественном отношении её движение оказывается даже более сложной задачей, чем движение планет. До Ньютона это приходилось принимать просто как эмпирический факт, но теперь мы знаем причину. Хотя все планеты притягивают друг друга, но по сравнению с притяжением Солнца это их взаимное притяжение мало и довольно незначительно влияет на их движение. С этим влиянием стали считаться только в XVIII в., когда и точность наблюдений возросла, и теория развилась. С той же точностью, которая была до того, движение планет описывается законами Кеплера. Иначе обстоит дело с Луной. Для неё силы притяжения Солнца и Земли примерно одинаковы[8]; кроме того, на движение Луны заметно влияет небольшая сплюснутость Земли, из-за которого гравитационное поле

[8]Точнее, притяжение к Солнцу примерно вдвое сильнее. Почему же Луна тогда вращается вокруг Земли, а не падает на Солнце? Потому что и Земля, и Луна вместе обращаются вокруг Солнца, образуя как бы «двойную планету», и при этом обе части этой планеты вращаются вокруг их общего центра тяжести. На движение Луны относительно Земли влияет только разность между тем, как они обе притягиваются к Солнцу, точнее говоря, разность между теми ускорениями, которые они получают под действием этого притяжения. А она равна примерно 1%. Это достаточно мало, чтобы считать, что в основном движение Луны происходит под действием притяжения одной только Земли, а Солнце только вносит в это движения некоторые относительно небольшие изменения, как говорят, «возмущает» его. Но это значительно больше, чем возмущения в движении планет, возникающие вследствие их взаимного притяжения.

Земли не совсем такое, как если бы Земля была шаром. (Напомню, что, как доказал Ньютон, однородный шар или шар, состоящий из концентрических однородных слоёв, создаёт вне себя такое же поле тяготения, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре; такое притяжение описывается известной простой формулой.) Наконец, влияет и притяжение других планет. Все эти факторы, из которых главным является притяжение Солнца, сказываются на движении Луны настолько значительно, что её движение вокруг Земли описывается законами Кеплера значительно хуже, и уже в древности заметили и отчасти научились учитывать такие особенности её движения, которые, как мы теперь знаем, из этих законов не следуют. По сравнению с другими светилами положение с Луной усложняется ещё и потому, что Луна намного ближе к нам и поэтому мы замечаем такие неправильности в её движении, которые у других светил остались бы незамеченными.

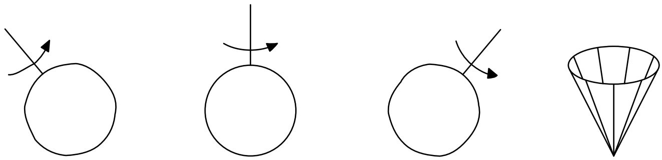


Рис. 77

Ещё один (и для нас последний) тип небесного движения — это «предварение равноденствий», открытое великим древнегреческим астрономом Гиппархом, который жил во II в. до н. э.[9] Физическая сущность этого явления состоит в том, что ось Земли не сохраняет постоянного направления в пространстве (это называется «прецессией»). Вместе с осью «покачивается» и вся Земля; положение оси внутри земного шара не меняется. Если откладывать направление оси от одной точки, то получится, что ось со временем описывает конус; время одного оборота — 26000 лет. Ньютон понял, что, как и некоторые особенности движения Луны, прецессия земной оси связана со сплюснутостью Земли. Если бы Земля была однородным шаром или состояла из однородных концентрических слоёв, то притяжение Луны и Солнца не влияло бы на её вращение[10]. Но так как Земля слегка сплюснута у полю-

[9]Впрочем, в литературе встречается указание, что это открытие ещё раньше сделал месопотамский астроном Киданну.

[10]Это утверждение напоминает упоминавшееся выше другое утверждение — что поле тяготения однородного шара (или шара, состоящего из однородных концентрических слоёв) такое же, как у материальной точки той же массы. Но это всё-таки разные утверждения.

сов, её можно представить себе как шар, к которому добавлен выступ, наиболее значительный у земного экватора, и надо посмотреть, как влияет притяжение Луны на этот выступ. Луна сильнее притягивает тот конец экваториального выступа, который к ней ближе, и тем самым она как бы стремится повернуть выступ, но этому мешает основной земной шар. Если бы выступа не было, то ось вращения шара сохраняла бы своё направление, но выступ давит на этот шар. Картина усложняется из-за того, что шар и выступ вращаются, Луна, вращаясь вокруг Земли, в различное время стремится повернуть выступ в различном направлении и, наконец, Солнце тоже по-разному притягивает различные части экваториального выступа. Здесь существенно только различие между притяжением к Солнцу различных частей выступа, и, оказывается, в этом отношении влияние притяжения Солнца примерно вдвое меньше влияния притяжения Луны, хотя вообще-то сила притяжения Солнца намного превосходит лунную. Всё это приводит к тому, что ось вращения Земли не сохраняет постоянного направления.

Такова физическая причина прецессии земной оси, указанная Ньютоном. В этой физической картине не учитывается ряд факторов (например, притяжение других планет), но самые главные факторы указаны правильно. Однако математическое отражение этой картины у Ньютона было неточным. Ньютон неточно формулировал законы вращательного движения (в общем случае точные формулировки были найдены только в середине XVIII в. Ж. Даламбером и в окончательном виде Л. Эйлером); кроме того, он приближённо заменил экваториальный выступ своего рода «обручем», надетым на земной экватор. При такой неточности математической модели можно было бы надеяться только на грубое совпадение результата вычислений скорости прецессии с наблюдательными данными (что именно наблюдается, будет сказано ниже), но у Ньютона согласие с наблюдениями получилось хорошим. Это могло бы быть случайным совпадением, но похоже, что Ньютон, к сожалению, позволил себе в данном случае «подгонку» под ответ [57]. Ошибку Ньютона впервые отметил и исправил в 1741 г. Т. Симпсон (1710—1761), оставаясь, в общем, в рамках математического аппарата «Начал»; затем правильное рассмотрение прецессии провёл в 1747 г. Даламбер, метод которого был, по существу, уже современным. Эти работы подтвердили, что физическое представление Ньютона о природе этого явления соответствует наблюдательным данным. При прецессии земная ось «покачивается»

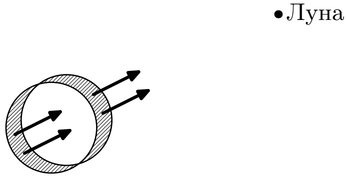


Рис. 78

вместе со всей Землёй, так что расположение оси вращения внутри Земли (и, в частности, положение географических полюсов) не меняется.

Раз уж зашла речь о движении земной оси, скажу вкратце, что со времён Ньютона были открыты ещё два таких движения. Первое из них, называемое «нутацией», было предсказано Ньютоном и открыто Дж. Брадлеем (1692—1762) в 1727 г. Оно состоит в том, что на прецессионное движение земной оси налагаются ещё небольшие колебания направления оси с периодом около 19 лет, вызванные тем, что с таким же периодом изменяется орбита Луны, а значит, и действие её притяжения на экваториальный выступ. При нутации Земля тоже «покачивается» как единое целое, а положение оси и полюсов в (на) земном шаре не меняется. Другое движение, открытое в конце XIX в., состоит в изменении положения земной оси в теле Земли (и, значит, положения географических полюсов на её поверхности), что проявляется в изменении географических широт. Это движение слагается из трёх составляющих. Наличие одной из них было предсказано Эйлером в 1765 г.; она связана с отличием формы Земли от сферической. Эта составляющая приводит к вращению полюсов вокруг некоторых средних положений с отклонением примерно на 3 метра и с периодом оборота 14 месяцев. Другая составляющая приводит к аналогичному вращению с периодом 1 год; она вызвана сезонными метеорологическими явлениями — движением воздушных масс, выпадением снега, — приводящими к некоторому изменению расположения масс на вращающейся Земле. Третья составляющая не имеет правильного характера; примерно за 100 лет наблюдений она сместила Северный полюс примерно на 10 м в сторону Гренландии. Её природа неизвестна.

Вращению Земли посвящена брошюра [44] А. А. Михайлова (1888—1983) — академика, директора Пулковской астрономической обсерватории. Его «узкая специальность» имела прямое отношение к данной теме — он занимался движением Луны, фигурой Земли и гравиметрией, т. е. измерениями напряжённости поля земного тяготения.

Нас же здесь интересует только известная в старину прецессия, и то лишь потому, что без упоминания о ней картина тогдашней астрономии была бы неполной.

На небе прецессия земной оси проявляется в том, что экватор небесной сферы (который является проекцией на неё земного экватора) меняет своё положение. В частности, меняется и положение тех точек, где этот экватор пересекает эклиптику, т. е. точек равноденствия. Каждый год точки равноденствия смещаются по экватору с востока на запад, двигаясь навстречу Солнцу и проходя 1/26000 часть экватора, что составляет примерно $1'$ (точнее, $50''$; из них $34''$ объясняются притяжением Луны и 16″ — притяжением Солнца). Поэтому от одного весеннего равноденствия до следующего проходит не ровно год, а на 1/26000 часть года меньше. Это значит — меньше примерно на 20 минут. Отсюда и название «предварение равноденствий». Вследствие предварения равноденствий прямые восхождения небесных светил каждый год увеличиваются на 50″. Гиппарх как раз и обнаружил предварение равноденствий, сравнивая определённые им координаты звёзд с координатами тех же звёзд, определёнными полутора веками раньше. Если бы изменились координаты одной звезды, это можно было бы приписать её движению, но изменились и притом одинаково координаты всех звёзд; Гиппарх сделал вывод, что на самом деле за 150 лет сместилась точка весеннего равноденствия, от которой эти координаты отсчитываются.

Для описания движений планет, включая Солнце и Луну, древнегреческими астрономами была придумана довольно сложная (и со временем, по мере накопления наблюдений, всё более усложнявшаяся) кинематическая модель, состоящая в некоей искусно подобранной комбинации равномерных круговых движений. Детали нас не интересуют, а общая идея читателю, вероятно, известна, и я её только напомню. Считается, что планета равномерно движется по некоторой окружности, а центр последней в свою очередь движется по некоторой бóльшей окружности, и т. д. Последняя, самая большая, окружность называется «деферентом» (что по-гречески означает «носитель»), её центр совпадает с центром Земли. Остальные окружности называются «эпициклами» («верхними кругами»). Кроме этого, имелись ещё два дополнительные «трюка». Землю смещали немного в сторону от центра деферента (но в его плоскости); это называлось «эксцентричностью». Вращение по деференту могло происходить равномерно не относительно центра, а относительно другой точки (так называемого «экванта»), симмет-

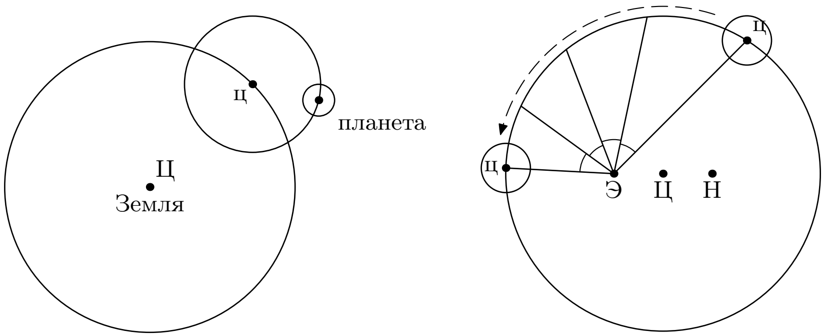


Рис. 79

ричной смещённой Земле относительно центра. В принципе, оба эти дополнительные трюка можно заменить введением новых эпициклов (эквант — только приближённо, но с достаточной в то время точностью). Но это не всегда делали — для вычислений эксцентричность и эквант могли оказаться проще.

Почему эпициклы работают? Допустим сперва, что планеты движутся по круговым орбитам с центрами в Солнце, лежащим в одной плоскости (их эксцентриситеты и углы с плоскостью эклиптики невелики, так что для начала это приемлемо). Тогда почти очевидно, что относительно Земли внутренние планеты (т. е. Меркурий и Венера — планеты, орбиты которых лежат внутри орбиты Земли) движутся по окружности (эпициклу), центр которой движется по большому кругу с центром в Земле (деференту). В данном случае деферент совпадает с кажущейся орбитой Солнца вокруг Земли. Движение внешних планет (которые дальше от Солнца, чем Земля) можно представить аналогичным образом, только поначалу окружности, по которым они движутся, больше орбиты Солнца («эпицикл больше деферента»). А затем несложное построение показывает, что в данном случае эпицикл и деферент можно как бы поменять местами, так что получится привычная картина: эпицикл меньше деферента.

Имея в виду произошедшее впоследствии торжество гелиоцентрической системы, отметим здесь же для сравнения с нею два обстоятельства. Во-первых, если в геоцентрической системе изменить размеры орбиты какой-нибудь одной из вращающихся вокруг Земли планет в несколько раз (для чего надо пропорционально изменить радиус её деферента и всех эпициклов, а также смещение Земли в сторону от центра деферента; к упоминавшемуся ранее экванту это тоже относится), оставив без изменения угловые скорости соответствующих вращений, то на-

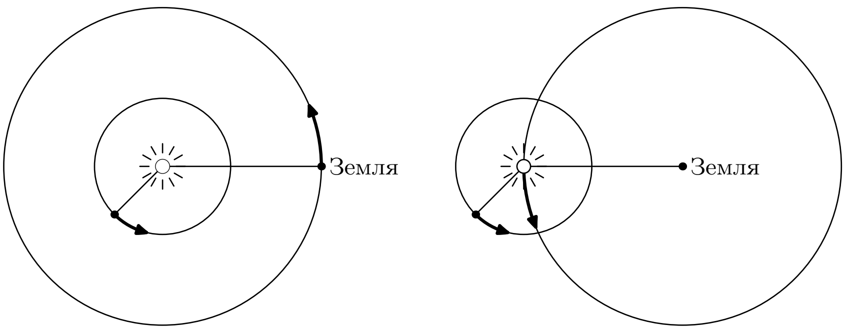


Рис. 80

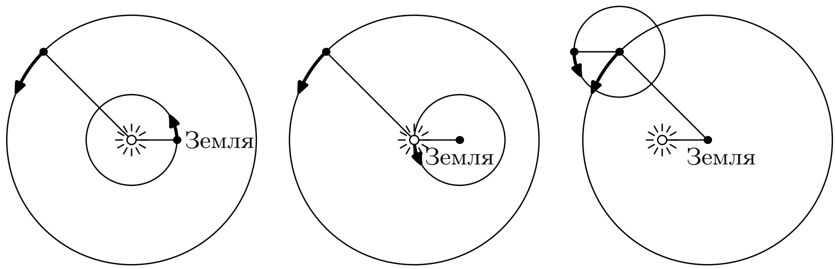


Рис. 81

правление на планету не изменится. Поэтому в рамках геоцентрической модели бессмысленно спрашивать, каковы относительные размеры планетных орбит. В гелиоцентрической же модели такой вопрос становится осмысленным, и уже Коперник смог довольно правильно найти относительные расстояния от планет до Солнца. Во-вторых, для внутренних планет предыдущее построение непосредственно приводит к эпициклическим моделям, в которых деферент обеих планет один и тот же, центры их эпициклов находятся в одной и той же точке деферента. Но так как одну из орбит можно изменить в несколько раз, надо сказать так: направления (от Земли) на центры эпициклов этих планет совпадают. Для внешних планет получается, что направления из центров их эпициклов к самим планетам тоже всё время параллельны. В частности, деференты внутренних планет лежат в плоскости эклиптики и центры соответствующих эпициклов совершают по ним оборот за один год; плоскости эпициклов внешних планет параллельны плоскости эклиптики и планеты совершают оборот по эпициклам тоже за один год. В рамках геоцентрической системы это выглядит как какое-то странное совпадение. Когда же мы рассматриваем геоцентрическую систему как отображение реальной гелиоцентрической, «совпадение» сразу объясняется.

Теперь уточним нашу геоцентрическую модель, учитывая, что в действительности орбиты планет не окружности, а эллипсы. Это можно хотя бы отчасти учесть, слегка сместив Землю в сторону от центра деферента Солнца в плоскости последнего. (В геоцентрической системе реальная орбита Земли отображается как орбита Солнца.) Тогда движение центра солнечного эпицикла, а в среднем и самого Солнца будет иногда быстрее (когда центр деферента проходит ту полуокружность, в сторону которой смещена Земля), а иногда медленнее; это качественно соответствует тому, что связано с эксцентриситетом реальной земной орбиты, и II закону Кеплера. Оказывается, ввиду того что эксцентриситет эллипса невелик (он вообще невелик для всех планет, а для Земли особенно), таким путём можно достичь довольно хорошего согласия с Кеплером не только в качественном, но и в количественном отношении. (См. [23], [30]. Ещё лучшего согласия можно достичь, используя уже упоминавшийся эквант.) Эллиптичность орбит других планет и неравномерность их движения по орбитам можно учесть аналогичным способом (хотя это труднее, потому что в геоцентрической системе видимое движение планеты отображает и её настоящее движение вокруг Солнца, и движение Земли); тот факт, что орбиты планет не лежат строго в плоскости эклиптики, можно учесть, наклонив соответствующие деференты и эпициклы относительно этой плоскости.

Надо подчеркнуть, что древние и средневековые астрономы не довольствовались качественным соответствием между теоретическими схемами и наблюдениями, а стремились количественно согласовывать первые со вторыми. По мере накопления наблюдений и роста их точности это приходилось делать вновь и вновь, так что в течение средних веков пришлось добавлять новые круговые движения. По этому поводу Альфонс X, король Кастилии и Леона[11] (1226—1284, царствовал в 1252—1282 гг.), позволил себе ироническое замечание: «Если бы при сотворении мира создатель спросил моего совета, то я предложил бы ему более простой план устройства Вселенной». Альфонс царствовал вначале удачно и покровительствовал наукам и искусствам. Он собрал в Толедо 50 астрономов разных наций, которые составили новые таблицы планетных движений, остававшихся лучшими до упомянутых в основном тексте «Прусских таблиц». Потом Альфонс, видимо, чересчур увлёкся войнами и активной внешней политикой (он даже претендовал на трон германского императора). Это требовало средств и привело к высоким налогам, вызвавшим недовольство народа; в то же время тенденция к усилению королевской власти не могла нравиться знати. Вдобавок возникли нелады в королевской семье и Альфонс казнил (велел задушить) своего брата. (Такое даже в то время случалось не часто.)

[11] В средние века на Пиренейском полуострове, где теперь находятся Испания и Португалия, имелось несколько государств, христианских и мавританских, т. е. мусульманских (число тех и других, не говоря уже о границах, со временем изменялось). Кастилия и Леон — одно из этих христианских государств (возникшее, как видно из названия, при объединении двух существовавших ранее отдельных государств) со столицей Толедо, отвоёванной у мавров в 1085 г. Но не всегда христиане государства Пиренейского полуострова воевали с маврами, отношения бывали и мирными. Ввиду близости намного более культурных мусульманских государств в христианских государствах Пиренеев имелись более благоприятные возможности для развития культуры и науки по сравнению с другими странами средневековой Западной Европы (кроме разве Италии), и некоторые из них, особенно Кастилия и Леон, этой возможности не упустили.

В итоге Альфонс, вызвавший всеобщее недовольство, был низложен (что тоже случалось не часто). Тогда его фраза, вероятно не замышлявшаяся как критика в адрес всевышнего, а выражавшая скептицизм в отношении тогдашних планетных моделей, была признана еретической.

Хотя система самого Птолемея была проще, чем система, с которой ознакомили Альфонса X, она всё же тоже была довольно сложной, и по её поводу всевышнему тоже не мешало бы задаться вопросом, стоит ли так мудрить... Не следует думать, что эта система сразу вышла из головы Птолемея, так же как, по древнегреческой легенде, Афина Паллада вышла из головы Зевса. Птолемей продолжал труд ряда выдающихся людей, и о них стоит сказать особо.

Главное действующее лицо в начале этой истории — гениальный математик и астроном Евдокс (ок. 408—ок. 355 до н. э.), которого живший спустя полтора века Архимед упоминал с эпитетом «божественный» и который в наши дни в одной исторической книге [50] был назван «провозвестником науки нового типа» и «ключевой фигурой в греческой науке своего времени».

Евдокс, уроженец Книда в Малой Азии, учился сперва у знаменитого математика Архита (ок. 440—360 до н. э.) в Таренте (один из греческих городов Южной Италии), а затем в возрасте 23 лет приехал в Афины, где учился у Платона. (Будучи бедным, он поселился не в Афинах, а в нескольких километрах от них в Пирее, где, видимо, жизнь была дешевле, и каждый день ходил в Афины пешком.) Но Платону он, надо думать, обязан общим образованием, что же до математики и астрономии, то если по этой части ученик Архита и мог усвоить что-нибудь новое от кого-то в Афинах, то только от Теэтета (ок. 410—369 гг. до н. э.), другого великого математика того времени, который если и уступал кому-нибудь, то только тому же Евдоксу, когда гений последнего полностью расцвёл. Теэтет был афинянином и другом Платона, так что Евдокс вполне мог с ним встречаться. Теэтет был лишь чуть-чуть старше Евдокса, но в свои примерно 25 лет он был вполне сложившимся учёным (известно, что он ещё до 20 лет блестяще проявил себя). При таком учителе, скорее старшем (не по возрасту, а по развитию) товарище, и такому ученику достаточно было нескольких бесед, чтобы ученик переступил порог, отделявший тогдашние учебники (таковые уже существовали;

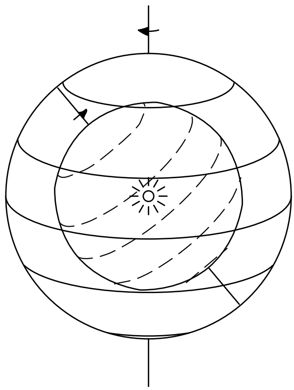


Рис. 82

они не сохранились до нашего времени, но их примерное содержание реконструировано) от переднего фронта науки. Но этого можно было достичь и в Таренте, а о контактах Евдокса с Теэтетом нет сведений.

Каковы бы ни были достижения Евдокса в математике[12], для астрономии его значение было не менее (скорее даже более) значительным. До него теоретический анализ небесных движений в древнегреческой астрономии ограничивался несколькими простейшими случаями[13], а он открыл совершенно новые возможности.

Вероятно, и до Евдокса понимали, что можно представить себе Солнце как бы находящимся на экваторе некоей сферы («сферы Солнца»), которая медленно и равномерно вращается, делая один оборот в год вокруг своей оси, наклонённой относительно оси сферы неподвижных звёзд и прикреплённой к последней сфере. Вращение небесной сферы увлекает за собой сферу Солнца, поэтому Солнце в основном движется так же, как и звёзды, но к этому добавляется ещё медленное движение Солнца относительно звёзд из-за вращения его собственной сферы. То же относится и к Луне.

Пока никакой пользы от введения двух специально связанных с ними сфер не видно. Но Евдокс заметил, что при надлежащем расположении и скорости вращения второй сферы неподвижно прикреплённое к ней светило может иногда получать обратное движение и даже описывать петли. Это открыло принципиальную возможность использовать дополнительные сферы для наглядного представления запутанного движения планет при помощи комбинации равномерных круговых движений. При этом можно не довольствоваться одной дополнительной сферой, а брать их несколько. Евдоксу и в самом деле удалось, добавив по три сферы для Солнца и Луны и по четыре — для остальных планет, подобрать такое расположение этих сфер и скорости их вращения, что модель в какой-то мере воспроизводила реальное движение «планет».

Успех Евдокса имел огромное значение даже для философии, потому что то время всерьёз ставился вопрос, может ли несовершенный человеческий разум постигнуть это движение, предположительно связанное с какими-то высшими божественными установлениями. (Это нашло отражение у Платона.) Об астрономии же и говорить нечего. По-видимому, сам Евдокс рассматривал свои сферы как некую вспомо-

[12]Вот пример: только во второй половине XIX в. была оценена по достоинству его «теория отношений» — она по существу эквивалентна созданной в это время теории вещественных чисел Дедекинда.

[13]В Вавилоне отнюдь не ограничивались, но и по сравнению с Вавилоном подход Евдокса со временем оказался более удачным и сам по себе, и потому, что он был более открыт для усовершенствования.

гательную теоретическую конструкцию и не настаивал на их реальном существовании. Но Аристотель считал их реально существующими. Как же прикрепить к одной и той же небесной сфере другие сферы, которые должны прикрепляться к ней в разных точках? В сочинениях Аристотеля это делается так. Допустим, что нам надо прикрепить всего две сферы. Аристотель привлекает ещё одну вспомогательную сферу, так что всего теперь, помимо сферы неподвижных звёзд, будет три сферы. Одна из них прикрепляется изнутри к небесной сфере и вращается, как надо вращаться одной из тех сфер, с которых мы начали. Вторая сфера прикрепляется изнутри к первой дополнительной сфере в её полюсах и вращается в противоположном направлении. В результате вторая сфера оказывается неподвижной относительно сферы неподвижных звёзд, но к ней уже можно прикрепить изнутри третью сферу там, где мы захотим, и заставить её вращаться как надо. Ясно, что такой конструкцией с дополнительными сферами, «компенсирующими» вращение других сфер, можно воспользоваться и тогда, когда этих сфер много.

Сочинения Евдокса до нас не дошли. Мы знаем о нём только со слов позднейших авторов. Насчёт математических достижений Евдокса мы имеем «технически точные» свидетельства математиков, включая Архимеда. На основании этих свидетельств уверенно восстанавливается основное содержание математических работ Евдокса (в частности, установлено, что именно восходит к нему в «Началах» Евклида — фундаментальном изложении значительной части тогдашней математики). Об астрономической же модели Евдокса мы знаем со слов Аристотеля и его комментатора Симпликия, которые астрономами не были и описывали эту модель только «в общих чертах». Благодаря этому мы знаем, сколько в ней было дополнительных сфер для каждой «планеты», но имеем только качественные указания об их расположении (был ли угол между осями двух последовательных сфер большим или малым) и не всегда знаем, с какой скоростью они вращались. В 1877 г. Д. Скиапарелли[14] (1835—1910) предложил реконструкцию модели Евдокса. Качественно она описана в [13] (где имеется ссылка на публикацию Скиапарелли) и (с некоторыми изменениями) в [50].

Соответствие с наблюдениями у Евдокса было ещё не очень хорошим. Об этом мы можем судить не столько на основании реконструкции

[14]Его основной вклад в астрономию относится к исследованию Солнечной системы. Широким кругам он известен в связи с несуществующими каналами на Марсе, которые оказались иллюзией, возникающей, когда зрение работает на пределе своих возможностей. Поэтому роль сообщения Скиапарелли об открытии этих каналов оказалась двусмысленной — оно, конечно, повысило внимание к Марсу, но пользу из него в конечном счёте извлекла физиология зрения.

его модели (она ведь всё-таки гипотетическая), сколько на основании известного нам факта, что её принялись улучшать. Поначалу просто добавляли новые сферы. Значительно более важный шаг сделал Аполлоний Пергский, упоминаемый в основном тексте по поводу конических сечений[15].

Вначале Аполлоний обратил внимание на то, что если даже видимое движение планеты по сфере неподвижных звёзд удаётся представить в виде комбинации круговых движений, лучшего согласия с наблюдательными данными можно достичь, считая эти движения неравномерными. Неизвестно, обнаружил ли это он сам или кто-нибудь до него, но он предложил простую идею, которая позволила сохранить равномерность движения по кругу и тем самым возможность производить вычисления. Надо попросту сместить ту точку, откуда наблюдается движение, несколько в сторону от центра, оставаясь в плоскости круга. Тогда из этой смещённой (как говорят, эксцентричной) точки наблюдения H движение будет казаться неравномерным: по дуге, которая ближе к H, движение будет казаться происходящим быстрее, чем по более далёкой дуге. Второй вклад Аполлония в астрономию состоял в том, что он, по-видимому, первый предложил комбинировать круговые движения совершенно по-новому, заменив сферы Евдокса деферентами и эпициклами. Я не знаю, насколько подробно сам Аполлоний разработал эту идею, но вскоре деференты и эпициклы успешно вытеснили планетные сферы Евдокса, оказавшись более гибким инструментом для представления планетных движений. При этом широко использовались «вторичные» эпициклы. Центр такого эпицикла сам движется по другому эпициклу, а уж центр последнего — по деференту.

Однако Аристотель жил в то время, когда имелась только модель Евдокса. Поэтому её он и описал в своих сочинениях (собственно, не её саму, а некую более позднюю модель, добавив упомянутые выше «компенсирующие» сферы; всего сфер оказалось 65!), причём отнюдь не вникая в математические подробности, в которых он едва ли был силён и которые его не интересовали (по его естественнонаучным наклонностям ему были ближе биология и география). Когда средневековая Европа достигла такого уровня развития, что смогла приступить к освоению античного наследия и современной ей арабской культуры, первым

[15] Астрономические сочинения Аполлония, в отличие от его труда о конических сечениях, до нас не дошли. О них имеются только указания у других авторов, в том числе и в «Альмагесте» Птолемея, где приведено единственное дошедшее до нас астрономическое высказывание Аполлония — довольно длинная (полторы страницы) цитата из его утраченного сочинения.

Вкладу Аполлония в астрономию посвящена одна глава в [49].

крупным шагом в этом направлении стало знакомство с Аристотелем[16]. Это было хорошо, но на несколько столетий Аристотель стал основным источником знаний и непререкаемым авторитетом, а это уже было не столь хорошо, пока не стало плохо. О борьбе со схоластикой в конце средневековья все знают. Но аристотелианцы — догматики или интересовавшиеся более философией, нежели астрономией — одно время возражали даже против более поздней системы Птолемея, в которой планетных сфер нет, а восходящая к Евдоксу идея представления движения планет с помощью комбинации равномерных круговых движений реализуется иначе. Ещё раньше то же происходило в исламских странах.

Величайшим астрономом древности был уже упоминавшийся Гиппарх. Он был равно велик и как наблюдатель, и как теоретик. В качестве теоретика он перестроил кинематическую модель планетных движений, положив в основу её эпициклы и деференты вместе с эксцентричностью. Позднее эта модель была усовершенствована Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.), капитальный труд которого «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах» более известен под сокращённым арабизированным названием «Альмагест». Гиппархову модель движения Солнца Птолемей нашёл вполне удовлетворительной и воспроизвёл её в своём труде, но для всех остальных «планет» модели были переработаны. В результате впервые удалось за годы вперёд предвычислять солнечные и лунные затмения с точностью до 1—2 дней.

Помимо использования эксцентричных точек, Птолемей изобрёл ещё один «трюк», о котором уже говорилось, — эквант. Напомню, что это точка $Э$, симметричная точке наблюдения $Н$ относительно центра деферента $Ц$; вместо того чтобы центр $ц$ эпицикла $с$ двигался по деференту $С$ равномерно в обычном смысле, т. е. с постоянной угловой скоростью относительно центра $Ц$ этого деферента, потребуем, чтобы движение $ц$ по $С$ происходило с постоянной угловой скоростью относительно $Э$. Птолемей знал, что в принципе можно (если не совсем точно, то по крайней мере приближённо с достаточной точностью) заменить эксцентрики и экванты подходящими комбинациями дополнительных эпициклов, однако он считал, что проще этого не делать.

Движение $ц$ по $С$, происходящее с постоянной угловой скоростью относительно $Э$, имеет, конечно, переменную скорость; таким образом, введя эквант, Птолемей порвал с догмой, что «небесные» движения по окружностям должны происходить с постоянной скоростью. В принципиальном отношении это был не менее существенный шаг, чем отказ от

[16]В романе М. Экю «Символ розы» прекрасно показано, что это было почти что революционным шагом. События, описанные в романе, вымышлены, но настроения — нет.

хрустальных сфер Аристотеля. Но последнее иногда вызывало возражения, а до экванта ортодоксальные последователи Аристотеля, похоже, не доходили. Вероятно, психологически эквант помог Кеплеру принять мысль о неравномерности движения Марса по его орбите, а тот факт, что в случае экванта движение с неравномерной скоростью можно всё-таки описать с помощью вспомогательной величины (полярного угла с полюсом в $Э$), скорость изменения которой постоянна, могло натолкнуть его на поиски величины с таким же свойством для Марса, и он её нашёл, хотя в данном случае эта величина (площадь сектора) кажется чем-то более сложным, чем полярный угол.

Следует ещё раз подчеркнуть, что все эти модели — Евдокса, Птолемея и т. д. — были кинематическими. Они и строились только по кинематическим данным, без попытки понять физическую сторону дела. Они позволяли определять только направление на небесное тело, но, как объяснялось выше, были принципиально непригодны для определения расстояний между телами, хотя бы только относительных расстояний. А с расстояниями связана яркость, с какой мы видим планету, а в случае Луны — также и её угловые размеры.

С Луной получилось особенно плохо: по Птолемею выходило, что при движении Луны вокруг Земли расстояние до неё изменяется почти в два раза, а тогда соответственно должны изменяться и её угловые размеры. Всякому известно, что это не так. Но Коперник сумел изменить модель Птолемея так, что и точность кинематических предсказаний повысилась, и столь заметное изменение расстояний удалось ликвидировать. Поскольку Луна действительно является спутником Земли, как раз с Луной Коперник принципиальных изменений не вносил, можно сказать, что в данном случае он только усовершенствовал модель Птолемея, у которого в этом месте по сравнению с Коперником была только некоторая недоработка, а не принципиальный изъян.

Что же касается расстояний до планет и их яркости, то в этом отношении модель Коперника продемонстрировала явные преимущества. Уже сам Коперник смог довольно точно определить относительные размеры планетных орбит. И выяснилось, что планеты оказываются яркими тогда, когда, по Копернику, они либо ближе к Земле, либо лучше освещены, либо и то и другое. Последнее совмещается для внешних планет, тогда как для внутренних планет условия близости и освещённости противоречат друг другу (когда планета всего ближе к нам, мы видим её теневую сторону). Для этих планет максимум яркости достигается тогда, когда угол «Земля, планета, Солнце» равен прямому.

Поскольку орбиты планет на самом деле эллиптичны, а Коперник пользовался только окружностями, ему, по примеру древних, пришлось обратиться к эпициклам и деферентам. А так как он стремился охватить более обширный наблюдательный материал, чем Птолемей, и кругов ему понадобилось почти вдвое больше[17]. (К тому же Коперник, видимо, полагал, что небесные движения должны сводиться только к равномерным круговым движениям; поэтому ему не нравились трюки с эксцентриками и эквантами, и он порой «честно» заменял их дополнительными эпициклами.) Центры деферентов планет Коперник поместил в некоторую точку, правда, смещённую в сторону от Солнца, но одну и ту же для всех планет; впоследствии это могло несколько помочь Кеплеру. Так что нельзя сказать, будто система Коперника была проще системы Птолемея. Принципиально, может быть, и да, но в детальной реализации — нет. (Однако если попытаться достичь в рамках геоцентрической модели той точности, которой достиг Коперник, то кругов понадобилось бы ещё больше. Значит, в конечном счёте модель Коперника была всё же проще.) Основные преимущества модели Коперника на первых порах были физическими. Что касается уточнения видимой кинематики, оно тоже было достигнуто (см. о «Прусских таблицах» в основном тексте), но ведь в геоцентрических рамках такое уже бывало. Кроме того, становились понятными совпадения, отмечавшиеся выше, — они оказались просто отражениями движения Земли в видимом движении планеты. Наконец, стало ясным, почему видимые «петли» у Сатурна меньше, чем у Юпитера, а у Юпитера — меньше, чем у Марса, но число этих петель, приходящихся на один оборот по деференту, наоборот, у Сатурна больше, чем у Юпитера, а у Юпитера больше, чем у Сатурна. Всё это просто потому, что Сатурн дальше от Земли, чем Юпитер, а тот — чем Марс, и период обращения возрастает с удалением от Солнца[18]. Однако, как утверждают специалисты, в отношении кинематики у Коперника было реальное методическое достижение, только по сравнению не столько с самим Птолемеем, сколько с его последователями, которые, повышая точность модели путём подбора новых эпициклов и некоторого изменения параметров уже имевшихся эпициклов и деферентов, делали это в какой-то степени наугад, «методом проб и ошибок». У Птолемея путь от наблюдений к параметрам моделей был более ясным, и Копернику удалось (в более сложной обстановке!) вновь достичь такой же ясности.

[17]Впоследствии выяснилось, что часть средневековых наблюдений, с которыми пытался согласовать свою систему Коперник, была ошибочной. Если бы он знал об этом, то, вероятно, часть кругов ему не понадобилась бы.

[18]Если бы Земля двигалась, а планеты были неподвижны, то размеры петель в точности отражали бы расстояния от этих планет до Солнца. Так как планеты тоже движутся, определение относительных от них расстояний до Солнца является более сложной задачей, но Коперник с ней справился.

Приложение II. Кеплер

Иоганн Кеплер (1571—1630) родился в маленьком городке Вейле (насчитывавшем и насчитывающем всего несколько тысяч жителей) около Штутгарта, главного города герцогства Вюртемберг на юге Германии. Предки Кеплера были ремесленниками. Дед был довольно состоятельным и уважаемым человеком (одно время он даже был бургомистром Вейля), но потом разорился. Отец был неуравновешенным «искателем приключений», который то пытался держать харчевню в одном из соседних городков, то нанимался ландскнехтом, покидая семью на произвол судьбы. В такой отлучке он и умер. Маленькому Иоганну довелось переболеть оспой, основательно подорвавшей его физическое состояние, но не повлиявшей на умственные способности. К счастью, образование в Вюртемберге было относительно доступно, и родные решили, что способному, но хилому мальчику лучше готовиться к занятию умственном трудом.

Кеплер провёл свою жизнь на юге Германии и в прилегающих к ней государствах, в то время входивших в Священную Римскую Империю германской нации, — Австрии, Чехии, Венгрии. Как и его родственники, он был протестантом, а католическое правительство империи этого не приветствовало. Впрочем, до начала Тридцатилетней войны (1618—1648) положение было ещё терпимым, но что бывает во время войны, мы знаем не понаслышке. (Католикам, случалось, тоже приходилось не сладко.) Поэтому конец его жизни оказался куда более тяжёлым, нежели можно было бы ожидать по её началу.

Во время учёбы в Тюбингенском университете его учитель, профессор астрономии Местлин (1550—1631), познакомил Кеплера с теорией Коперника. Это он сделал в личных беседах, а преподавать астрономию по решению университетского сената он должен был по Птолемею. Спасибо Местлину, что он не до конца выполнил это постановление! Но положение обязывает: впоследствии, когда преимущества системы Коперника «в редакции Кеплера» уже ни у одного компетентного специалиста не вызывали сомнения, Местлин издал учебник астрономии по Птолемею[1].

---

[1] Учёный, сверстник Галилея
Был Галилея не глупее:
Он знал, что вертится Земля,
Но у него была семья.

Евтушенко едва ли знал о Местлине и Кеплере, но угадал почти точно. Только Местлин не был сверстником ни Галилея, ни тем более Кеплера. (Однако разница лет не помешала Местлину и Кеплеру дружить, — дополнительный штрих к приведённому стихотворению.)

В 1593 г. Кеплер окончил университет и получил степень магистра, но то ли его единоверцы-протестанты обвинили его в религиозном свободомыслии, то ли понадобилось направить преподавателя математики и астрономии в лютеранскую школу в Граце, только Кеплера не оставили в Тюбингене, а направили в Грац. Это был католический район, но со значительной протестантской прослойкой, к которой вначале власти относились терпимо. Спустя несколько лет начались религиозные гонения, и Кеплер на некоторое время уехал в Венгрию; впрочем, ему удалось вернуться. В этот период, в 1596 г., он издал свою первую книгу «Введение в космографические исследования, содержащие КОСМИЧЕСКУЮ ТАЙНУ о замечательной пропорции небесных орбит и подлинные и должные причины числа, величины и периодических движений небес, доказанные с помощью пяти правильных тел». Основная идея этой «тайны» состояла в сопоставлении шести совершенных небесных тел (планет, теперь уже включая Землю и выключая Солнце с Луной) и пяти правильных многогранников, которые со старинных времён тоже считались совершенными. А именно, предлагалась следующая конструкция. Имеется 6 концентрических сфер; между ними имеется 5 «промежутков» — шаровых слоёв. При определённых соотношениях между радиусами сфер в этих 5 слоях можно расположить пять правильных многогранников таким образом, чтобы сфера, ограничивающая изнутри шаровую зону, была вписана в соответствующий многогранник, а сфера, ограничивающая эту зону снаружи, была вокруг него описана. Многогранники, идя изнутри наружу, располагались в таком порядке: октаэдр, икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр, куб. Каждая планета, по мнению Кеплера, находится на внутренней границе соответствующей зоны, т. е. Меркурий — на наименьшей из сфер, Венера — на следующей, и т. д. На обороте обложки настоящей книги помещён рисунок, которым сам Кеплер пояснял эту модель.

Абсолютные расстояния от планет до Солнца были тогда не известны, но относительные расстояния определил ещё сам Коперник (с приличной точностью). Кеплер сравнил отношения расстояний для двух следующих друг за другом сфер в его модели с отношениями расстояний по Копернику. Результат оказался хорошим в двух случаях и плохим в трёх. Особенно плохо получилось с отношением Меркурий—Венера — расхождение почти в полтора раза. После этого Кеплер попытался модифицировать свою модель, главным образом за счёт изменения расстояния до Солнца для Меркурия. Теперь бралась плоскость симметрии октаэдра и в квадрат, по которому она пересекает октаэдр, вписывалась окружность, на которой, якобы, и должен находиться Меркурий. Остальные же планеты по-прежнему находились на соответствующих сферах, так что правило для определения расстояния до Солнца теперь для Меркурия стало одно, а для других планет другое. Отношение расстояний для Меркурия и Венеры улучшилось, но всё равно согласие с эмпирическими данными осталось не блестящим.

В наши дни гипотеза Кеплера кажется странной. Я не говорю уже о том, что мы не можем задаваться вопросом «почему существует ровно шесть планет», ибо мы знаем о девяти планетах[2], не считая астероидов, и нисколько не будем удивлены, если откроют десятую[3]. Вообще, число планет в планетной системе едва ли имеет какой-то глубокий смысл и, скорее всего имеются другие планетные системы, в которых оно другое. Более серьёзно следующее: мы знаем довольно много различных связей между явлениями природы, в том числе количественных соотношений и аналогий, и ни одна из них не напоминает гипотезы Кеплера. Но Кеплер знал только те количественные связи, которые были известны в тогдашней астрономии, да ещё некоторые количественные соотношения в акустике, восходящие к Пифагору. У него не могло быть нашего «умственного багажа». Его «багаж», связанный с влиянием окружающей среды и мировоззрения, был не только количественно, но и качественно другим. Мышление Кеплера (в отличие от более близкого к нам в этом отношении Галилея) было как бы переходным от средневекового к современному и не освободилось от влияния мистицизма и предрассудков своего времени.

В двух других отношениях Кеплер уже в этой книге проявил задатки, которые впоследствии развились в сильнейшие его черты как учёного и вполне отвечают современному идеалу. Он стремился к проверке своих выводов на эмпирическом материале, и по возможности к количественной проверке. Занимаясь математической моделью некоторого природного явления, он проявил готовность и способность видоизменять эту модель. В этих отношениях он впоследствии превзошёл Галилея.

---

[2]Впрочем, самая дальняя из них, Плутон, теперь находится под угрозой «разжалования» в крупные астероиды. Это связано не только с его небольшими размерами (меньше Луны!). В районе орбиты Плутона теперь обнаружено несколько десятков астероидов (ме́ньших размеров), так что там, по-видимому, имеется второй пояс астероидов; этот пояс уже получил особое название «пояс Кёйпера» в честь выдающегося американского астронома, который одним из первых заподозрил его существование и привёл серьёзные доводы в пользу этой гипотезы. Раз так, то похоже, что Плутон просто необычайно крупный представитель этого пояса, в котором вообще имеются более крупные астероиды, нежели во всем известном поясе между Марсом и Юпитером.

[3]Проводилось даже два тура крупномасштабных поисков десятой планеты — первый раз в течение почти 10 лет после открытия Плутона, а второй раз — в 60-е гг. XX в. О поиске планет в нашей Солнечной системе см. интересную брошюру [35].

Теперь стоит сказать, как сейчас, спустя несколько веков, обстоят дела с радиусами планетных орбит. Для расстояний от планет до Солнца[4] был предложен так называемый закон (лучше сказать, правило) Тициуса—Боде. Иоганн Тициус (1729—1796) опубликовал его в 1766 г. в немецком переводе книги Шарля Бонне (1720—1796) «Созерцание природы». В 1772 г. с этим правилом познакомился Иоганн Боде (1747—1793), включивший его во второе издание своего «Руководства по изучению звёздного неба» и впоследствии неоднократно о нём напоминавший (в том числе в следующих изданиях «Руководства»). Благодаря этой пропагандистской деятельности Боде правило оказалось крепко связанным с его именем (а о Тициусе порой даже забывали, тем более что в других отношениях его роль в истории науки была более скромной). Правило формулируется очень просто. В так называемых «астрономических единицах», в которых радиус орбиты Земли равен 1, расстояние до Солнца от n-й планеты вычисляется по формуле $r_n = 0{,}4 + 0{,}075 \times 2^n$. При этом принимается, что для Меркурия $n = -\infty$ (хотя должно было бы быть $n = 1$), так что $2^n = 0$, но дальше всё правильно: для Венеры $n = 2$, для Земли $n = 3$, для Марса $n = 4$, для астероидов $n = 5$, для Юпитера $n = 6$, для Сатурна $n = 7$, для Урана $n = 8$. Астероидов много, так что неясно, с чем именно надо сравнивать r_5, вычисленное по данной формуле; во всяком случае, круг радиуса r_5 лежит где-то посередине пояса астероидов. Для остальных перечисленных планет совпадение — с точностью до нескольких процентов; это тем более впечатляет (несмотря на натяжку с Меркурием), что Уран (как и астероиды) в момент публикации формулы ещё не был открыт. Однако для Нептуна и особенно Плутона ($n = 9,\ 10$) расхождение с правильным расстоянием значительное (для Плутона — почти вдвое).

Правило Тициуса—Боде (как и отступления от него для Нептуна и Плутона, а также предлагавшиеся различными авторами модификации этого правила) не имеет общепризнанного теоретического объяснения[5], хотя некоторые попытки в этом направлении предпринимались

[4] В XXI в. необходимо оговориться, что, поскольку орбиты планет — эллипсы, а не окружности, расстояние от планеты до Солнца несколько меняется со временем. Но этим сейчас можно пренебречь, ибо планетные орбиты не очень отличаются от окружностей, а правило, о котором сейчас идёт речь, является приближённым.

[5] В этом отношении оно ничуть не лучше кеплеровских построений с правильными телами, только лучше соответствует наблюдательным фактам. Но, пожалуй, правило Тициуса—Боде лучше вот в каком отношении. Если мы просто подобрали подходящую числовую закономерность, то ясно, что это чисто опытный факт, за которым, может быть, стоит какое-то неизвестное нам физическое содержание, а может быть и нет (см. ниже о возможной роли случайностей при возникновении Солнечной системы). И уж во всяком случае сама по себе числовая закономерность никаких

(см. ниже). А главное, мы не знаем, насколько это правило универсально, т. е. идёт ли речь о какой-то специфической особенности Солнечной системы, или же это правило справедливо и для других планетных систем? Ведь мы не знаем, как распределены радиусы планетных орбит в других системах.

Ещё лет 30 назад надо было бы сказать категоричнее: мы не знаем других планетных систем. Но с тех пор около ряда звёзд обнаружено около 140 планет с массами обычно порядка массы Юпитера. (О ситуации в этой области, имевшей место несколько лет назад, см. полупопулярную статью [36]. А когда эта книжка попадёт в руки читателя, таких планет, вероятно, станет ещё больше[6].) Так что другие планетные системы нам отчасти известны, но известны только самые массивные их представители, причём последние гораздо ближе к своим центральным звёздам, чем наш Юпитер, — они часто даже ближе, чем Меркурий к Солнцу[7]. Поэтому соответствующие планетные системы могут совсем не походить на нашу[8].

намёков на природу этого физического содержания не содержит. Нет оснований думать, что числа 0,4, 0,075 и 2 суть проявления чего-то важного. Если же мы приняли бы всерьёз геометрическую картину, предложенную Кеплером, то могла бы возникнуть иллюзия, будто за его правильными многогранниками самими по себе стоит что-то реальное.

[6]Но, вероятно, не намного больше. Удаётся обнаруживать только планеты, обращающиеся вокруг достаточно ярких и достаточно близких к нам звёзд. Таких звёзд не так уж много, и большинство из них уже «обследованы» на предмет наличия планет.

[7]Это различие обусловлено самим методом обнаружения планет, обращающихся вокруг других звёзд, который в основном таков. Ни в какой телескоп увидеть «юпитеры» пока невозможно (хотя имеется надежда со временем достичь этого в инфракрасном диапазоне), но они проявляются в периодическом изменении скорости центральной звезды (вызванном её движением по кеплеровской орбите вокруг общего центра тяжести). С помощью эффекта Допплера удаётся обнаружить и измерить изменение компоненты этой скорости по направлению к наблюдателю. Чем ближе «юпитер» к центральной звезде и чем он массивнее, тем больше изменение её скорости. Кроме того, чтобы заметить изменение скорости за период времени T, надо сравнить результаты измерения скорости, т. е. соответствующей частоты света, в начале и конце этого периода, а потому требуется, чтобы у используемого для сравнения земного стандарта частоты изменение последней за время T было достаточно малым. А «хранить частоту» относительно короткое время можно с намного бо́льшей точностью, чем в течение нескольких лет. По этим двум причинам данным способом в настоящее время невозможно обнаружить планету земной массы или «юпитер», период обращения которого вокруг центральной звезды был бы таким же, как и у нашего Юпитера.

[8]В большинстве случаев обнаружено по одному «юпитеру» у соответствующей звезды, но имеются случаи, когда у одной звезды найдены три планеты. Одна из этих планетных систем имеется у пульсара. (Причём массы его планет близки к земным. Для пульсаров планеты можно обнаруживать не совсем так, как ска-

Как же всё-таки можно попытаться объяснить правило Тициуса—Боде? Возможно, что если бы планеты были слишком близки друг к другу, то их взаимные возмущения были бы столь велики, что это нарушило бы устойчивость Солнечной системы. Применительно к планетам земной группы это общее соображение подтверждается (и это даже приводит к некоторому уточнению правила Тициуса—Боде). Как оказывается, на интервале в несколько миллиардов лет[9] орбиты по крайней мере части планет земной группы могут измениться столь сильно, что, будь вначале эти орбиты чуть ближе друг к другу, за несколько миллиардов лет они могли бы даже пересечься, так что дело могло бы дойти до столкновения планет. Следует уточнить, что в этих исследованиях использованы известные значения масс планет и некоторые теперешние параметры их орбит, так что даже и для планет земной группы лучше говорить, что для них правило Тициуса—Боде удалось не то чтобы получить как некий отдельный закон природы, а связать его с другими астрономическими данными. Что же касается планет-гигантов, то их орбиты оказались намного более стабильными на протяжении всего времени существования Солнечной системы, так что для них такое объяснение правила Тициуса—Боде не годится. Предполагают, что для них соответствующие эффекты могли сработать в далёком прошлом, когда существовали не сами эти планеты в их современном виде, а некие их «предки», протопланеты, орбиты которых были не столь стабильны. Если расположение этих орбит не соответствовало условиям типа Тициуса—Боде, то это должно было приводить к столкновениям и разрушениям протопланет; оставшиеся части этих протопланет уже удовлетворяют этим условиям.

зано в предыдущем примечании: измеряется не скорость пульсара, а его смещение в направлении к наблюдателю или от него. Оно проявляется в изменении частоты приходящих от пульсара импульсов. Возможность использования данного метода основана на высокой стабильности частоты, с которой пульсар излучает эти импульсы. Метод позволяет обнаруживать более лёгкие планеты, чем предыдущий). Пульсары, насколько известно, образуются при взрывах сверхновых звёзд; едва ли при этом могли бы уцелеть планеты. Быть может, эта планетная система каким-то образом сформировалась после взрыва сверхновой? Тогда её сходство с Солнечной системой представляется ещё более сомнительным.

В самое последнее время у Веги — одной из самых ярких звёзд неба (на широте Москвы более яркий Сириус только ненамного поднимается над горизонтом и потому практически виден редко, а Вега сияет наверху с весны по осень) — обнаружен пылевой диск, некоторые особенности которого заставляют предполагать, что у Веги имеется спутник с массой порядка 20 земных масс. В Солнечной системе это всё ещё масса планеты-гиганта, но не Юпитера (свыше 300 масс Земли), а Нептуна (примерно 17 масс Земли).

[9]Возраст Солнечной системы как раз таков (4,5 миллиарда лет).

Такие рассуждения, конечно, имеют ещё более гипотетический характер, чем для планет земной группы. Они указывают на другую возможность объяснения правила Тициуса—Боде — объяснение не на основании эволюции Солнечной системы в течение миллиардов веков (о чём можно судить с известной уверенностью[10]), а на основании того, что происходило в процессе её возникновения. В данном случае речь шла о сравнительно позднем этапе этого процесса, когда уже имелись большие протопланеты. Но можно попытаться связать правило Тициуса—Боде и с более ранними этапами того же процесса.

В настоящее время уже нет сомнений, что планеты возникли вместе с Солнцем из диффузной межпланетной среды. Что касается возникновения звёзд, то современные представления об этом процессе — это уже не умозрительная гипотеза, а, как выражаются в подобных случаях, «сценарий»[11], физически хорошо обоснованный и согласующийся с многочисленными и разнообразными по своему характеру наблюдательными данными. Физические процессы, идущие в протозвёздных туманностях, теперь, по-видимому, можно считать известными в общих чертах, а применительно к образованию самих звёзд можно говорить уже и о количественных моделях отдельных этапов этого процесса. Однако отсюда ещё далеко до количественных моделей образования планетных систем (да и в качественном отношении нет достаточной ясности, так сказать, с «балансом» идущих при этом физических процессов), хотя качественно нет особых сомнений, что наряду со сжатием протозвёздной туманности в будущую звезду часть этой туманности сжимается в протопланетный диск, который затем распадается на отдельные «комки» — протопланеты, а последние иногда дробятся при столкновениях, иногда сливаются друг с другом. Возле нескольких звёзд за последние годы удалось обнаружить газопылевые диски, свойства которых, насколько они известны, соответствуют предполагаемым свойствам протопланетных дисков. По крайней мере в одном случае наблюдаются изменения диска, которые можно объяснить тем, что внутри него или рядом с ним движется «юпитер» и притяжение последнего приводит к этим изменениям. Но, повторяю, это всё пока что

[10]Некоторая неуверенность всё же остаётся, потому что при этом решаются не точные дифференциальные уравнения, описывающие движение планет, а некие упрощённые уравнения, законность использования которых не совсем ясна.

[11]Под «сценарием» понимают нечто среднее между гипотезой о некоем эволюционном процессе и по-настоящему разработанной и проверенной научной теорией такого процесса. Отдельные и притом существенные моменты сценария могут уже достигать уровня теории, но в нём остаются недостаточно проверенные места, где имеется или правдоподобная мотивировка качественного характера, или количественные прикидки, сделанные при весьма упрощённых предположениях.

носит преимущественно качественный характер. Некоторые попытки смоделировать численно процесс конденсации туманности в планеты предпринимались (С. Доул), но при этом столькими факторами приходилось пренебрегать, что сомнительно, можно ли полагаться на результаты этих численных экспериментов и не свидетельствуют ли они преимущественно об оптимизме экспериментаторов. Так или иначе, при некоторых предположениях об исходном состоянии туманности получается нечто похожее на закон Тициуса—Боде, причём приблизительно воспроизводятся и отношения планетных масс; при других исходных данных результат получается иным.

Если сейчас мы находимся в таком не слишком удовлетворительном состоянии, то задним числом можно сказать, что несколько веков назад в данном направлении шансов на успех не было. Но кто мог знать это в то время? И, с другой стороны, что считать успехом? Кеплер вполне мог бы додуматься до правила Тициуса—Боде: не бог весть какая сложная математика. А соответствие с наблюдательными данными, даже и по теперешним меркам в пределах до Урана довольно приличное, при их тогдашней неточности казалось бы превосходным. (Нептун же ещё не открыли!) Так что это было бы успехом, но успехом, ведущим в тупик, — объяснить открытую закономерность было бы невозможно, а над этим наверняка стали бы ломать головы. В итоге успех с планетными расстояниями мог бы на какое-то время задержать продвижение в том направлении, которое оказалось триумфально успешным не только для астрономии, но для всего точного естествознания, — в направлении поиска общих законов планетных движений, не зависящих от конкретных значений расстояний до Солнца. Так что, может быть, неудача Кеплера с планетными расстояниями была на самом деле удачей и для него, и для всех нас.

После этого Кеплеру фантастически повезло. Он послал свою книгу знаменитому астроному Тихо де Браге, и тот пожелал лично познакомиться с Кеплером. В 1600 г. они встретились, и Кеплер произвёл на де Браге хорошее впечатление. Насколько можно представить образ мыслей де Браге, фантазии о правильных телах его не должны были тронуть, но он оценил астрономические и математические познания Кеплера, а также его преданность науке, и пригласил Кеплера к себе в сотрудники.

Тихо де Браге (1546—1601) был по своему происхождению богатым и знатным датским дворянином (словечко «де» и указывает на дворянство), к тому же он получил большое наследство от дяди. По тогдашним понятиям, он занимался делом, не подходящим к его положению. (Он также женился на крестьянке.) Одно время ему удалось получить поддержку от датского короля, подарившего ему остров возле Копенгагена. (Король считал себя как бы должником семейства де Браге — когда-то дядя Тихо де Браге спас короля, карета которого упала с моста в реку, а сам при этом простудился и умер.) На этом острове на средства короля и самого де Браге за несколько лет, начиная с 1576 г., была построена астрономическая обсерватория «Ураниенборг» (Урания — муза, ведавшая астрономией). Точность астрономических измерений существенно зависит не только от конструкции инструментов, но и от их размеров, а у Тихо де Браге была возможность делать инструменты больших размеров. Кажется, только у Улугбека лет за 100 до того некоторые инструменты были даже больше, но в дополнение к большим размерам Тихо де Браге усовершенствовал их конструкцию, хотя в этом отношении в дотелескопическую эпоху возможностей было мало. В частности, он придумал различные механические приспособления, позволявшие точнее измерять направления на небесные светила. Со временем он начал строить новую обсерваторию, в которой все инструменты располагались под землёй и были тем самым защищены от ветра. Наконец, сам де Браге, по-видимому, обладал острым зрением. Поэтому он определял положение небесных светил с рекордной точностью[12]. Глаз обычно видит предметы, угловые размеры которых не меньше $1'$; ярко светящиеся предметы ме́ньших размеров тоже могут быть видны, но как точки. Заметить же изменение направления труднее. Изменение положения небесного светила на $4'$ — предел того, что удаётся различить обычным невооружённым глазом. Но теперь задним числом установлено, что ошибки наблюдений де Браге не превышали $1'$–$2'$, а бывали и меньше.

В 1588 г. умер король, покровительствовавший де Браге. Финансовая поддержка сразу прекратилась, а отношения с новым королём стали медленно, но верно портиться. В 1597 г. Тихо де Браге был вынужден навсегда покинуть Ураниенборг.

[12]Позднее такие измерения стали производить ещё более точно с помощью телескопов; это произошло почти через 100 лет после него. (Сами телескопы появились через несколько лет после его смерти, но сочетать их с угломерными устройствами научились позднее.) Ради исторической полноты надо, впрочем, упомянуть о Яне Гевелии (1611—83). Он уже пользовался телескопами (более того, какое-то время его телескопы были самыми большими в мире), но угломерные измерения производил без них, причём ему удалось превзойти Тихо де Браге в точности этих измерений. Как ни странно, Э. Галлей, посетив Гевелия, признал его измерения более точными, чем измерения Р. Гука, производившиеся путём сочетания телескопа с угломерным устройством. Допускают, что Галлей просто не хотел обидеть Гевелия, но не исключено и то, что первые инструменты Гука были ещё несовершенными (тем более что он не вёл систематических астрономических наблюдений, а ведь именно при них вернее всего могла бы ощутиться желательность тех или иных доработок).

К счастью, вскоре нашёлся новый меценат — германский император Рудольф II, интересовавшийся науками, а ещё более лженауками вроде астрологии и алхимии. Кажется, его весьма привлекало и колдовство. Вот только о НЛО он не знал (впрочем, в то тёмное время любой НЛО немедленно опознавался как проявление сверхъестественных сил). Возможно, в де Браге он видел скорее астролога, чем астронома. Но так как для астрологических предсказаний надо точно знать положение планет в прошлом и будущем, астрология отчасти заинтересована в астрономии. Как бы то ни было, благодаря императорскому «гранту» (деньги по которому, впрочем, поступали плохо) де Браге смог вновь приступить к строительству обсерватории возле Праги, столицы Рудольфа, надеясь, быть может, даже и превзойти Ураниенборг. Он был не так уж стар — 55 лет, так что в принципе он мог бы ещё немало поработать. Увы, судьба решила иначе: в 1601 г. Тихо де Браге скончался.

Теория Коперника поначалу имела серьёзные недостатки. Чтобы достичь согласия с наблюдениями, Коперник был вынужден использовать те же ухищрения, что и Птолемей, т. е. в основном эпициклы и деференты (эксцентриков и эквантов он избегал)[13]. Зная о неточности измерений положений Меркурия и не имея возможности самому восполнить этот пробел (в северной Польше условия для наблюдения Меркурия неблагоприятны), Коперник вообще не тревожился по поводу заметного расхождения теории с данными по Меркурию. Но и с другими планетами полного соответствия с наблюдениями не было, причём со временем несоответствия возрастали. Системе Коперника угрожала опасность подвергнуться со временем таким же «усовершенствованиям» с помощью новых эпициклов и т. п., каким подверглась система Птолемея.

Тихо де Браге не был сторонником ни Птолемея, ни Коперника, а предложил компромиссную систему, в которой Солнце вращается вокруг Земли, а планеты (к числу которых у него, как и у Птолемея, Земля не относится) — вокруг Солнца. Однако главным для него была не эта альтернативная система, а грандиозный замысел — обеспечить надёжную наблюдательную основу для решения вопроса о правильной системе мира. Несмотря на постигавшие его иногда неудачи, замысел

[13]Напомню вкратце смысл этих названий (подробнее разъяснённый в приложении I). Эпицикл — это окружность, по которой движется планета. Центр эпицикла, в свою очередь, движется вокруг Земли по другой окружности — деференту. Но центр деферента несколько смещён относительно Земли («эксцентричность»). Движение по окружности происходит не совсем с равномерной скоростью: она только кажется равномерной из некоторой точки — «экванта».

этот он осуществил, хотя свои плоды этот замысел принёс после его смерти[14].

Как уже говорилось, за год до смерти он пригласил к себе в помощники Кеплера. Специальной задачей Кеплера была обработка наблюдений. У самого де Браге, занятого строительством и наблюдениями, до этого просто не доходили руки, а кроме того, он хотя и владел надлежащими геометрическими и тригонометрическими сведениями, но как математик далеко уступал Кеплеру. В наблюдатели Кеплер не годился — зрение у него было неважное (по крайней мере, для астронома).

После смерти Тихо де Браге Кеплер был назначен его преемником со званием императорского математика, но со значительно меньшим окладом, да и тот выплачивался крайне нерегулярно[15]. Но кроме того, Кеплер получил (не без некоторой борьбы с родственниками покойного) бесценное «наследство»: архив Тихо де Браге. Этим наследством он сумел воспользоваться, обеспечив себе, правда, не доходы, но бессмертие.

На основании наблюдений де Браге Кеплер смог определить орбиту Марса и стал подбирать математическую кривую, которая соответствовала этой орбите. Сперва он пытался использовать различные трюки того типа, какими пользовался Птолемей, — комбинации деферентов с эпициклами и т. д. Однажды у него почти получилось — расхождение с наблюдениями не превышало $8'$. Вероятно, в то время любой другой на его месте удовлетворился бы таким совпадением, но Кеплер знал, что у де Браге ошибки в $8'$ не могло быть. И Кеплер продолжал искать кривую, которая хорошо подходила бы к орбите Марса. В 1608 г. он наконец её нашёл. Это был эллипс, в фокусе которого находилось Солнце. Так был открыт I закон Кеплера. Проверка для других планет

[14] Пока плодов не было, Тихо ничего не публиковал, за одним исключением: он опубликовал в виде книги результаты своих наблюдений над новой (на самом деле сверхновой) звездой, вспыхнувшей в 1572 г. О природе новых звёзд он ничего не мог знать (и только в наши дни его данные позволили уточнить характер взрыва сверхновой), но кое-что он всё-таки твёрдо установил уже в то время. Тогда считалось, что новые звёзды, равно как и кометы — это какие-то атмосферные явления. Доказательство: небеса, будучи совершенными, являются неизменными, а что атмосфера подвержена постоянным переменам, известно из повседневного опыта. Тихо же обнаружил, что направление на новую звезду из разных пунктов земной поверхности оказалось одним и тем же, откуда следует, что она находится гораздо дальше самых высоких облаков.

В старину обязанностью новых звёзд и комет было предвещать какие-то важные события: войну, эпидемию, рождение короля... Ничего такого в 1572 г. и сразу после него не приключилось, но, как сказал Кеплер, намекая на книгу Тихо, новая звезда возвестили рождение великого астронома.

[15] Кеплер оставался императорским математиком и при преемниках Рудольфа, до самой своей смерти, и пробыл в этой должности 30 лет. Я встретил в литературе указание, что жалованье он получил за 8 месяцев.

показала, что, насколько можно судить по имеющимся данным, то же справедливо и для их орбит.

Ещё раньше, в 1602 г., Кеплер нашёл тот закон, который называется II законом Кеплера.

Эти два закона увидели свет в 1609 г. в книге Кеплера «Новая астрономия, причинно обоснованная, или физика неба, изложенная в исследованиях движения планеты Марс, по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге». Как видно из заглавия, в ней речь шла о Марсе. Прямое указание, что эти два закона, как и добавившийся к ним со временем третий, справедливы для всех планет, содержится в опубликованном позднее «Сокращении коперниковской астрономии» (3 части, 1618—1622 гг.). Это был учебник астрономии, написанный в весьма распространённой ещё со средних веков форме вопросов и ответов (теперь она вышла из моды). В отличие от ряда других сочинений Кеплера (и от средних веков), здесь он обошёлся без всякой мистики. Учебник получил большую популярность и на какое-то время стал основным учебником астрономии. Католическая церковь по-своему высоко оценила достоинства книги Кеплера, немедленно включив её в индекс запрещённых книг.

В 1610 г. на весь образованный мир прогремели известия о телескопических открытиях Галилея. Кеплер откликнулся на это не только взволнованным сочувственным публичным посланием, но и изобретением другого типа телескопа-рефрактора (т. е. линзового телескопа). В телескопе Кеплера и объектив, и окуляр являются двояковыпуклыми линзами (у Галилея объектив был вогнутой линзой). При одинаковых размерах телескоп Кеплера даёт бо́льшее увеличение и имеет бо́льшее поле зрения, чем телескоп Галилея; правда, при этом изображение получается перевёрнутым, что никак не годится для зрительной трубы, предназначенной для военачальника или моряка, но для астронома это вполне приемлемо. Телескопы-рефракторы с тех пор строятся по схеме Кеплера. Надо сказать, что изобретение Кеплера не было случайным: он и раньше занимался оптикой. Его две книги по оптике, опубликованные в 1604 и 1611 гг., были, по-видимому, наиболее значительными сочинениями в этой области до Ньютона. Понятия кеплеровской геометрической оптики, а также его представления о роли основных частей глаза совпадают или почти совпадают с современными [9].

В 1612 г. умер Рудольф II, и если при нём Кеплеру хоть кое-как платили, то теперь платить вообще перестали. Ему пришлось искать новое место работы. Он нашёл его в Линце. Однако обещанное ему там жалованье если и выплачивалось, то не полностью и нерегулярно. В довершение бед, мать Кеплера была обвинена в колдовстве, что, как известно, наказывалось «милостиво и без пролития крови» путём сожжения. Предварительное расследование и судебный процесс тянулись с перерывами шесть лет. В конце этого периода Кеплер отправился на процесс в вюртембергский город Цоглинден для защиты матери, за что ему самому могло очень не поздоровиться. Кажется чудом, что ему удалось добиться осенью 1621 г. оправдательного приговора, — такое бывало редко. (По-видимому, на сей раз Кеплеру принесло некоторую пользу его звание императорского математика: хоть и не бог весть какая персона, но всё-таки при его участии в процессе приходилось соблюдать юридические нормы, а тогда обвинение не подтверждалось.)

Ещё в 1593 г. Кеплер начал писать научно-популярное произведение в фантастической форме «Сон», в котором описывал различные астрономические явления так, как они представляются с поверхности Луны. (Насчёт прочих обстоятельств лунной жизни он не мог быть точен, ибо не знал, что у Луны нет атмосферы.) Основной целью «Сна», по словам самого Кеплера, был «довод в пользу движения Земли, или, скорее, опровержение аргумента против движения Земли, опирающегося на чувственное восприятие»: хотя многое на Луне не похоже на Землю, её движение вокруг Земли никак не воспринимается непосредственно, а отражается только в отличии тамошних небесных явлений от земных.

Но как попасть на Луну? Космических ракет тогда не было и не предвиделось. Единственной «возможностью» было колдовство, которым Кеплер и «воспользовался», приняв некоторые меры предосторожности. Ему-де приснилось, будто он читает книгу, написанную от первого лица. Автор сообщает, что он молодой исландец, случайно попавший в Данию, где в течение нескольких лет учился у Тихо де Браге. Спустя пять лет он вернулся домой и узнал, что его мать — колдунья, общающаяся с некими духами. По просьбе матери один из этих духов подробно рассказывает молодому человеку о Луне. Впрочем, он называет её иначе, но нетрудно догадаться, что речь идёт о ней.

Начав работу над «Сном» в 1593 г., Кеплер неоднократно возвращался к нему. «Сон» был опубликован посмертно в 1634 г., но ещё до этого получили некоторое распространение копии рукописи «Сна». Сам Кеплер считал, что одна из них сыграла зловещую роль в судьбе его матери, послужив негласным основанием для обвинения в колдовстве. (Как же, ведь об этом свидетельствует её сын! Хоть он и уверяет, что ему это приснилось и что во сне речь шла о ком-то другом, откуда у него все эти подробности?) Однако на самом процессе «Сон» не упоминался.

Примерно тогда же, когда происходил этот ужасный процесс, Кеплер обнаружил третий закон планетных движений, который опубликовал в 1617 г. в книге «Гармония мира».

Кеплер задумывался над физической причиной открытого им строения планетной системы, но в этом отношении его взгляды представляли собой смесь правильных догадок с неправильными, отдающими дань средневековью. В этом отношении, как уже говорилось, Галилей был выше Кеплера. Они были союзниками в борьбе за гелиоцентрическую систему, но во многом расходились. Неприязнь к фантастическим измышлениям Кеплера помешала Галилею оценить открытые Кеплером три закона, а Кеплер не проявил интереса к открытиям Галилея в динамике.

Из-за этого Кеплер не знал о движении по инерции и разделял старинное мнение, будто движение может происходить только при постоянном действии поддерживающей это движение силы. В поисках силы, поддерживающей движение планет, он обратил внимание на открытое Галилеем вращение Солнца. Он полагал, что из вращающегося Солнца в плоскости его экватора выходят некие «невидимые истечения», которые продолжают вращаться вокруг Солнца и при этом подталкивают планеты. Но у него уже была и идея о тяготении. Он говорил, что «два отдельных тела стремятся друг к другу, как два магнита», и что «если бы Земля перестала притягивать воду океана, то вся вода устремилась бы к Луне». (Приливы и отливы с давних пор связывались с Луной. Однако Галилей это наблюдение игнорировал!) Сделаем три комментария.

1. Тяготение, по Кеплеру, взаимно — тела «стремятся друг к другу». Не только Солнце притягивает планету, но и планета — Солнце. Даже близкий к Ньютону способный математик Р. Котс (1682—1716) (после его смерти огорчённый Ньютон высказался в том смысле, что «если бы Котс пожил ещё, мы бы узнали что-нибудь новое»), редактировавший второе издание «Математических начал натуральной философии», этого вначале не понимал. Он предлагал внести «исправление», изъяв указание, что планеты притягивают Солнце. Ньютону пришлось проводить с ним разъяснительную работу.

2. Магниты доставляют общеизвестный пример взаимного притяжения тел. А незадолго до него У. Гильберт (1544—1603) начал систематическое исследование постоянных магнитов (и статического электричества). Он высказал и убедительно мотивировал идею, что Земля — гигантский магнит, чем и объясняется поведение магнитной стрелки уже давно употреблявшегося моряками компаса.

Если бы Кеплер упоминал магниты только как пример взаимного притяжения на расстоянии, то это было бы одно. Но Кеплер допускал, что тяготение действительно является магнетизмом или по крайней мере как-то связано с ним. Это было уже другое — необоснованная фантазия в лучшем средневековом духе.

3. Кеплер, судя по всему, допускал взаимное притяжение любых двух тел. Судя по его словам о воде океана, он понимал, что Земля притягивает не только Луну и другие небесные тела, но и земные объекты. Неясно, отождествлял ли он это притяжение с тяжестью? Если отождествлял, то вроде бы незачем говорить о магнитах (хоть и не бог весть какая редкость даже в то время, но всё же вещь не очень распространённая), когда годятся всем известные яблоки и прочие падающие на Землю предметы. Правда, по сравнению с яблоками магниты имеют одно преимущество: все, кто имел с ними дело, мог убедиться, что они притягивают друг друга, а кто видел, как притягивают друг друга два яблока? (Даже не с яблоками, а со специальным лабораторным оборудованием это увидел (и измерил) только Г. Кавендиш (1731—1810) в 1798 г.)

Когда в 1618 г. началась тридцатилетняя война, усилились и религиозные преследования. Кроме того, и независимо от них в Линце косо смотрели на «сына колдуньи», хотя и оправданной по суду. Кеплеру пришлось покинуть Линц. За несколько лет он побывал в нескольких городах, пока не нашёл пристанище в Ульме в 1626 г. Там он завершил работу над таблицами планетных движений, которые и издал в 1628 г. под названием «Рудольфовых таблиц» в память об императоре, который худо-бедно, но всё же поддерживал Кеплера, а до того — Тихо де Браге. Эти таблицы позволяют определить положения планет, Луны и Солнца и, в частности, указывают солнечные и лунные затмения на много лет вперёд. Таблицы использовались примерно 100 лет, причём за это время ошибка (расхождение между предвычисленным и реальным положением планет и Солнца) увеличилась незначительно, не в пример предыдущим таблицам. (Только с Луной было хуже.) Успех объяснялся тем, что таблицы были составлены на базе законов Кеплера (и, конечно, наблюдений Тихо де Браге). Составить более точные таблицы удалось только с наступлением новой эры в астрономии — эры телескопов (с угломерными приспособлениями) и законов Ньютона.

Производя обширные вычисления, Кеплер не мог не оценить пользы изобретённых в то время логарифмов. Автором этого изобретения обычно называют Дж. Непера (1550—1617). Непер сообщил о логарифмах в письме де Браге в 1592 г.; по-видимому, позднее Кеплер познакомился с этим письмом, причём это могло быть ещё до выхода в свет книг Непера: «Описание удивительных таблиц логарифмов» (1614 г.) (которую Кеплер впервые увидел у одного из своих друзей в Праге, когда ненадолго приехал туда в 1617 г.) и посмертно опубликованного «Устройства удивительных таблиц логарифмов» (1619 г.; в этой книге описан способ составления таблицы). Но по-настоящему ознакомиться с логарифмами он смог только в 1618 г. по вышедшему в этом году «Курсу практической математики» берлинского преподавателя математики В. Урсинуса. Однако у логарифмов был и другой изобретатель — астроном, математик, механик и часовой мастер И. Бюрги (1552—1632), пришедший к ним, как полагают, даже раньше Непера. У Бюрги была странная особенность: он почти ничего не публиковал, и его достижения нередко оставались его личным делом, не влияя на развитие науки и техники. На сей раз он всё-таки опубликовал таблицу логарифмов (точнее, антилогарифмов), которую составил в 1603—1611 гг., но, конечно, по своей привычке он не мог сделать этого вовремя: публикация состоялась только в 1620 г. Бюрги работал в Праге, поэтому Кеплер был с ним знаком, но о логарифмах Бюрги если и рассказывал ему, то только в самых общих чертах. Впоследствии Кеплер печатно выражал глубокое уважение к Неперу, а о Бюрги сказал: «Иост Бюрги указал путь к точно таким же логарифмам задолго до публикаций Непера... Правда, его мнительность и скромность загубили новорожденного, вместо того чтобы привлечь его для всеобщей пользы». После того как он наконец познакомился с логарифмами по изложению Урсинуса, Кеплер сам начал заниматься логарифмами, сперва для своих собственных вычислительных надобностей, а затем написал о них книгу (1624 г.), где не только поместил более удобные таблицы, но и изложил соответствующий теоретический материал яснее и полнее, чем первооткрыватели логарифмов.

Ещё в Граце Кеплеру приходилось подрабатывать астрологией. Я не знаю, верил ли он в неё, но он говорил, что астрология — дочь астрономии (как будто бы он добавлял: хотя и незаконная) и должна поддерживать свою мать. Одно время «дочь» добилась заметного успеха: в 1628 г. Кеплер получил какое-то положение в имении знаменитого полководца Валленштейна, гороскопы которого ему заказывались раньше. (Утверждают, что на Валленштейна произвело впечатление начало гороскопа, где говорилось, что он родился при таком же расположении небесных светил, как выдающийся польский государственный деятель и полководец Ян Замойский и ещё более знаменитая английская королева Елизавета. На таком «фоне» Валленштейн счёл несущественными фактические ошибки с прочими предсказаниями гороскопов.) Теперь в свите Валленштейна уже имелся астролог, но для астрологических предсказаний надо точно знать расположение планет, и Валленштейн понимал, что Кеплер может определить это расположение точнее любого астролога. Кеплер надеялся устроить в имении типографию и отпечатать там астрономические таблицы, конкретизирующие на ближайшие годы данные «Рудольфовых таблиц», а также опубликовать наблюдения Тихо де Браге и свой «Сон». Увы, в 1630 г. Валленштейн попал в немилость. Кеплер поехал в Регенсбург, где надеялся получить какие-то деньги от находившегося там императора. В дороге он простудился, по прибытии в Регенсбург заболел и умер.

Я ничего не говорил о математических работах Кеплера (кроме упоминания о логарифмах, тесно связанных с его астрономической деятельностью). Они весьма значительны, но всё же основной его вклад в науку — это его три закона. Здесь он был одним из величайших гениев; в математике он, пожалуй, «только» очень крупный талант. Если бы я хотел говорить о создании дифференциального и интегрального исчислений, что было одним из главных достижений Ньютона, то я должен был бы упомянуть и о его предшественниках в математике, и при этом надо было бы отметить математические работы Кеплера. Но я собираюсь говорить о другом достижении Ньютона, хотя и тесно связанном с дифференциальным и интегральным исчислениями, и при этом постараюсь без этих исчислений обойтись. Поэтому о Кеплере я кончаю.

Приложение III. О предыстории понятия состояния материальной точки — «стрела» Зенона

В ранней истории философии и математики хорошо известно имя Зенона Элейского[1] (р. ок. 500 г. до н. э.; год смерти неизвестен). Он был учеником и последователем философа Парменида, существенной (хотя и не единственной) частью учения которого было представление о едином, нераздельном и неизменном бытии. Это явно противоречило чувственному опыту, свидетельствующему о множественности вещей, разнообразии их свойств и их изменениях, но Парменид объявил этот опыт иллюзорным. Сократ в диалоге Платона «Парменид» вежливо даёт понять, что в сущности Зенон ничего нового сравнительно с Парменидом не привнёс. (Участвующий в беседе Зенон, задетый замечанием Сократа за живое, возражает, но не особенно убедительно, а Парменид при этом молчит, по-видимому, в основном соглашаясь с Сократом.) Но это относится к положительной части их учения. Новым же было данное Зеноном обоснование иллюзорности чувственного опыта. Зенон доказывал, что допущение множественности вещей и движения внутренне противоречиво, так что приходится отвергнуть свидетельства чувств и признать парменидовское учение. Зенон придумал около 40 рассуждений, призванных опровергать те или иные представления, связанные с множественностью вещей и их движением. Они получили название «апорий», что буквально означает «безвыходность»; фактически это своеобразное использование метода доказательства от противного, вероятно заимствованного из математики, — допуская, к примеру, что существует движение, Зенон стремится привести это допущение к абсурду.

Позднейшие авторы, отнюдь не соглашаясь с Зеноном (т. е., в конечном счёте, с Парменидом), отзывались о нём с уважением. Аристотель называл его «основателем диалектики», понимаемой вначале как искусство спора (при котором тезис противника опровергается путём приведения к абсурду), а более глубоко — как средство выяснять истину путём

---

[1] В Древней Греции людей обычно называли только по имени. Привычного нам способа называть по имени и фамилии (а в России — также и по отчеству) там не могло быть, поскольку не было фамилий. Были, правда, названия аристократических кланов, но даже и аристократов чаще всего называли просто по именам. Но вполне могло случиться, что среди деятелей в данной области одно и то же имя носили два разных человека; тогда во избежание путаницы добавляли ещё указание, из какого места этот человек происходит. В наши дни это не помогло бы (представьте себе, информативно ли будет добавление к имени прилагательного «московский» при 10-миллионном населении Москвы), но в Древней Греции такой способ работал. В философии известны по крайней мере три Зенона, и поэтому надо уточнить, что тот Зенон, о котором сейчас идёт речь, — это Зенон Элейский.

критического обсуждения[2]. Произошёл своего рода исторический парадокс. Парменид, весьма уважаемый при жизни, на науку не повлиял, да и в философии его влияние в конечном счёте оказалось сравнительно небольшим (буквально его учение ни Платон, ни Аристотель не приняли, а учли только некоторые моменты из этого учения), тогда как Зенон повлиял — повлиял не потому, что поддерживал Парменида, а потому, что продемонстрировал образцы критического анализа «общепринятых мнений».

Сочинения Зенона до нас не дошли, и из примерно 40 апорий нам известны 9, причём известны не в первоначальной форме, а так, как их излагали (и понимали) позднейшие авторы. Нет оснований подозревать их в сознательных искажениях, однако иногда какие-то немаловажные, но трудно уловимые оттенки могли измениться. Я думаю, что в одних случаях значение оттенков невелико, и если их и не передали правильно, то это несущественно, но что в других случаях положение может быть более сложным.

Некоторые апории Зенона демонстрируют ошибочность наивного представления, будто прямая линия состоит из точек примерно таким же образом, как цепочка состоит из звеньев — первое звено, второе звено и т. д. Но ведь материальный отрезок на самом деле состоит из атомов (тогда это была гениальная догадка, а теперь — бесспорный факт), и если бы он был столь тонок, что атомы располагались в один ряд, то действительно был бы первый атом, второй атом и т. д. Значит, прямая как множество точек устроена иначе, чем множество атомов, вытянувшееся в цепочку. Хотя для самого Зенона критика математических представлений того времени, не очень-то чётко оформленных, но общепринятых или по крайней мере широко распространённых, служила основой его критики протяжённости и множественности вещей вообще, объективно её значение было в другом: она показала, что математики должны позаботиться о точности своих исходных понятий. Скорее всего, они это сделали бы и без Зенона (открытие иррациональных величин не менее побудительно требовало пересмотра и уточнения основ[3]), но иметь дополнительный стимул было не лишне. (Окончательно необходимые уточнения были разработаны Евдоксом в его «теории отношений», упомянутой в приложении I.)

---

[2]Другая новация Зенона состояла в том, что он первый начал писать свои сочинения прозой (первые философы сочиняли философские поэмы). Не исключено, что у него просто недоставало поэтического таланта, но, как бы то ни было, в этом отношении почти все позднейшие философы являются его последователями.

[3]А если говорить только об отличии точек от атомов, то о нём свидетельствует уже возможность бесконечное число раз делить отрезок пополам.

Это касается тех апорий, которые можно назвать чисто математическими. Имеются и другие апории. Одно зерно падает бесшумно; почему же падение множества зёрен производит шум? Ещё в древности поняли ответ: слишком слабый звук мы не воспринимаем. Несколько зёрен ещё не составляют кучи; от добавления одного зерна не-куча не станет кучей; как же можно говорить тогда о куче зёрен? Это связано с тем, что граница понятия «куча» не является чётко очерченной. Переход от нескольких зёрен к несомненной куче может сопровождаться замечаниями: «пожалуй, это ещё не куча», «может быть, это уже маленькая кучка». Все эти апории, математические и иные, по-видимому, дошли до нас без искажений, т. е. если их и пересказывали своими словами, то смысл при этом совершенно не менялся.

В настоящей книжке для нас представляет интерес одна из апорий Зенона — «стрела». Мне кажется, это как раз тот случай, когда могли измениться оттенки. Но независимо от этого, объективно в этой апории имеются две стороны — математическая и физическая, которых при тогдашнем состоянии науки не различали (при Зеноне всё это было философией). Как обо всём этом говорил сам Зенон — в конечном счёте, не так уж важно; мы остановимся на обеих сторонах.

Апория гласит примерно следующее (повторяю, что я привожу не подлинные слова Зенона, а то, что можно извлечь из более поздних сочинений). Летящая стрела ничем не отличается от неподвижной. Действительно, время состоит из отдельных мгновений, а в каждый отдельный момент времени летящая стрела стоит на одном месте. Если бы она в этот момент передвинулась, скажем, из точки A в точку B, то это был бы уже не один момент, а два момента: тот, в который она находилась в точке A, и тот, в который она находилась в точке B. А если стрела неподвижна в каждый отдельный момент, то она не двигается.

Математическая (точнее, кинематическая) сторона дела тривиальна. В каждый момент времени t стрела находится в какой-то точке A (я говорю о стреле так, как если бы это была материальная точка; для протяжённой стрелы понадобилось бы больше слов, но суть дела не меняется). О её перемещении в один момент говорить бессмысленно. Но это не мешает тому, чтобы для разных t соответствующие точки A были разными: $A = A(t)$. Нам трудно понять, что, собственно, в этом можно было усмотреть не то что парадоксального, но просто хоть сколько-нибудь странного. Парадоксальность, видимо, усматривалась в физической стороне дела: если в данный момент времени материальная точка находится в A, с какой стати она будет куда-то перемещаться? И летящая, и неподвижная стрела находятся в одном и том же месте пространства; чем же отличается полёт от неподвижности?

Ответ состоит в том, что состояние стрелы определяется не только её положением, но и её скоростью. Субъективно Зенон хотел совсем другого, но объективно его парадокс как раз подсказывал, что состояние не сводится к положению. Для нас это очевидно. Но это стало очевидным только после Галилея и окончательно — после Ньютона[4]. А ранее считалось, что движение, не поддерживаемое силой, прекращается. Почему же брошенный камень (или та же стрела) летит некоторое время после прекращения действия силы, придавшей ему движение? Аристотель придумал «объяснение»: камень некоторое время увлекается воздухом, который был приведён в движение камнем тогда, когда камень набирал скорость под действием соответствующей силы. Правда, после этого более никакие силы не увлекают воздух вперёд, почему же он-то сохраняет способность к движению, да ещё и камень подталкивает? И ведь движение воздуха — это ветер; как же сильно должен дуть ветер, чтобы поддерживать полёт камня? неужели я, бросая камень, способен создать такой ветер? Нам непонятна психология людей, которые почти 2000 лет не задавали таких очевидных вопросов. И ведь не объяснишь этого тем, что задавать «лишние» вопросы «не рекомендовалось». Да, не рекомендовалось, но ведь случалось, что задавали вопросы по поводу религиозных догм, в сравнении с чем действие воздуха на камень — тема вполне «нейтральная».

Мне лично непонятно и то, почему в литературе почти не встречается упоминаний о физической стороне апории «стрела», хотя для человека с физико-математическим образованием эта сторона очевидна. Известные мне исключения — две-три научно-популярные книги физико-математического содержания, а вовсе не «солидные» исторические опусы.

[4]Некоторые поползновения в эту сторону можно найти у некоторых мыслителей конца средних веков, но поползновения робкие, нечёткие и не имевшие последствий.

Приложение IV. Ньютон

Ньютону, к счастью, не довелось изведать таких невзгод, какие испытал Кеплер. Наиболее бурные события в Англии того времени — две гражданские войны (1642—1646 и 1648 гг.), казнь в 1649 г. короля Карла I, разгон в 1653 г. Долгого парламента (он был прозван долгим, ибо функционировал 13 лет), диктатура О. Кромвеля, воцарение Карла II (сын Карла I; царствовал в 1660—1685 гг.) при поддержке влиятельных военных, — всё это произошло, когда Ньютон находился в детском или юношеском возрасте, и никак его не затронуло. Единственное заметное политическое потрясение, произошедшее, когда он был взрослым, — это «славная революция» 1688 г., когда был свергнут Яков II (брат Карла II) и воцарился (в 1689 г.) Вильгельм III Оранский, приглашённый парламентской оппозицией. Этот переворот прошёл спокойно — Якова II, в способностях которого сомневался его покойный брат и который за три года царствования успел оправдать эти опасения, почти никто не хотел поддерживать, а сам по себе монархический строй, имевший много сторонников, переворотом не затрагивался. (Пожалуй, своеволие и капризы Якова II, не обладавшего политической трезвостью и ловкостью брата, доставили стране больше потрясений, чем его свержение.) В дальнейшем смена короля или королевы всякий раз вызывалась естественной смертью предыдущего монарха[1] и происходила совсем спокойно, хотя могла влиять на политическую ориентацию правления. Впрочем, реальная власть всё больше перемещалась от монарха к парламенту и правительству. Временами она переходила от одной партии к другой — уже работала двухпартийная система «тори» и «вигов», — но на жизни Ньютона это не отражалось.

Было всё-таки одно внешнее потрясение, сильно повлиявшее на его жизнь: эпидемия чумы 1664—1667 гг. Парадоксальным образом, это страшное бедствие Ньютону принесло пользу, см. ниже.

Вообще же его жизнь была бедна внешними событиями. О нём можно сказать то же, что позднее один известный физик, Л. Больцман (1844—1906), сказал о другом, Г. Кирхгофе (1824—1887): «Великие события происходили только в его голове».

О тех из великих событий, происходивших в голове Ньютона, которые имеют отношение к теме этой книжки, говорится в следующих приложениях. Пока же приведу краткие биографические сведения.

[1] Кажется, было только одно исключение — отречение от престола Эдуарда VIII в 30-х гг. XX в., связанное с его намерением жениться на американке, которая для англичан была неприемлема в роли королевы. Оно тоже не нарушало законов и традиций и прошло спокойно.

Ньютон родился в деревне Вулсторп (в 75 км от Кембриджа) в семье фермера, умершего до его рождения. Была ли семья бедной или зажиточной — об этом говорят по-разному. Среди его родственников и близких были не только фермеры, но и священники, доктор, аптекарь. И так как в детстве Ньютон показывал больше склонности к учёбе, чем к крестьянскому труду, в 12 лет его отправили в школу в расположенном в 10 км от Вулсторна городке Грантеме. В 1661—1665 гг. Ньютон учился в Кембриджском университете, а именно в одном из его колледжей — Тринити-колледже. В это время его учителем был И. Барроу. В наши дни мы в России вспоминаем о Барроу как о математике (см. [7]), но он был также филологом и богословом, причём именно как богослов он более ценился в Англии в то время (да, кажется, ценится там и сейчас). Об этой незаурядной личности см. [7], [12]. Барроу отмечал значительную помощь, которую ему оказывал Ньютон, ещё будучи студентом.

По окончании университета Ньютон был оставлен там на работу. Однако вскоре, спасаясь от чумы, он почти на два года (с небольшим перерывом) уехал в родную деревню. Этот «творческий отпуск» оказался исключительно плодотворным. Подобных периодов в его жизни больше не повторялось, хотя нельзя сказать, что он сидел сложа руки. А так как гениев такого уровня вообще в истории было мало, похоже, история науки не знает другой столь же яркой вспышки творчества. За два года были выполнены основные оптические эксперименты, преобразовавшие этот раздел физики; в частности, был создан первый практически удовлетворительный телескоп-рефлектор (это достижение Ньютона первым получило широкую известность); было разработано дифференциальное и интегральное исчисление и вообще развито то, что мы теперь называем «математическим анализом»[2]... И, по его свидетельству, тогда же был открыт закон всемирного тяготения. А это не могло бы произойти без значительных достижений в механике. Пусть тогда они были ещё не столь полными, как в «Математических началах натуральной философии», но по крайней мере о центробежной силе Ньютон должен был знать (см. приложение V), а формула для неё получается не на пустом месте... В печати центробежная сила появилась только в 1673 г. у Х. Гюйгенса (см. то же приложение), поэтому во время своего «творческого отпуска» Ньютон должен был сам разобраться в соответствующих вопросах механики.

[2]Судя по высказываниям самого Ньютона, своим главным вкладом в анализ он считал не развитие собственно дифференциального и интегрального исчисления, а систематическое использование бесконечных рядов.

В 1669 г. Барроу перешёл на своего рода «политработу» — он стал придворным капелланом[3] — и уступил Ньютону свою кафедру[4]. На ней Ньютон и работал до конца XVII в. Вначале он продолжал оптические исследования, а позднее его интересы переключились на небесную механику и смежные вопросы, что привело к появлению «Математических начал натуральной философии» (см. приложение VI). Но и после публикации этого труда Ньютон продолжал заниматься небесной механикой, главным образом движением Луны. К сожалению, в полной мере о его поздних достижениях узнали только в конце XIX в., когда это имело только исторический интерес. По-видимому, он также вновь вернулся к оптике на какое-то время.

Очень существенно, что к концу 70-х гг. у Ньютона окончательно сформировалась научная методология, совпадающая с современной. Конечно, она вызревала в работах ряда учёных, и нельзя недооценивать вклада таких людей, как Г. Галилей или Р. Бойль. Но завершился этот процесс у Ньютона.

Одним из студентов, а затем приятелей Ньютона был способный, честолюбивый и энергичный аристократ Ч. Монтегю (1661—1715), который со временем стал канцлером казначейства, т. е. министром финансов. Монтегю задумал провести реформу денежной системы Англии. Собственно, тут он не был оригинален, это пытались сделать до него, но неудачно. Оригинален он был в своём подходе к реформе. Для начала он счёл нужным посоветоваться не только со своими подчинёнными — опытными чиновниками Казначейства, — но и с несколькими учёными. (С учёными он был хорошо знаком — ввиду покровительственного отношения Монтегю к науке он был даже на какое-то время

---

[3]В последние годы жизни Барроу был директором («мастер» — буквально хозяин) Тринити-колледжа.

[4]Как сообщает энциклопедия «Брокгауз и Ефрон», за пару лет до того Ньютон попытался стать членом коллегии преподавателей Кембриджского университета (получить так называемое «fellowship»), но тогда ему предпочли некоего Уведаля, который только этим и известен. (Но подумайте, каким гением надо быть, чтобы превзойти Ньютона, особенно если за плечами последнего уже были достижения его «творческого отпуска»?! Видимо, этот Уведаль был «гением III категории» по известной классификации С. Лэма. По Лэму, гении I категории — те, которые получают признание при жизни. Достижения гениев II категории оказываются выше возможностей понимания современников, так что эти гении получают только посмертное признание. Творения гениев III категории превосходят возможности понимания не только современников, но и их потомков, и эти гении признания вообще никогда не получают.) Однако Вавилов [12] сообщает о благополучной и быстрой университетской карьере Ньютона: в 1667 г. — младший член коллегии преподавателей (minor fellow), в 1668 г. — сперва старший член (major fellow), затем магистр. (О конкурирующем гении III категории нет речи.)

избран президентом Лондонского Королевского общества — английского аналога Академии наук[5].) По-видимому, полученные советы различались и по своему содержанию, и по степени полноты. Известно, что, помимо разработанного Казначейством проекта реформы, Монтегю получил и другие проекты, и один из них принадлежал Ньютону. На основе проведенного обсуждения Монтегю разработал окончательный проект реформы. Часто компромиссный вариант, составленный путём безыдейного, более или менее механического смешения различных предложений, оказывается хуже первоначальных вариантов, но в данном случае окончательный проект был хорошо продуман и оказался удачным. Не все, но многие предложения Ньютона вошли в этот проект.

Бумажных денег тогда не было, деньги были монетами из драгоценных металлов. Монтегю пришёл к выводу, что для успеха реформы необходимо быстро, за 2 года, перечеканить всю монету Англии и запретить обращение прежней монеты с некоторого срока. Для руководства этой работой он пригласил Ньютона (об искусстве Ньютона как практического механика и его компетентности в химии Монтегю знал ещё со студенческих лет). Ньютон был назначен в 1695 г. «смотрителем», а в 1699 г. — директором Монетного двора в Лондоне (последнюю должность Ньютон занимал до самой смерти). Ньютон сумел за год увеличить производительность Монетного двора в 8 раз, не добавив ни одного нового станка. (Конечно, это свидетельствует не только о технической компетентности Ньютона, но и о том, какова была организация работы Монетного двора до него.) В основном всё было сделано действительно за 2 года, а в 1699 г. реформа завершилась.

Монтегю влюбился в племянницу Ньютона Кетрин Бартон (1679—1740); подозревают, что они были тайно обвенчаны. Во всяком случае, Монтегю завещал ей значительную часть своего состояния. «Исследователи, оставившие без внимания большие разделы научной работы Ньютона в области химии и оптики, с лёгкой руки Вольтера с особым рвением занялись эпизодом Монтегю — Кетрин Бартон, имеющим только косвенное значение для жизни и творчества Ньютона» [12]. Те, кто придаёт значение этому «эпизоду», именно им и объясняют назначение Ньютона в Монетный двор (где его жалованье с самого начала было в несколько раз больше профессорского оклада). Но деятельность Ньютона на этом посту свидетельствует, что данное назначение отнюдь не было синекурой — едва ли кто-нибудь смог бы лучше справиться

[5]Общество развилось из «Невидимой коллегии» — кружка, встречавшегося частным образом с 1645 г., — и было официально утверждено королём в 1662 г.

с материальным обеспечением финансовой реформы. Монтегю сделал удачный выбор.

Переход от уединённой академической жизни в Кембридже к напряжённой административной работе в Лондоне кажется неожиданным, но надо сказать, что Ньютон и раньше не совсем чурался если не административных, то общественно-политических вопросов. В 1687 г. Ньютон был членом делегации, посланной Кембриджским университетом к Якову II с петицией по поводу королевского вмешательства в университетские дела [12]. Ньютон оказался самым упорным, хотя и самым молчаливым членом делегации, и его позиция сильно способствовала тому, что делегация не пошла на компромисс и добилась своего. В 1688—1690 и 1702 гг. он был депутатом парламента. Легенда гласит, что «палата общин услышала голос Ньютона только один раз, когда он обратился с просьбой к сторожу закрыть форточку в зале заседания» [12]. В то же время вполне можно представить, что как депутат парламента Ньютон мог помогать своему университету и что он при всех колебаниях парламентской политики продолжал придерживаться того курса, который считал правильным. (Вот только не совсем ясно, — мне, по крайней мере, — какой это был курс. В [12] и [27] сказано, что Ньютон был сторонником вигов или одной из вигских группировок, а в энциклопедии «Брокгауз и Ефрон» — что он был сторонником тори.)

В 1672 г. Ньютона избрали членом Лондонского Королевского общества, а с 1703 г. до самой смерти Ньютон был президентом Общества. В 1705 г. королева Анна возвела Ньютона в дворянское звание; возможно, это был первый случай присвоения английского дворянства за научные заслуги[6] (впрочем, вероятно, была учтена и его роль в финансовой реформе).

Если на время чумы у Ньютона пришёлся необычайный творческий подъём и если подъёмом, несомненно, отмечено время написания «Начал», то бывали у Ньютона и периоды депрессии. Таким, по-видимому, был период 1672—1675 гг., и несомненно таким был период 1691—1693 гг., когда временами дело доходило до психического расстройства [12]. В легенде последнее связывают с пожаром, уничтожившим ценные рукописи. Пожар, несомненно, был, но что именно сгорело и насколько тяжёлой была эта потеря, выяснить невозможно. Могла быть и реакция на колоссальное умственное напряжение при создании «Начал». В наше время сообщалось, что в сохранившихся волосах Ньютона обнаружены следы ртути и других тяжёлых метал-

[6] Следующий случай состоялся более чем через 100 лет, когда дворянином стал химик Х. Деви (1778—1829). С тех пор такие случаи участились. Сравнительно недавно дворянином стал математик М. Атья.

лов. Хроническое отравление ими при (ал)химических экспериментах (о соответствующих занятиях Ньютона см. ниже) случалось нередко до появления вытяжных шкафов. Правда, раз Ньютон дожил до 84 лет, долго оставаясь в хорошей форме, отравление не могло быть значительным. Но не было ли у него более сильного отравления, которое сказалось в начале 90-х гг., но от которого он оправился?

Тёмным пятном на памяти Ньютона остаются его споры с Р. Гуком (о чём упоминается в приложении VI), Г. Лейбницем (вопрос о приоритете в создании дифференциального и интегрального исчисления) и Дж. Флемстидом (1646—1719), в которых проявились «его болезненное самолюбие, обидчивость и властность» [12]. Моё впечатление (конечно, это впечатление человека, знакомого с делом «из вторых рук») таково, что в первых двух спорах оппоненты Ньютона тоже выглядят не лучшим образом, но в самом существенном моменте спора с Флемстидом правота определённо была на стороне последнего. Флемстид был выдающимся астрономом-наблюдателем, увеличившим точность астрономических изменений в несколько раз (он довёл её до $10''$). Ньютон широко использовал его данные как при работе над «Началами», так и позднее, при исследовании движения Луны. Поначалу отношения Ньютона и Флемстида были спокойными, но со временем они начали портиться, ибо Флемстиду не нравился высокомерный тон Ньютона. Окончательно они испортились, когда Ньютон вроде бы помог Флемстиду, добившись казённой поддержки для публикации наблюдений последнего. Дело в том, что это издание оказалось в руках не самого Флемстида, а Э. Галлея, за спиной которого, конечно, стоял Ньютон. Флемстид и раньше не любил Галлея, а тут Галлей (надо думать, с ведома и согласия Ньютона) решил опубликовать только часть наблюдений, которые ему показались более надёжными. Флемстид тщетно настаивал на публикации всех наблюдательных данных (ему удалось-таки организовать соответствующее переиздание, но он не дожил до его конца). С нашей точки зрения, он был прав.

Двусторонняя финансовая деятельность Ньютона (теоретическая по подготовке проекта реформы и технологическая по её материальному обеспечению) характеризует его с неожиданной стороны — как эффективного технократа. Не менее неожиданной стороной личности Ньютона является его увлечение занятиями иного рода со значительной «магической» компонентой. Об этой стороне его деятельности знали всегда, но в полной мере её размах был осознан только в XX в. Инициатором соответствующих исторических изысканий был Дж. Кейнс (1883—1946), который более известен как экономист, вероятно, величайший экономист начала XX века, чьи идеи легли в основу преобразования американской, а затем и всей западной экономики (естественно, у нас о таком человеке до недавних пор упоминали только с приличествующим случаю набором ругательств и проклятий). Менее известна роль Кейнса в изучении рукописного наследия Ньютона, а он приобрёл немало ньютоновских алхимических, теологических и исторических манускриптов, которые передал в кембриджский Кингс Колледж. В результате изучения многочисленных документов Кейнс привнёс в образ великого классика такие краски, которые могут шокировать, — увы, великий учёный не только занимался алхимией, что ещё можно было бы понять как экспериментальную деятельность в области зарождающейся химии, но и подходил к этому занятию с чуждых науке мистических позиций. Я не следил за исторической литературой по этому поводу и потому не могу иметь своего мнения, но указание на «магические» увлечения Ньютона не приходится считать личной экстравагантной выходкой Кейнса — после него то же самое (со ссылкой на документы) говорили другие. Эти увлечения сэра Исаака органически сочетались с попыткой пересмотра древней истории, истории христианской церкви первых веков н. э. и с богословием. О внимании Ньютона ко всем этим вещам убедительно свидетельствует состав его библиотеки: в ней всего 16% книг были посвящены математике, физике и астрономии, тогда как литература по теологии, философии, истории и герметизму (о нём см. далее) составляла около 70%. Так что Ньютон оказался не совсем таким, каким его представляли. Недавно в России вышла книга [27], которая так и называется — «Неизвестный Ньютон». (Оттуда я и заимстовавал сведения о библиотеке Ньютона.)

Подобные интересы были свойственны многим — вероятно, большинству — тогдашним учёным. А число хорошо образованных людей, целиком или почти целиком погрузившихся в оккультную атмосферу и не занимавшихся собственно наукой в нашем смысле слова, вероятно, было не меньше числа тех, кто хотя бы отчасти ею занимался и внёс в неё некоторый вклад. (Это, несомненно, было так в несколько более раннюю эпоху, «оккультной компоненте» которой посвящена книга [32].) На первый взгляд может показаться странным, что оккультная деятельность в конечном счёте могла косвенно способствовать становлению новой науки. Но это было так: хотя во главу угла ставились ложные идеи, но расширялся кругозор. Расшатывались прежние догмы; накапливались химические сведения; более полным становилось знакомство с античным наследием. Хотя основная ориентация «оккультных учёных» была «проплатоновской» (в отличие от ориентации сходастов на Аристотеля), в их поле зрения попали и древние атомисты. Ньютон и Бойль определённо стояли на атомистических позициях, умудряясь сочетать кое-что из Платона с Демокритом (которого Платон категорически отвергал).

Начиная с первых веков н. э., стали появляться так называемые «герметические» сочинения, частью сохранившиеся до наших дней и известные Ньютону. Анонимные авторы приписывали их Гермесу Трисмагисту («трижды величайшему»), жившему якобы в Египте 10—15 веками раньше и обожествлённому после смерти под именем Тота. В них излагается «тайное учение» — религиозные и натурфилософские представления, отчасти перекликающиеся с гностицизмом и неоплатонизмом[7], причём немалая часть этих сочинений посвящена зародившейся в то время алхимии. Ньютон верил в истинность по крайней мере части герметических трактатов и принимал их авторскую датировку, при которой их составление приходится на начало «омоложенной» им египетской истории (о его исторических изысканиях см. ниже).

Говоря об алхимических занятиях Ньютона, Вавилов с некоторым удивлением констатировал [12]: «Работа, конечно, осталась безрезультатной в отношении основной цели. Более удивительно отсутствие иных специальных и частных результатов. Во всяком случае в сохранившихся записях, по-видимому, нет ничего, кроме разрозненных наблюдений большею частью качественного характера. Такое положение дела трудно связать с поразительным экспериментальным талантом Ньютона, проявленным в особенности в оптических исследованиях. Искусство превращать опыты в гибкое, податливое орудие исследования, следующее за мыслью и логикой экспериментатора, — в этом состояло одно из основных умений Ньютона, — и его мы не видим в хаосе (по крайней мере кажущемся) алхимических опытов. Надо надеяться, что внимательное изучение алхимического рукописного архива Ньютона когда-нибудь разрешит этот вопрос. Сейчас он остаётся без ответа». Ниже я рискну предложить возможный ответ.

[7] Гностицизм — комплекс религиозно-философских учений начала н. э., в которых обычно имелось несколько степеней посвящения, высшие из которых были тайными. Насколько известно, в этих учениях причудливо сочетались христианские, восточные языческие и философские идеи. Неоплатонизм — последнее крупное направление античной философии (III—VI вв. н. э.), названное так потому, что в нём отчасти развивались некоторые идеи Платона, но привлекавшее и идеалистическую часть наследия Аристотеля. Неоплатоники внесли известный вклад в развитие логики (некоторые из них проявляли также интерес к математике, но здесь их вклад невелик). При фантастичности представлений неоплатоников о мире обращение к магии было если не обязательным, то вполне естественным (в этом отношении они сделали шаг назад по сравнению не только с Аристотелем, но и с Платоном, который хотя и придерживался не намного менее фантастических взглядов о мироздании, но, насколько можно судить, обходился без колдовства). В ещё большей степени то же относится к гностицизму.

По-видимому, Ньютон не заботился о массовом изготовлении золота, а пытался проникнуть таким путём в некие тайны природы и Бога[8], причём, как говорилось, он верил в правильность по крайней мере части весьма распространённых в то время алхимико-натурфилософских сочинений, но полагал, что их надо понимать в некоем особом смысле, который пытался раскрыть с помощью опытов. Такой «комментаторский» подход резко отличался от его творческой деятельности в математике и физике и был, по-моему, одной из причин бесплодности его алхимических экспериментов.

Ньютон не совершал никаких колдовских обрядов при своих экспериментах, но в его теоретических алхимических представлениях мистика была налицо. Известно, что алхимики использовали особую терминологию и придавали ей особое значение. Применительно к исходным материалам её смысл был известен (например, золото называлось «царём металлов», что, кстати, нашло отражение в сохранившемся до наших дней названии «царская водка» для смеси соляной и азотной кислот, растворяющей золото). Применительно к продуктам какой-нибудь цепочки реакций это не столь просто, но историки науки всё же сумели разобраться с подобными вопросами в тех случаях, когда описание реакций достаточно чётко и нет терминологического разнобоя. Ньютон, естественно, не мог устанавливать современных химических формул, но он устанавливал, что под таким-то названием фигурирует вещество, получаемое таким-то способом. Но это было только начало. Дальше в литературе встречались более туманные указания о получении золота и философского камня (с помощью которого в золото можно превращать что угодно). Поскольку золото никак не получалось, Ньютон полагал, что зашифрованные изложения древней мудрости со временем подверглись искажениям (особенно в более «высоких» разделах алхимии, где она смыкается с теологией и натурфилософией); эти искажения надо выявить и устранить. Философским камнем Ньютон не занимался, но он верил в некий эквивалент, о котором тоже писали алхимики, — в некий универсальный животворящий дух. Далеко про-

[8]Это было свойственно не только ньютоновским занятиям алхимией. «Магико-теургическая практика неоплатоников III—IV вв. носила весьма умеренный характер, и, видимо, народная молва приписывала им много больше, чем было на самом деле, что, кстати можно сказать и о Платоновой академии. Как правило, первые неоплатоники, обращаясь к магии, находили её смысл не только в самих деталях ритуала или технических приёмах и манипуляциях ведовства, сколько в философско-теоретическом анализе путей восхождения к высшей мудрости» [27]. Тот же автор отмечает, что такой же подход к магии был довольно обычным для просвещённых кругов эпохи Возрождения (начиная по крайней мере с середины XV в.) и удержался до времени Ньютона.

двинувшийся алхимик, по его мысли, отчасти уподоблялся самому Богу, использовавшему этот дух при сотворении и упорядочении мира! (На философский камень столь высокой функции, кажется, не возлагалось.) В Библии, полагал Ньютон, сотворение мира описано аллегорически, а алхимик пытается в какой-то степени его воспроизвести.

Здесь первая причина бесплодности алхимических занятий Ньютона — их «комментаторский» характер — смыкается со второй причиной, носившей, в известном отношении, противоположный характер: Ньютон ставил себе слишком крупную, а во многом и вообще недостижимую цель. Таково, конечно, стремление получить золото, обнаружить универсальный животворящий дух и уподобиться Богу. Но у «крупной цели» имелась и другая сторона, свободная от всякой мистики, хотя тоже чисто умозрительная: у Ньютона возникла некая новая гипотеза о строении материи (см. ниже), и он стремился её подтвердить, не обращая достаточно внимания на остальное. (Для контраста можно отметить, что Бойль тоже занимался алхимией, однако это не помешало ему сделать первые шаги в научной химии. Он не пренебрегал «мелочами».) Не желая довольствоваться ничем меньшим, Ньютон был обречён на неудачу.

Гипотеза Ньютона была связана с восходящим к древнегреческим мыслителям представлением об атомном строении вещества. До доказательства этого представления в то время было ещё далеко, но оно давало последовательную картину строения вещества, качественно объясняя многие факты, и его разделяли не только Ньютон, но и многие другие учёные (например, Бойль). Ньютон добавил к этому представлению идею об иерархическом строении вещества. Согласно этой идее, имеются некие первичные частицы, связи которых друг с другом являются очень сильными. В результате несколько первичных частиц образуют более крупную «вторичную» частицу. Вторичные частицы тоже взаимодействуют друг с другом, что приводит в образованию «третичных» частиц, и т. д.

В такой общей форме гипотеза Ньютона подтверждена современной наукой. Самые «первичные» на сегодняшний день частицы — лептоны (включая электрон) и кварки. Взаимодействие кварков приводит к образованию адронов, в том числе протонов и нейтронов. Более слабое взаимодействие последних приводит к образованию атомных ядер. Благодаря ещё более слабому взаимодействию ядер с электронами возникают атомы. Силы взаимодействия атомов друг с другом — это прежде всего силы химической связи, приводящие к образованию молекул. Это затрагивает только самые внешние части электронных оболочек атомов; «более глубокие» её части сильнее связаны с ядром и химическими процессами не затрагиваются. Наконец, имеются межмолекулярные и межатомные взаимодействия типа сил Ван-дер-Ваальса. Они слабее химической связи.

Как Ньютон пришёл к своей догадке? Я думаю, он понял, что в тогдашних химических и физических экспериментах проявляются силы двух типов, относящиеся (как мы теперь знаем) к двум «верхним этажам» иерархии: те силы, которые мы называем силами химической связи, и силы типа сил Ван-дер-Ваальса. Ньютон понял, что фазовые переходы — это явление самого верхнего уровня, а химические превращения — следующего.

Но в такой общей форме, что, мол, в строении вещества имеется некая иерархия уровней, гипотеза была бы слишком неопределённой. Ньютон пытался её конкретизировать, предложив некую геометрическую модель [12], [27]. Надо ли говорить, что эта умозрительная модель ничуть не лучше тех крючьев, которые привлекались для объяснения химических связей.

Ньютон надеялся, что его химические эксперименты заденут более глубокие этажи иерархии и тогда ртуть превратится в золото. Надежда подкреплялась авторитетом алхимических сочинений — кому-то, якобы, это удалось. Здесь первая причина бесплодности его алхимических занятий («комментаторский» подход) смыкается со второй (слишком крупная цель). Сейчас мы знаем, что в таких экспериментах невозможно затронуть даже внутренние части электронных оболочек, не говоря уже об атомных ядрах.

Повторяю, что всё это приправлялось мистикой и богословием. Причудливое сочетание подобной деятельности со строго научной методологией в физике уже век спустя выглядело бы парадоксально, но в то время ещё не казалось таким.

И, наконец, несколько слов об упоминавшихся исторических изысканиях Ньютона и его богословии. О первых см. статью С. Я. Лурье «Ньютон — историк древности» в [31]. Попытки Ньютона переписать историю мотивировалась желанием сократить её продолжительность, потому что иначе получается, что вскоре после всемирного потопа уже существовало большое и многолюдное государство (Египет), хотя люди не размножаются со скоростью кроликов; некоторые фараоны вообще царствовали ещё до потопа. Эта работа Ньютона (в отличие от более поздних попыток других авторов) не принесла ему ни славы, ни доходов (тем паче что соответствующая публикация была посмертной), но, по мнению Лурье, она объективно способствовала начавшемуся позднее развитию исторической науки. Ньютон практически исчерпал все возможности, которые имелись при признании двух «аксиом»: «1) всё, что сказано в Священном Писании, — святая истина, в которой нельзя сомневаться, и 2) мифы — это историческая действительность, приукрашенная поэтически... Искусная строго научная аргументация Ньютона, не приведшая, тем не менее, к убедительному выводу, не могла не привлечь внимания к его предпосылкам, обусловившим эту неудачу, и не могла не поколебать их».

В богословии взгляды Ньютона отступали от христианской ортодоксии, соприкасаясь (но не вполне совпадая) с арианством[9]. В связи с этом Ньютон пытался доказать, что в IV в. н. э. арианские взгляды отнюдь не были отвергнуты церковью и даже скорее были ею одобрены, а современная ортодоксия восторжествовала позднее и является извращением первоначального чистого христианского учения. (Как я понимаю, современные историки религии тоже не вполне полагаются на официальную историю церкви, но и ньютоновскую версию подтверждают отнюдь не полностью.).

Ньютон был похоронен в Вестминстерском аббатстве, где хоронят самых выдающихся людей Англии. В надписи на его могиле есть такие слова: «Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого». Отсюда видно, каким колоссальным авторитетом пользовался Ньютон в Англии в конце своей жизни.

В континентальной Европе его уважали, но до такого поклонения не доходили. Основные математические труды Ньютона были опубликованы с большим опозданием, когда их содержание в основном утратило новизну, а понимание механики «Начал» пришло на континент позднее. Между прочим, в популяризацию принципов и достижений Ньютона для широких кругов образованной публики немалый вклад внёс некто Ф. Аруэ (1694—1778), прославившийся как Вольтер. У французских учёных были известные основания относиться к «Началам» с настороженностью. Ньютон утверждал, что Земля должна представлять собой слегка сплюснутый у полюсов эллипсоид вращения, а по измерени-

[9]Арианство — течение в христианстве, названное по имени александрийского священника Ария (256—336). Оно принадлежит к более широкой группе течений, которые отрицают единую сущность Святой Троицы и потому носят общее название антитринитерианства. (В широком смысле часто все антитринитерианские учения относят к арианству.) Сам Арий признавал сверхъестественную сущность Христа, но считал его творением Бога-Отца, низшим сравнительно с последним. Более крайние антитринитерианцы считали Христа только человеком, в которого временно вселилась божественная сила. Что касается Ньютона, его антитринитерианство, возможно, было даже более умеренным, чем у Ария.

Считается, что арианство было осуждено на Никейском соборе 325 г., потом временно взяло верх, но затем окончательно осуждено церковью (Константинопольский собор 381 г.). Вскоре после начала Реформации вновь возникли антитринитерианские секты, в том числе и крайние.

ям выдающегося французского астронома Дж. Кассини (1625—1712) и его сына Ж. Кассини (1677—1756) выходило, что этот эллипсоид, наоборот, несколько вытянут в направлении оси вращения. Измерялась, в конечном счёте, кривизна меридиана. По Ньютону она должна увеличиваться от полюса к экватору, а у Кассини получалось наоборот. Но их измерения проводились только во Франции; со временем возникло подозрение, что Франция для таких измерений слишком мала — в её пределах изменение кривизны меридианов столь незначительно, что его нельзя достоверно установить при тогдашней точности приборов. В 1735—1742 гг. Парижская академия наук организовала экспедиции в Перу и Лапландию (на севере Скандинавии), дабы получить сведения о кривизне меридиана не только в средних широтах, но также возле экватора и далеко на севере. Академия надеялась, что различия в кривизне в этих местах должны быть более значительными и точности приборов хватит, чтобы их достоверно обнаружить. Измерения подтвердили правоту Ньютона, и после этого сомнения отпали.

На русском языке о Ньютоне написано намного больше, чем о Кеплере. См. аннотированный список литературы в конце настоящей книжки.

Приложение V. Всемирное тяготение

Вкратце содержание этого приложения можно резюмировать так: ещё до Ньютона некоторые люди догадывались, что планеты притягиваются к Солнцу и даже что сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния; доводы в пользу такой зависимости тяготения от расстояния можно извлечь из законов Кеплера. Однако неясно (мне, по крайней мере), до какой степени понимали, что тяготение является *всемирным.* (Хотя возможно, что по крайней мере Р. Гук это понимал. В наши дни о Гуке напоминает «закон Гука» в теории упругости, но Гуку принадлежат и многие другие экспериментальные достижения, причём не только в физике. Кроме того, он играл заметную роль в жизни Лондонского Королевского общества и был незаурядным инженером-строителем и архитектором.)

При самом начальном знакомстве с механикой мысль насчёт существования притяжения Солнца кажется простой и очевидной, не очевидно только, как оно зависит от расстояния. Ведь если бы планета двигалась по инерции, то она улетела бы от Солнца по прямой линии, а раз этого не происходит, значит, какая-то сила всё время «заворачивает» её в сторону Солнца. Но надо подчеркнуть, что без начального знакомства с механикой людям приходили в голову совсем другие мысли. На основании повседневного опыта считалось, что любое движение, не поддерживаемое соответствующей силой, должно остановиться[1]. А сила, поддерживающая движение, должна быть направлена в сторону этого движения, а вовсе не поперёк него.

По мнению некоторых древних философов (кажется, начиная с Платона), планеты, будучи совершенными божественными созданиями, наделены разумом — быть может, не совсем таким, как у людей, — и в силу этого разума они постигают, какой путь им предписан создателем, и сами следуют по этому пути, ни на йоту от него не отклоняясь (ибо они совершенны). В средние века был предложен иной «механизм»: на рисунках изображались ангелы, двигающие планеты куда положено. Я, правда, не знаю, не были ли эти изображения чисто художественными вольностями, вроде аллегорических изображений «справедливости» и «мудрости», венчающих короля. Но убеждение, что планеты надо двигать, а не то остановятся, было всеобщим. У Аристотеля имелась особая

[1] Аристотель делал исключение только для падения тел на Земле и кругового движения на небе; эти движения он называл «естественными» и считал, что они происходят по самой природе вещей. (Однако на небе он всё же не настолько полагался на естественность круговых движений, чтобы обойтись без некоего движущего начала, см. ниже.)

сфера «первого двигателя» (некое проявление бога), который сам неподвижен, но как-то двигает планетные сферы. Впрочем, Аристотель допускал и такую возможность, что имеются некие подчинённые первому двигателю божественные сущности, которые непосредственно двигают планеты. (Видимо, бог Аристотеля ещё не достиг такого совершенства, чтобы всё совершалось по одной его воле, без посредников. Платон называл его «демиургом», а по-древнегречески это означает просто «ремесленник», только это слово не имело того пренебрежительного оттенка, который мы имеем в виду, противопоставляя ремесленников искусным мастерам, работой которых мы любуемся на выставках. Похоже, демиургу Платона и богу Аристотеля при сотворении мира пришлось основательно поработать, да и после не приходится особенно почивать на лаврах.) Декарт заменил ангелов и первый двигатель эфирными вихрями, увлекающими в своём движении планеты. (Нечто подобное предлагалось и Кеплером, см. приложение II.) Ньютону и его последователям приходилось самым серьёзным образом опровергать эту «теорию».

Но во второй половине XVII века уже довольно много людей понимали, что в повседневном опыте движение надо постоянно поддерживать какой-то силой только потому, что постоянно действуют силы трения. Так что подталкивать планеты больше не требовалось, — уже понимали, что они движутся в пустоте и не подвержены сопротивлению среды, — а надо было найти количественное выражение для солнечного притяжения.

Каким же образом можно было додуматься до закона притяжения, пусть даже в физически менее содержательной форме (2) (в которой не уточняется, что $k = fm_S$)? Зная законы Кеплера, это не так уж трудно. Вообразим, что имеется планета, движущаяся вокруг Солнца по круговой орбите радиуса r. Таких планет на самом деле нет, но, поскольку законы Кеплера справедливы для нескольких планет, находящихся на различных расстояниях от Солнца и имеющих орбиты несколько различной формы, естественно думать, что для нашей воображаемой планеты законы Кеплера тоже должны выполняться. Из II закона сразу следует, что её движение должно быть равномерным, а III закон Кеплера утверждает, что для такой планеты период вычисляется по формуле $T = cr^{3/2}$, где c — некоторая константа (не зависящая от r). Значит, угловая скорость определяется так: $\omega = 2\pi/T = c_1 r^{-3/2}$ с новой константой c_1 ($c_1 = 2\pi/c$, но это неважно). Но, как известно, центробежная сила определяется по формуле

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

(v — скорость), что в данном случае есть

$$F = \frac{mc_1^2}{r^3} r = \frac{mk}{r^2}$$

с очередной константой k. А центробежная сила должна равняться силе притяжения к Солнцу, удерживающей планету на её орбите. Вот и получается, что эта сила создаёт ускорение, направленное к Солнцу и равное k/r^2.

Как видите, математика тут нехитрая. Но стоит поговорить о физике. Она вообще-то известна из школьного курса, но я думаю, что кое-что нелишне повторить и отчасти подчеркнуть.

Я упомянул о центробежной силе, так как это более привычно, но мог бы сказать иначе (как и сказал в самом начале этого параграфа): если материальная точка движется по окружности, вместо того чтобы двигаться по инерции по прямой, значит, какая-то сила постоянно «заворачивает» её в сторону центра окружности. В нашем случае планету «заворачивает» притяжение Солнца, а шарик на резиночке, который крутят над головой, «заворачивает» натяжение резинки. Эта сила создаёт центростремительное ускорение. Оно равно $v^2/r = \omega^2 r = c_1^2 r^{-2}$. А раз оно создаётся притяжением Солнца, то отсюда и получается, что это поле создаёт ускорение, обратно пропорциональное r^2.

На точку, движущуюся по окружности, действует не центробежная, а центростремительная сила. О центробежной же силе говорят в двух случаях. В законах механики, сформулированных Ньютоном, подразумевается использование инерциальных систем отсчёта. Если мы пользуемся неинерциальной системой отсчёта, в данном случае — системой отсчёта, вращающейся вместе с нашей точкой P, то явления в ней выглядят так же, как если бы эта система была инерциальной, но помимо прочих сил в ней на P действовала бы ещё центробежная сила, равная по величине центростремительной силе и противоположная ей по направлению. Действие двух равных и противоположно направленных сил взаимно уравновешивается, как оно и представляется во вращающейся системе отсчёта, по отношению к которой точка P неподвижна. В этом смысле центробежная сила является фиктивной силой, позволяющей формально пользоваться неинерциальной системой отсчёта так, как если бы эта система была инерциальной. Однако вполне реальны те силы, которые действуют со стороны материальной точки на связи, принуждающие её к несвободному движению; такие силы неизбежно должны возникать по III закону Ньютона. Например, планета «тянет Солнце в свою сторону»; шарик растягивает резинку.

Понятие о центробежной и центростремительной силах ввёл Х. Гюйгенс. О нём надо было бы говорить особо, но, так как говорить пришлось бы много, я этого делать не буду. Отмечу только, что он — создатель маятниковых часов (1657). Идею раньше высказывал Галилей, но он её не реализовал[2]. Гюйгенс, по-видимому, пришёл к ней независимо — во всяком случае, в его часах так называемый «часовой ход» (устройство, обеспечивающее взаимодействие маятника или балансира с прочим механизмом) был иной, нежели предлагал Галилей. Гюйгенс также предложил в принципе пружинные часы с балансиром, хотя практически реализации соответствующих часовых ходов были разработаны позже. Но часы нас сейчас не интересуют, тем более что у многих из нас часы теперь электронные, а о часах я упомянул потому, что во 2-м издании книги «Маятниковые часы» в 1673 г. Гюйгенс заговорил о центробежной и центростремительной силе. Окончательно вопрос о них выяснил Ньютон.

Наше рассуждение с воображаемой планетой просто и убедительно, и после 1673 г. его могли провести несколько человек (видимо, и провели, см. ниже). Но ведь настоящие орбиты другие — эллипсы. И заикаться о кругах, когда для астрономии это было давно пройденным этапом, в конце XVII в. было смешно. А получатся ли эллипсы в задаче Кеплера? В то время ответ на этот вопрос мог дать только Ньютон.

Впоследствии сам он говорил, что всемирным тяготением он занимался ещё в 1665—1667 гг., когда уехал в родную деревню во время чумы. (Я уже говорил об исключительной плодотворности этих двух его лет.) Но вот что странно: судя по его более поздней переписке с Р. Гуком в 1679 г. (см. [7]), только под влиянием этой переписки Ньютон занялся задачей Кеплера (и, видимо, сравнительно быстро её решил), тогда как до того он её решения не знал и, похоже, вообще о ней много не думал. А если он знал о всемирном тяготении, мог ли он не понимать, что задача Кеплера была решающим испытанием для этого закона и для создаваемой им механики? Ведь если мы говорим, что имеются такие-то общие законы механики плюс закон всемирного тяготения и что пла-

[2]У маятниковых часов был ещё один изобретатель — уже упоминавшийся И. Бюрги. В отличие от Галилея, он построил такие часы. Но так как Бюрги был врагом печатного слова, о его достижении узнали много позднее, когда маятниковыми часами уже никого нельзя было удивить.

Приблизительно одновременно с Гюйгенсом конструкцию маятниковых часов предожил Р. Гук, что вызвало спор о приоритете, в котором Гук не получил ожидаемой поддержки от своих коллег по Лондонскому Королевскому обществу и вынужден был замолчать, однако его биограф считает возможным, что это было связано с материальными интересами этих коллег [10].

неты движутся в соответствии с данными законами, то это останется голословным заявлением, если мы не покажем, что открытые Кеплером законы планетных движений следуют из наших законов. Если же мы это докажем, то доказательство будет таким грандиозным подтверждением законов механики (включая и закон тяготения), подобного какому за всю предыдущую историю ничто в науке не получало. Быть может, во время вынужденного «творческого отпуска» Ньютону не удалось справиться с задачей Кеплера? Но ведь отличавший его исключительно высокий математический уровень был в основном достигнут именно в это время. Быть может, задача Кеплера всё-таки даже и для Ньютона была довольно крепким орешком, и решить её одним махом не удалось, а до того, чтобы на какое-то время всерьёз сосредоточиться на этой задаче, тогда просто не дошли руки — было много других захватывающе интересных дел? Возможно, но скорее всего причина была другая. В литературе таких причин указывают целых три. Их реальность подтверждается документально, но была ли одна из них главной или все три причины сыграли примерно одинаковую роль — об этом мы не знаем, а гадать бесполезно.

1. По словам самого Ньютона, одно время ему казалось, будто астрономические и географические данные не подтверждают закона всемирного тяготения; тогда было бы бессмысленно заниматься задачей Кеплера. Согласно этому закону, отношение ускорения силы тяжести на поверхности Земли (оно известно из «земных» лабораторных измерений) к центростремительному ускорению Луны (оно равно $\omega^2 R$, где R — радиус лунной орбиты; угловая скорость Луны ω известна, раз известен период её обращения) должно равняться квадрату отношения радиуса лунной орбиты R к радиусу Земли r, т. е.

$$\frac{g}{\omega^2 R} = \frac{R^2}{r^2}, \qquad \frac{g}{\omega^2} = \frac{R^3}{r^2}.$$

Но вначале Ньютону были известны довольно неточные значения R и r, и равенства не получалось.

2. В предыдущем рассуждении молчаливо подразумевается, что под действием земного притяжения Луна получает ускорение, направленное к центру Земли и равное fM/R^2, а тело на поверхности Земли — ускорение, тоже направленное к её центру и равное fM/r^2, где M — масса Земли, R — расстояние от её центра до Луны, а r — радиус Земли. (Как и раньше f — постоянная тяготения.) Но ведь в законе всемирного тяготения непосредственно говорится о притяжении материальных точек, т. е. тел, размерами которых сравнительно с расстоянием между ними можно пренебречь. Расстояние от Земли до Луны (около 380 000 км)

примерно в 60 раз больше радиуса Земли (около 6400 км). На таком расстоянии ошибка от замены притяжения Луны притяжением материальной точки массы M, расположенной в центре Земли O, будет никак не больше, чем ошибка в тогдашнем определении самого этого расстояния. Но совсем другое дело — земное притяжение на поверхности Земли. Можно ли заменить его притяжением к точечной массе M, расположенной в O? Соображения о «большом расстоянии до Земли» здесь непригодны, но Ньютон, как уже говорилось, доказал, что шар из однородного материала или, более общим образом, шар массы M, состоящий из однородных концентрических слоёв (так что плотность вещества внутри каждого слоя постоянна, но может меняться от слоя к слою), создаёт (вне себя) такое же поле тяготения, как материальная точка массы M, расположенная в центре шара O.

Однако это открытие было сделано Ньютоном не в 1665—1667 гг., а скорее почти через 20 лет. Обсуждение этого вопроса имеется в заметке выдающегося английского математика Дж. Литтлвуда «Ньютон и притяжение шара», воспроизведенной в его книжке [40]. Имеется некоторое противоречие между Литтлвудом и цитируемым им Кейнсом: Литтлвуд указывает (ссылаясь на документ — письмо Ньютона к Галлею), что ещё в 1685 г. Ньютон «считал невозможной замену шара точкой», а Кейнс — что доказательство возможности такой замены Ньютон «нашёл не ранее, чем за год до опубликования Principia ("Математических начал натуральной философии" — Д. А.). Но в справедливости самого факта он был уверен многие годы и всегда применял его». По мнению Литтлвуда, если заранее знать, что притяжение шара сводится к притяжению точки (а также, видимо, если это не то чтобы знать, но считать правдоподобной гипотезой), то это как бы подсказывает удачный ход рассуждений и позволяет довольно быстро прийти к ответу, но без такой подсказки решить задачу труднее, и Ньютон смог это сделать только в середине 80-х гг.

Предоставляю историкам выяснить (если это возможно), кто же прав. Для нас сейчас это не имеет большого значения. Если прав Литтлвуд, то Ньютон всё же мог в середине 60-х гг. заменять притяжение шара притяжением точки в порядке, как он тогда мог думать, грубой прикидки. А если прав Кейнс, то Ньютон всё-таки не стал бы публиковать рассуждения, основанные на недоказанном утверждении, хотя бы он и верил в его справедливость.

О доказательстве данного утверждения Ньютоном см. в приложении VII.

3. Недавно было опубликовано ещё одно объяснение, почему Ньютон не добрался до законов Кеплера в середине 60-х гг. [51]. Автор

указывает (на основании сохранившихся документов и в полном согласии с другими авторами [12], [27]), что в молодости Ньютон был сторонником весьма популярных тогда (и какое-то время даже прогрессивных) натурфилософских взглядов Декарта и довольно долго пытался придать части декартовских концепций более точный характер; неудача этих попыток и привела к освобождению Ньютона от влияния Декартовой натурфилософии к концу 70-х гг. До этого постановка вопроса о математическом анализе задачи Кеплера (с дальнодействующим всемирным тяготением) казалась физически необоснованной, ибо у Декарта всё сводилось к наглядным картинам механистического близкодействия: столкновения частиц, увлечение видимых нами «грубых» материальных тел потоками в пронизывающем весь мир невидимом и не ощущаемом нами эфире... Я не буду повторять сказанного в [51] на сей счёт, благо эта книжка вполне доступна в обоих смыслах — она недавно вышла и потому её легко достать; она популярна и хорошо написана.

Резюмирую: различные факторы могли задержать обращение Ньютона к задаче Кеплера, вызывая у него сомнения в точности закона всемирного тяготения, и вполне возможно, что задержка до конца 70-х гг. — результат их совместного действия. А не была ли роль какого-то одного фактора значительно больше роли других и какой именно это был фактор — об этом, повторяю, не стоит гадать.

В начале 1684 г. вопрос о тяготении Солнца обсуждали К. Рен, Р. Гук и Э. Галлей во время встречи в одной из лондонских кофеен. (Рен (1632—1723) вначале был профессором астрономии и немного строителем, но после пожара 1666 г. он нашёл призвание и признание как архитектор, руководивший восстановлением Лондона; его шедевр — собор св. Павла.) Все три участника считали, что, по-видимому, сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния, и интересовались, не следуют ли отсюда законы Кеплера[3]. Рен «признался, что

[3]При этом Гук, собственно, не «интересовался», а утверждал, что это так и есть, но никаких доказательств не предъявил ни тогда, ни позднее. Однако справедливости ради надо сказать, что у Гука был ещё один довод в пользу обратной пропорциональности притяжения квадрату расстояния, кроме применения III закона Кеплера к круговой орбите. Гук экспериментировал с маятником, в котором грузик двигается по некоторой поверхности П (иногда это устройство называют «коническим маятником»). Сила f, действующая на грузик, — результирующая силы тяжести и реакции поверхности П. В наинизшем положении грузика сила f равна нулю, а при отклонении грузика от этого положения f как-то зависит от величины этого отклонения r. При различных поверхностях П получаются различные зависимости f от r. Гук считал, что для некоторой поверхности П в некоторой области значений r зависимость f от r похожа на k/r^2. Он обнаружил, что в этом случае орбиты замыкаются после одного оборота вокруг «центра притяжения». Они замыкаются также и при притяжении, пропорциональном r (когда притяжение следует «закону

его собственные усилия в этом деле ни к чему не привели, но тот из его собеседников, кто предложит решение в течение двух месяцев, получит сразу две награды — славу от современников и потомков, а от него, Рена, книгу стоимостью 40 шиллингов» [27][4]. Можно сказать, что тогда почти что публично была сформулирована задача Кеплера. (Почти что публично — это потому, что встречу трёх приятелей нельзя считать публичным мероприятием, но всё-таки эти три человека составляли заметную часть тогдашнего мирового научного сообщества, тем паче если добавить к ним Ньютона, который был в курсе дела по существу и которому через полгода рассказал об этой беседе Галлей. И их единодушие по поводу важности данной задачи и её предполагаемого ответа отражало вызревание соответствующего убеждения у всей передовой научной общественности того времени.)

Та мысль, что Солнце притягивает планеты, возникла ещё раньше, — её высказывал ещё Кеплер. Вероятно, не только соотечественники Ньютона, о которых он сам упомянул, но и другие учёные догадывались до того, что эта зависимость — обратно пропорционально квадрату расстояния. Менее ясно, насколько коллеги Ньютона понимали, что притягивают друг друга любые два тела (так что в уравнении (2) константа k равна fm_S). Доводы в пользу уравнения (2), основанные

Гука»), при других же П орбиты обычно не замыкаются, а являются «розетками». Поскольку в Солнечной системе орбиты замыкаются после одного оборота вокруг Солнца, Гук счёл это доводом в пользу притяжения, обратно пропорционального r^2. (Другой вариант — притяжение по закону Гука — отвергался как потому, что сила такого притяжения возрастает с расстоянием, что сомнительно, так и потому, что при таком притяжении периоды обращения по всем орбитам одинаковы, а в Солнечной системе это не так.) Затрудняюсь судить об обоснованности позиции Гука: всегда ли его сила f имитировала центральное поле, а не какое-то иное, насколько точно у него получалось, что в каких-то случаях $f \sim 1/r^2$, и если да, то насколько точными были его опыты? (Ему случалось и принимать желаемое за действительное, см. [7] по поводу отклонения вертикально брошенного тела от вертикали. Соответствующий эффект действительно существует, но реально его удалось обнаружить только в начале XIX в.) Но если в этом отношении у него не всё было чисто, то, во всяком случае, его опыты привели его к правильной догадке. Спустя без малого два века Ж. Бертран (1822—1900) доказал такую теорему: если в центральном поле все движения с начальной скоростью, не превосходящей некоторой границы, происходят по замкнутым орбитам, то притяжение пропорционально либо r, либо $1/r^2$. (Кроме того, это был, возможно, первый пример моделирования одного явления посредством другого, причём с попыткой установить количественное соответствие между ними.)

[4]Шиллинг — не существующая более денежная единица, равнявшаяся 1/20 фунта стерлингов (по крайней мере, такой она была в недавнее время). Я не знаю, какова была покупательная способность 2 фунтов в 1684 г.; ясно только, что она была намного больше, чем теперь. Но так как Ньютон не участвовал в этой беседе и так как его решение вопроса было опубликовано более чем через два месяца, ему, видимо, пришлось довольствоваться одной лишь первой наградой.

на законах Кеплера, ничего об этом не говорят. Был, по-видимому, тот довод, что движение спутников Юпитера как будто удовлетворяет законам Кеплера, но с другими значениями констант, входящих в математическую формулировку II и III законов. Наблюдательные данные здесь были менее точными, чем для планет, но соответствие с III законом констатировалось довольно уверенно. Отсюда вывод: с одной стороны, Юпитер притягивается Солнцем, а, с другой стороны — сам притягивает свои спутники. Если это верно для Юпитера, то естественно думать, что верно и для других планет.

У Ньютона был и другой довод в пользу множителя $m_P m_S$ в выражении для силы притяжения планеты к Солнцу — III закон механики. Если планета притягивается Солнцем пропорционально m_P/r^2, то и она должна притягивать Солнце, и, с одной стороны, по аналогии кажется, что это притяжение пропорционально m_S/r^2, а с другой — по III закону механики оно пропорционально m_P, поскольку этой массе пропорционально притяжение планеты Солнцем.

Была и знаменитая история с яблоком. Во время «творческого отпуска» Ньютон якобы увидел в саду падающее яблоко и подумал, до какой высоты простирается земное притяжение? Доходит ли оно до лунной орбиты? Раз Луна не улетает прочь от Земли, какая-то сила всё время «заворачивает» её к Земле. Стало быть, Земля притягивает как яблоко, так и Луну; похоже, что оба эти притяжения — проявления одного и того же. А притяжение Землёй Луны конечно, явление того же порядка, что и притяжение планет Солнцем или спутников Юпитером. Анекдотический характер этого эпизода неоднократно вызывал иронические комментарии вроде того, что яблоки вообще играют заметную роль в мифологии — Адам и Ева, сад Гесперид, суд Париса... Но имеется свидетельство, что Ньютон сам рассказывал эту историю (см. [12]).

Сила притяжения предмета к Земле — это то, что мы называем его весом. Вес пропорционален массе; здесь масса фигурирует как некая характеристика связи тела с тяготением. Закон Кулона, описывающий взаимодействие электрических зарядов, похож на закон всемирного тяготения, только в нём фигурируют не массы, а заряды. Поэтому можно сказать, что масса — это «гравитационный заряд». Но масса фигурирует и во II законе механики Ньютона, где она характеризует, так сказать, «инертность» тела — чем больше его масса, тем меньшее ускорение под действием данной силы оно получит. Можно сказать, что во II законе говорится об «инертной массе». Выше мы молчаливо подразумевали, что обе массы — гравитационный заряд и инертная масса — совпадают, но ведь заранее это ниоткуда не следует. Не знаю, задумывались ли над данным вопросом коллеги Ньютона, но Ньютон над ним задумался и поставил специальный опыт, подтвердивший, с известной точностью, совпадение этих масс. Впоследствии их совпадение проверяли со всё бóльшей и бóльшей точностью, о чём можно прочитать в [11]. (Астрономические исследования (лазерная локация Луны, позволяющая сравнить ускорения Земли и Луны под действием притяжения Солнца), о которых сказано в [11], продолжались и позднее; теперь они охватывают уже 30-летний промежуток времени и точность результатов повысилась.) Эти эксперименты не относятся непосредственно к моей теме, и у меня нет времени на них останавливаться, но упомянуть об этом я был обязан.

Приложение VI. О «Математических началах натуральной философии»

В жизни Ньютона было три периода, когда он интенсивно занимался тяготением и движением небесных тел. Первый — это его «творческий отпуск» во время чумы. Второй — это 1679 г., когда его интерес к этим вопросам был стимулирован перепиской с Гуком. В этот период Ньютон понял, что второй закон Кеплера является следствием квазицентрального характера поля. По-видимому, тогда же он сумел вывести первый закон Кеплера из того, что тяготение убывает обратно пропорционально квадрату расстояния (во всяком случае, когда спустя пять лет он разговаривал с Галлеем, то сказал, что данное утверждение ему известно). Третий период — это время создания «Математических начал натуральной философии». Во второй половине 1684 г. была написана рукопись предварительного характера с кратким резюме доказанных Ньютоном утверждений, относящихся к задаче Кеплера и родственным вопросам, а в 1685—1686 гг. были написаны сами «Начала».

В дальнейшем Ньютон время от времени занимался движением Луны (о чём будет сказано ниже), но я не знаю, установлен ли ход этой работы с такой же определённостью и были ли здесь такие же «всплески» или работа шла более ровно.

Как видно, «Начала» — это сравнительно позднее сочинение Ньютона. (Ещё позднее, в 1704 г., была опубликована имеющая столь же высокую репутацию «Оптика»[1], но она «подводила итог обширной группе

[1] Первые же сообщения Ньютона о его оптических экспериментах и сделанных из них выводах вызвали полемику с Гуком, который в одних случаях претендовал на приоритет, в других — указывал, что из опытов можно сделать иные выводы, и притом не проводил достаточно чёткого различия между гипотезами и доказанными утверждениями или экспериментально подтверждёнными предпосылками рассуждений. У Ньютона сложилось впечатление, что Гук поднимает шум, не разобравшись в существе дела (что, по-видимому, в общем верно, хотя всё же Гук не всегда был неправ), и развилась стойкая неприязнь к Гуку, платившему ему тем же. Правда, в период около 1679 г. их отношения временно улучшились, что и привело к обмену письмами по поводу всемирного тяготения, но затем ухудшились окончательно. Ньютон твёрдо решил ничего не публиковать по оптике до смерти Гука. Будучи всего на 8 лет моложе Гука, Ньютон едва ли мог быть вполне уверен, что дождётся таковой, но дождался и тогда не только опубликовал «Оптику», но и согласился (в 1703 г.) стать президентом Королевского общества. На этом посту он принял меры к уничтожению всяких следов Гука, бывшего в течение многих лет секретарём общества, так что сейчас Королевское общество располагает портретами всех своих секретарей, кроме Гука, хотя последний и до своего избрания секретарём (1677 г.) играл в нём большую роль. (С 1662 г. — почти с самого начала официального учреждения «Общества» — Гук был «куратором», в обязанности которого входила организация заседаний и подготовка экспериментов для демонстрации на заседаниях

работ Ньютона, относящихся к семидесятым и восьмидесятым годам XVII в., и её появление именно в 1704 г. совершенно случайно» [12]). Так что основное содержание «Оптики» и, возможно, значительные куски текста восходят к более раннему времени, чем «Начала».) К 1684 г. основные интересы Ньютона уже в течение ряда лет были связаны с алхимией и богословием, и сам он вовсе не собирался писать о механике и астрономии. Тем, что он всё-таки написал «Начала», мы обязаны Галлею, который был весьма взволнован утверждением Ньютона, что тот располагает выводом законов Кеплера из законов механики (в приложении V говорится об обсуждении этого вопроса тремя приятелями — Реном, Гуком и Галлеем). По-видимому, Галлей обладал немалой энергией и немалым обаянием, и ему удалось убедить Ньютона написать изложение соответствующих рассуждений. Но если такой была первоначальная цель «Начал», то Ньютон ею не ограничился, и задача Кеплера — только один из вопросов (частью примерно столь же сложных), рассмотренных в «Началах». (Впрочем, вероятно, что Ньютон думал о том, чтобы когда-нибудь изложить всё, что он открыл в механике и небесной механике, но постоянно откладывал это «на потом». А когда Галлей убедил его начать писать о задаче Кеплера, он решил, что раз так, то он уж напишет обо всём.) При всём том основная слава «Начал» оказалась связанной с этой задачей.

Помимо «давления» со стороны Галлея, большое стимулирующее влияние на Ньютона оказало открытие того факта, что притяжение шара, состоящего из однородных концентрических шаров, вне этого шара является таким же, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре. Это открытие (сделанное, похоже, вскоре после того, как Ньютон не без влияния Галлея вернулся к задаче Кеплера) намного повысило в его глазах ценность исследования задачи Кеплера и родственных задач: оказалось, что замена небесных тел точками приводит не к приближённым результатам не очень-то большой точности, как казалось ранее, а к практически точным (остётся только очень небольшая неточность из-за незначительного отклонения формы этих тел от сферической).

Галлей взял на себя заботы об издании «Начал», включая как оплату расходов (он был состоятельным человеком, сыном богатого мыловара), так и всю «техническую» работу по изданию. Ньютон даже писал ему: «Ваша книга»[2].

Общества, причём приборы для экспериментов Гуку нередко приходилось изготовлять за свой счёт. Он был также одним из авторов устава 1663 г., заменившего предыдущий, видимо, написанный наспех.)

[2]Позднее Дж. Кондуитт (1688—1737), помощник и преемник Ньютона по Монетному двору, а также муж К. Бартон, сказал о Галлее: «Улисс, который произвёл

«Начала» были написаны на латинском языке, который на протяжении ряда столетий был международным языком учёных Европы. Ещё в первой половине XIX века знаменитые математики К. Гаусс (1777—1855) и К. Якоби (1804—1851) писали на латыни, хотя это было уже на грани анахронизма. Во времена же Ньютона это было нормой, хотя Галилей уже перешёл на современный итальянский язык. Впоследствии «Начала», конечно, были переведены на другие языки, включая русский. Русский перевод [47] выполнен А. Н. Крыловым (1863—1945). Выдающийся прикладной математик, механик (и потому академик), корабельный инженер (и потому контр-адмирал и генерал-лейтенант), Крылов был знатоком истории физико-математических и примыкающих к ним технических наук. Прекрасно зная современное состояние механики и теории земного магнетизма, Крылов с интересом и энтузиазмом прослеживал истоки и развитие этих наук в трудах классиков. Владея не только основными западноевропейскими языками, но и латынью, он многие из этих трудов изучил в подлиннике, а кое-что, как «Начала», перевёл на русский язык. Специалисты указывают на высокое качество его переводов, в том числе и перевода трудного текста «Начал»: не говоря уже о точной передаче смысла, Крылов сумел в русском языке отразить стилистические особенности латинского текста Ньютона. Крылов сопроводил свой перевод более чем 200 примечаниями. В них указываются связи с трактовкой тех же вопросов в позднейших работах, даются пояснения (вплоть до восстановления опущенных рассуждений), приводится изложение тех же вопросов другим (аналитическим) методом. Двадцать с небольшим примечаний содержат указания на имеющиеся у Ньютона ошибки.

В литературе имеются противоречивые высказывания насчёт обстоятельств написания «Начал». Указывают, что Ньютон вообще относился с высокой добросовестностью к своей работе, а в данном случае особенно; многие места он переписывал по пять-шесть раз. Если он работал над «Началами» с полной отдачей сил, то не удивительно, что потом наступила усталость и что он был рад разделаться с книгой, передоверив всё Галлею. Однако есть и другое мнение [14]: «„Начала“, по-видимому, были написаны Ньютоном в спешке среди обременявших его дел и обязанностей», и это было «на исходе активной научной деятельности»[3]. Последнее в основном справедливо, хотя некоторую научную работу (и притом по-прежнему высочайшего уровня!) Ньютон

Ахилла» (ср. с эпизодом из «Илиады»: Улисс, т. е. Одиссей, обнаружил Ахилла, укрытого среди девушек, и побудил его идти на Троянскую войну).

[3]Это мнение Вейнстока связано с его уверенностью, будто в «Началах» допущена грубая логическая ошибка при выводе законов Кеплера из законов Ньютона

продолжал и позже — см. ниже о его исследовании движения Луны. А вот первое вызывает сомнения. Многим учёным иногда приходилось писать научные работы «в спешке среди обременявших их дел и обязанностей»; результаты вовсе не обязательно были плохими, однако по сравнению с работами того же человека, написанными в более благоприятных условиях, они проигрывали. Нет оснований думать, что в этом отношении у величайшего гения дела будут обстоять иначе, чем у простых смертных. Но почему-то два важнейших труда Ньютона — «Начала» и «Оптика», — появившиеся «среди обременявших его дел и обязанностей», вообще ни с чем не приходится сравнивать в его наследии, да и во всей сфере точных наук эти труды Ньютона принадлежат к числу высочайших вершин. По-видимому, во время работы над «Началами» Ньютон сумел почти полностью отключиться от «обременявших его дел и обязанностей», равно как и от алхимии. Кстати, сомнительно, были ли в то время у него особенно обременительные обязанности. (Они появились с 1696 г., когда Ньютон начал работать на Монетном дворе в Лондоне и эта работа действительно отнимала всё его время. Но уже говорилось, что, вероятно, значительная часть «Оптики» была подготовлена раньше.)

«Начала» написаны без сколько-либо явного использования дифференциального и интегрального исчисления. Конечно, Ньютон не мог обойтись без мгновенной скорости, и поэтому кое-что из дифференциального исчисления у него затронуто, но очень мало. Вместо этого рассуждения проводятся геометрически, в духе Евклида, что с нашей точки зрения громоздко и нами воспринимается с трудом. По этому поводу суждения в литературе тоже противоречивы. Наиболее распространённое мнение, изложенное Вавиловым [12], таково: «Задача, стоявшая перед Ньютоном, требовала новых математических методов; классическими методами геометрии Евклида нельзя было обойтись. Мы знаем, что эти новые методы Ньютоном были найдены» — речь идёт о дифференциальном и интегральном исчислении. Подразумевается, что Ньютон эти методы и использовал[4]. Но, «публикуя в конце концов свои результаты, Ньютон естественно стремился к тому, чтобы его книга

(см. часть 2 приложения VIII). При спешке недолго и ошибиться самым примитивным образом.

В действительности, как я говорил (на основании примечаний Крылова), в «Началах» отмечались ошибки (см. ниже), но не такие.

[4]Последнее было более явно высказано Кейнсом: «Разумеется, не может быть никакого сомнения в том, что характерная геометрическая форма, которая придана всему изложению в „Началах“, не имеет ничего общего с теми мыслительными процессами, которые привели Ньютона к его выводам» (ссылка, хотя с не совсем полным библиографическим описанием, имеется в [40]).

была понята, чтобы её читали». А если бы она была написана с явным использованием дифференциального и интегрального исчисления, то «„Начала“ остались бы для большинства учёных современников Ньютона книгой за семью печатями», потому что подробного изложения новой математической дисциплины тогда ещё не было. «Геометрические же „Начала“ с трудом, но всё же, хотя бы в некоторой степени, усваивались».

Из связанных с этим архаизмов «Начал» меня удивляет то, что там нигде нет понятия ускорения. В латинском оригинале имеется слово, обозначающее «ускорение», но Крылов в своих примечаниях трижды (!) предупреждает читателя, что у Ньютона это слово имеет иной смысл — оно обозначает приращение скорости в течение некоторого промежутка времени, хотя бы и очень малого (примечания [9], [92], [105] в [47]). Поскольку в наши дни читатель невольно понимал бы «ускорение» как «скорость изменения скорости», несмотря на предупреждения переводчика, у Крылова латинское «ускорение» всюду переведено как «приращение скорости». Здесь едва ли можно сомневаться, что Ньютон прекрасно знал о мгновенном ускорении, но сознательно избегал о нём говорить. Мне кажется, что даже с точки зрения его «тактической уловки» это было ошибкой. Школьники прекрасно осваиваются с ускорениями, не дифференцируя (правда, они слышали о перегрузках у лётчиков и космонавтов, но едва ли без этого нельзя понять смысла данного понятия).

Впрочем, некий «суррогат» мгновенного ускорения в «Началах» всё-таки присутствует. Сам по себе этот «суррогат» — важное геометрическое понятие: кривизна кривой. Но оно используется, по-моему, не столько ради геометрической стороны дела (где его присутствие

Добавлю, что, как ни прячет Ньютон концы в воду, кое-где остаются явные свидетельства о познаниях, выходящих за пределы той математики, которую он счёл дозволенной к употреблению в «Началах». Вот яркий образец. В задаче 2 раздела «Предложение XLV. Задача XXXI» книги I Ньютон, ничтоже сумняшеся, использует открытый им биномиальный ряд — разложение $(T - X)^n$ по степеням X. Ньютон законно называет его «нашим рядом», но не столь законно подразумевает его известным, — этот ряд ещё не был тогда опубликован. Крылов говорит в примечании [103] в [47]:

«Обобщение понятия о степени и её показателе на какие угодно числа принадлежит Ньютону. Следует также обратить внимание, что разложение величины $(T - X)^n$ по формуле „бинома“, которую он называет „наш ряд“, пишется для *всякого* показателя n. Указания, каким образом такие разложения производить, находятся в сочинении Ньютона „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas“, которое было сообщено в рукописи Барроу в 1669 г., но не было издано до 1711 г. Это есть один из примеров, где Ньютон пользуется в своих „Началах“ математическими методами, ему известными, но не опубликованными».

было бы понятно), сколько именно как некий суррогат ускорения. Действительно, представьте себе, что материальная точка движется под действием ускорения, направление которого не совпадает с направлением скорости. Тогда её орбита искривится. Кривизна — это некоторая числовая характеристика этой искривлённости. Кривизну k кривой в точке даже можно определить кинематически как величину ускорения при движении точки по этой кривой с единичной скоростью (вообще говоря, в различных точках кривой будет разная кривизна). Это, конечно, не то же самое, что ускорение при другом типе движения по кривой, но всё же нечто родственное. Но такое определение уместно для человека, свыкшегося с ускорением. Имеется другое, геометрическое определение, которым и пользуется Ньютон. Оно напоминает определение касательной линии, но является более тонким. Касательная в точке P кривой — это проходящая через P прямая линия, направление которой близко к направлению хорды, стягивающей дугу кривой, тоже проходящую через P и имеющую малую длину Δs, и чем меньше Δs, тем меньше различие между направлением касательной и направлением хорды. Здесь мы как бы сравниваем малую дугу кривой с отрезком прямой. Вместо этого будем её сравнивать с дугой окружности, проходящей через P. Окружности можно брать разных радиусов (не исключая и «окружностей бесконечного радиуса», под каковыми понимаются попросту прямые) и с разными центрами; оказывается, среди них имеется одна окружность, малая дуга которой в некотором смысле всего ближе к содержащей P малой дуге кривой (наглядно это довольно ясно, но при аккуратном определении надо, конечно, уточнить, в каком смысле понимается эта «близость»). Говорят, что эта окружность является соприкасающейся окружностью данной кривой в точке P (не путать с касанием двух кривых, означающим только совпадение их касательных; при соприкосновении близость двух дуг, так сказать, более тесная), а радиус этой окружности называют радиусом кривизны R рассматриваемой кривой в точке P. Оказывается[5], $R = 1/k$.

[5]То, что Ньютон обращался к кривизне в тех случаях, когда мы предпочли бы непосредственно пользоваться второй производной, могло быть связано с его тенденцией скрывать применение дифференциального исчисления. Но могла быть ещё одна причина. Когда мы пользуемся формулой

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2, \tag{1}$$

то мы как бы заменяем маленькую дугу L кривой $y = f(x)$ возле точки $x = a$ некоторой дугой $L_{\text{пар}}$ параболы (параболическая интерполяция). А можно с тем же успехом заменить L и некоторой дугой $L_{\text{окр}}$ окружности (круговая интерполяция). И $L_{\text{пар}}$, и $L_{\text{окр}}$ имеют в точке $x = a$ ту же касательную и ту же кривизну, что и L. Но если, не пользуясь формулой (1), говорить на геометрическом языке, то оказывается, С другой стороны, некоторые люди, которые как раз очень серьёзно вникали в наследие Ньютона, считали, что он мог получить свои результаты без сколько-либо существенного использования дифференциального и интегрального исчисления. А тогда изложение в «Началах» может соответствовать первоначальному ходу его рассуждений. Такие высказывания единичные, но они очень весомы.

Д. Д. Мордухай-Болтовский (1876—1952) в примечаниях к русскому переводу математических работ Ньютона [48] писал (примечание 124 к «Методу флюксий»): «Ум Ньютона по преимуществу геометрический и обладает могучей пространственной интуицией. Мне кажется, что синтетический характер его доказательств вызывается не только слабым развитием анализа, но и склонностями Ньютона.

Обращаю внимание читателя на особое искусство Ньютона оперировать с бесконечно малыми треугольниками и четырёхугольниками и советую ему обречь ньютоновские доказательства в современную форму, мысля на месте равенства — эквивалентность и обнаруживая последнюю путём определения порядка малости элементов. Ньютон является если и не творцом, то тем человеком, которому мы больше всего обязаны синтетическими методами, которым и теперь следуют многие авторы, спасая себя от выкладок, нередко связанных с аналитическими методами».

Другое высказывание в этом духе принадлежит Лапласу, см. у Крылова [37] место, относящееся к XI разделу первой книги «Начал», где речь идёт о движении Луны. В течение небольшого времени оно хорошо представляется как движение по Кеплеру в поле тяготения Земли, но при этом параметры лунной орбиты со временем изменяются из-за притяжения Солнца и других факторов. Эти изменения называются «неравенствами». Крылов пересказывает Лапласа своими словами: «Лаплас в своей теории Луны говорит, что теория Ньютона представляет как бы чудо математического искусства Ньютона, выведшего все эти неравенства геометрическими рассуждениями» (примечание ^{123} в [47])[6]. Здесь, правда, можно сомневаться, имел ли Лаплас в виду тот путь, которым

имеется ровно одна окружность с последним свойством, а дуг параболы много (ведь не все параболы описываются уравнением

$$y = \text{квадратный трёхчлен.})$$

Эта неединственность могла не нравиться Ньютону независимо от его тенденции к геометрической маскировке аналитических соображений.

[6] Мне известны подлинные слова Лапласа, звучащие чуть иначе: «Метод, которому здесь следовал Ньютон, представляет собой одно из самых замечательных мест во всём содержании „Начал“». Может быть, в другом месте Лаплас говорил и о «чуде»; во всяком случае, смысл тот же самый.

шёл Ньютон, или тот способ, которым он изложил свои результаты. Но похоже, что он имел в виду путь.

В наши дни у В. И. Арнольда сложилось впечатление, что «все открытия, содержащиеся в Principia, Ньютон сделал, не пользуясь анализом, хотя им к тому времени владел. Всё, что требовалось, он доказывал при помощи более или менее эквивалентных анализу геометрических элементарных рассуждений (а не переводя аналитические выкладки на геометрический язык) — ему это было легче».

Наконец, надо упомянуть о математике-прикладнике С. Чандрасекаре (1910—1995), получившем в 1983 г. Нобелевскую премию за свои работы по астрофизике. В своей последней книге [57], о которой см. ниже, он так выразился по поводу общепринятого представления, будто у Ньютона сперва был анализ, оставшийся скрытым, а затем было найдено словесно-геометрическое изложение: «I do not believe in this legend».

Мне кажется, было бы странно, если бы Ньютон, создав математический анализ, совсем бы им не пользовался, но несомненно и то, что Ньютон достиг удивительного искусства в рассуждениях синтетического характера, в которых привлекаются и бесконечно малые, но не систематическое исчисление таковых. Скорее всего, в своём творчестве он действовал то в одном, то в другом духе. В какой именно пропорции эти два «духа» смешивались при его первоначальном исследовании того или иного конкретного вопроса, мы никогда не узнаем, поскольку черновиков не сохранилось.

Что же касается до избранного им способа изложения, то помимо тех соображений, о которых говорит Вавилов, по-видимому были ещё два. Ньютон не мог не сознавать, что его труд является эпохальным, и он позаботился о достойном, по его мнению, оформлении этого труда. Имея перед глазами классические образцы Евклида, Архимеда и Аполлония, он решил писать в том же духе, хотя не мог не знать, что в ряде случаев громоздкие геометрические формулировки античных классиков могут быть короче выражены алгебраически, но что в древности не было алгебры; таким образом, способ изложения у древних авторов был в значительной степени вынужденным. Игнорируя это обстоятельство, Ньютон даже использование алгебры свёл до минимума, хотя в его время алгебра была хорошо известна, и если бы он ею пользовался, это нимало не препятствовало бы пониманию его книги. Помимо великих примеров, на него могло влиять, говоря словами Крылова (примечание [76] в [47]), «общее состояние науки и приёмы преподавания того времени». «Геометрия, включавшая учение о конических сечениях и доведённая до высокой степени совершенства ещё древними, составляла главнейший и, можно сказать, почти единственный предмет математического образования». По сравнению с ней алгебра представлялась Ньютону малосодержательной[7]. В одном месте у Ньютона имеется своего рода «полемика делом» с Декартом без упоминания его имени. Одну геометрическую задачу Декарт решил аналитически и приводил это решение как образец преимуществ нового метода. Ньютон решает ту же задачу синтетическим методом и пишет: «такое решение, как приведённое выше, т. е. исполняемое геометрическими сопоставлениями, а не аналитическим расчётом, и изыскивалось древними».

Пренебрежение к алгебре дошло у Ньютона до такой степени, что у него даже «пропорции пишутся словами так:

$$A \text{ est ad } B \text{ ut } C \text{ est ad } D,$$

что равносильно нашему

$$A : B = C : D,$$

или

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}\text{»}$$

— см. примечание [28] в [47]. И, как видно из примечания [37] Крылова, об умножении и делении Ньютон говорит на таком же иносказательном геометрическом языке, который упоминался в § 3, когда речь шла об Аполлонии. В русском переводе Крылов всё-таки отошёл в этом отношении от оригинала — заменил слова знаками и использовал привычные нам названия, не забыв предупредить об этом читателя.

Увы, чрезмерная забота о бессмертии своего труда сыграла с Ньютоном дурную шутку. Всего через несколько десятилетий появились подробные изложения механики и специально небесной механики, написанные в другом, намного более привлекательном для читателя, стиле (не говоря уже о том, что привлечение аналитических методов дало возможность решать новые задачи), и «Начала» читать перестали[8].

[7]Однако утверждение Крылова, что в тогдашней алгебре «ещё не утратились громоздкие обозначения словами вместо знаков», т. е. не было удовлетворительной символики, не кажется мне верным. Крылов продолжает: «особенно для показателей», а на самом деле словесные обозначения употреблялись исключительно или почти исключительно для показателей, так что только в этом отношении тогдашняя алгебраическая символика была недостаточной. Кроме того, знак деления писался только в виде двоеточия, а не черты, из-за чего формулы писались в виде строк, зачастую весьма длинных; это уже не принципиально, хотя и неудобно.

[8]Пришло так скоро время пересчёта,
И так нагляден нынешний урок:
Чрезмерная о вечности забота —
Она, по справедливости, не впрок.

А. Т. Твардовский сказал это по совсем другому поводу, но сказанное им имеет

По-видимому, окончательно это произошло в начале XIX века, с появлением «Небесной механики» Лапласа, пять томов которой вышли в 1798—1825 гг. Что же касается механики, то роль «Начал» снизилась уже после появления в 1735 г. «Механики, аналитически изложенной Леонардом Эйлером» (изданной, кстати, Санкт-Петербургской академией наук, где Эйлер проработал бóльшую часть своей творческой жизни), а затем — «Трактата по динамике» Даламбера (1743). Нет сомнений, что корифеи небесной механики — Эйлер, Клеро, Даламбер, Лагранж, Лаплас — внимательно читали Ньютона[9], но после Лапласа к нему обращались только те, кто особо интересовался историей, да и то, вероятно, те, кто интересовался каким-нибудь отдельным вопросом, в основном читали только относящиеся к нему места. Всё же время от времени кто-нибудь изучал «Начала» от корки до корки. В литературе указывается, что и живший позднее У. Гамильтон внимательно изучил «Начала».

Вероятно, одним из последних, кто прочитал все «Начала», был Крылов. После него заведомо был ещё один внимательный читатель — уже упоминавшийся С. Чандрасекар, автор [57]. По его словам, он изучал «Начала» следующим образом: читал формулировки утверждений Ньютона и доказывал их сам, конечно, ничуть не ограничивая себя в используемых средствах, а затем знакомился с рассуждениями самого Ньютона. Книга [57] отражает этот подход — в ней часто сперва приводится доказательство в современном стиле с использованием алгебры (в том числе векторной) и анализа, а затем воспроизводится (порой дословно) изложение того же вопроса в «Началах». Поскольку при этом сохраняются основные этапы рассуждений (оформленные в виде отдельных утверждений Ньютона), общий ход мыслей остаётся таким же, как у него. Однако порой Чандрасекар указывает, что возможны принципиально иные доказательства. (Так, указываются три других трактовки задачи Кеплера: с помощью вектора Рунге—Ленца (см. приложение VIII, часть 2), уравнения Клеро—Бине (см. приложение VIII, часть 3) и «комплексного» метода Гурса—Леви-Чивита—Болина (см. [7]).) Он также приводит комментарии позднейших учёных, равно как и свои собственные.

общий характер и не обязательно подразумевает, что забота должна быть связана с кровавыми репрессиями.

[9]Это видно, в частности, из того, что они отметили некоторые ошибки у Ньютона. Из более чем 20 соответствующих замечаний, сделанных Крыловым при переводе «Начал», три касаются гидродинамики и одно — численной ошибки; все остальные воспроизводят замечания, сделанные этими классиками. Добавлю, что Клеро редактировал французский перевод «Начал».

«Начала» начинаются с двух небольших разделов — «Определения» и «Аксиомы или законы движения». В первом вводятся основные исходные понятия динамики (тогда как основные исходные понятия статики Ньютон мог считать известными, и по большей части так же обстояло дело с кинематикой, тем более что Ньютон, как говорилось, избегал явного использования ускорений). Во втором сформулированы три знаменитых закона механики Ньютона и отмечены некоторые их следствия, а также экспериментальные подтверждения.

I. *Всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние.*

II. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

III. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.*

В связи с «пропорционально» в II надо отметить, что Ньютон вообще часто говорит о пропорциональности там, где мы говорим просто о равенстве. Как я понимаю, это связано с тем, что мы пользуемся подходящей системой единиц (СГС или СИ), которых во времена Ньютона не было.

I и II законы фактически указывают, что состояние материальной точки характеризуется её положением и скоростью, — мысль, восходящая к Галилею применительно к прямолинейному движению и вызревавшая в течение XVII столетия. Кеплер и Декарт ещё этого не знали, не говоря уже о древних авторах. Насколько взгляды последних поддаются чёткому изложению, они сводили состояние к одному только положению, хотя ещё в древности это порождало трудности в понимании процесса движения (см. приложение III). Состояние более сложной системы определяется положениями и скоростями составляющих её материальных точек. Если система изолированная, то её «эволюция», т. е. изменение её состояния со временем, однозначно определяется её начальным состоянием, — мысль, которая в таком общем виде явно стала высказываться сравнительно поздно (быть может, только во второй половине XIX века в связи с появлением в теории дифференциальных уравнений общей теоремы о существовании и единственности решения системы с заданным начальным условием), но которая воспринималась Ньютоном и теми из его современников и последователей, которые занимались механикой, как нечто само собою разумеющееся. Это можно понимать как некий первичный физический принцип, но если мы знаем, что эволюция системы описывается соответствующими дифференциальными уравнениями (я не уточняю, что значит здесь «соответствующими»; для задачи Кеплера эти уравнения читателю известны), то это же можно понимать как некое утверждение из теории дифференциальных уравнений. Тот факт, что в данном случае физический принцип становится математической теоремой, показывает, что в этом отношении математический аппарат в данном случае правильно соответствует физике. Это, конечно, не гарантирует заранее его соответствия физике в других отношениях, — скажем, существование и единственность решения имели бы место и в том случае, если бы мы приняли другой закон тяготения; эволюция физической системы тогда тоже однозначно предсказывалась бы математической теорией; вот только это предсказание было бы неверным. И потом, если физическая задача требует другого математического аппарата (а так бывает), то наш физический принцип уже не следует из упомянутой выше теоремы (но может оказаться следствием другой теоремы, относящейся к соответствующим математическим объектам).

Основная часть «Начал» разделена на три «книги», первые две из которых имеют одинаковое название «О движении тел», а третья — «О системе мира».

Для нас представляет особый интерес первая книга, где и говорится о связи законов механики и закона всемирного тяготения с законами Кеплера. При этом Ньютон, готовя материал для астрономических приложений, обсуждает ряд вопросов, связанных с определением орбиты по тем или иным данным. Сверх того, рассматриваются некоторые другие вопросы, например: редукция задачи двух тел к задаче Кеплера; поле тяготения шара, состоящего из однородных концентрических слоёв; движение в поле, в котором действующая на P сила направлена по прямой SP и зависит только от расстояния до S, но не обязательно обратно пропорциональна квадрату расстояния; движение планеты или её спутника, происходящее в основном под действием притяжения к Солнцу или к планете, но возмущаемое (сравнительно слабо) притяжением ещё одного небесного тела. По поводу последнего вопроса в русском издании Крылов добавил разъяснения, частично цитирующие вышедший в 1889—1896 гг. «Трактат по небесной механике» Ф. Тиссерана (1845—1896) и частично принадлежащие самому Крылову (который предложил более простое изложение, к тому же более близкое к Ньютону, хотя Крылов, конечно, свободно пользуется алгеброй и анализом).

Во второй книге Ньютон рассматривает движение в сопротивляющейся среде, а также некоторые вопросы гидростатики и гидродинамики. Полученные результаты он использовал для критики весьма популярной тогда теории вихрей Декарта, якобы увлекающих за собой планеты и тем приводящих к их движению вокруг Солнца. Но тогда ещё не пришло время для создания гидродинамики, и гидродинамические разделы второй книги содержат ошибки или базируются на таких предположениях (среда без взаимодействия образующих её частиц), которые могут выполняться в очень высоких слоях атмосферы, но не там, где мы живём, летаем на самолётах и плаваем на кораблях. Последнее относится к попыткам Ньютона оценить давление потока жидкости или газа на тело, находящееся в этом потоке. Неточными были также представления Ньютона о звуковых волнах и приливах. Однако Лаплас, который построил правильную теорию звуковых волн и приливов и потому более чем кто бы то ни было имел бы право критиковать соответствующие разделы «Начал», оценивал их как большой шаг вперёд, хотя и не вполне удавшийся.

Третья книга содержит астрономические приложения. Между прочим, Ньютон впервые стал определять орбиты не только планет, но и комет. Оказалось, что и движение комет подчиняется закону всемирного тяготения (вместе с законами механики). Он предложил довольно удобный способ определения орбиты кометы по наблюдениям. (В отличие от планет, которые наблюдались тысячелетиями, для кометы всегда имелось немного наблюдений и они относились к небольшому промежутку времени, поэтому методы, «работавшие» для планет, тут не годились.) Только в XIX в. были разработаны лучшие способы. В этой же книге имеются разделы, посвящённые приливам, форме Земли, прецессии её оси и движению Луны.

Континентальные математики школы Лейбница вначале не знали, что форма изложения в «Началах» нередко отличается от первоначального хода мысли Ньютона. В течение ряда лет они занимались более аналитической трактовкой тех же вопросов, наивно думая, что открывают нечто новое, но справедливо считая, что явное привлечение аналитических соображений необходимо для прогресса науки. Здесь, прежде всего, надо упомянуть о путаной работе самого Лейбница, которая появилась в 1689 г., т. е. после выхода в свет «Начал», с которыми Лейбниц, по его словам, тогда ещё не успел познакомиться. Она долго считалась ошибочной, но почти 300 лет спустя Айтону удалось-таки придумать последовательную интерпретацию этой работы, при которой она оказывается правильной [3][10]. Далее свои силы в этом направлении

[10]Отмечая этот успех недавно скончавшегося автора, нельзя не заметить, что почему-то даже европейские математики — последователи Лейбница — оказались не в состоянии или не пожелали сделать то же самое.

пробовал П. Вариньон (1654—1722). Судя по сказанному в [2], [3], работы Лейбница и Вариньона могли оказать влияние преимущественно в том отношении, что привлекали интерес к данной задаче, хотя у них можно найти и зародыши приёмов, получивших распространение в более позднюю эпоху. В части 2 приложения VIII я скажу о чуть более позд-

---

Лейбниц утверждал, что он не то вообще не знал о «Началах», не то знал, но не читал их. Однако недавно был изучен имевшийся у него экземпляр «Начал». На полях последнего были обнаружены многочисленные пометки, свидетельствующие о том, что Лейбниц по крайней мере пытался читать «Начала». Насколько он их понял — другой вопрос. Возможно, что он пытался понять их как-то по-своему.

Данное замечание является критическим в отношении Лейбница, поэтому ради полноты картины надо добавить, что он имеет и немалую заслугу перед механикой — он (вслед за Гюйгенсом) подчёркивал значение (как мы теперь говорим) кинетической энергии и обратил особое внимание на сохранение механической энергии, хотя эту общую идею он смог только проиллюстрировать на примерах качаний маятника и упругого столкновения шаров. В основном эти примеры были разобраны до него, но то значение, которое он придавал энергии, стимулировало позднейшие работы И. Бернулли и Л. Эйлера, где вопрос был изучен в бо́льшей общности, а эти работы стимулировали работу Д. Бернулли, справившегося с практически важнейшим случаем системы попарно взаимодействующих материальных точек с центральными силами. (Ньютон же, по-видимому, считал, что для механики достаточно понятий скорости, ускорения и силы, поэтому он не придал значения сохранению энергии, которое он задолго до простых лейбницевских примеров обнаружил в более сложной задаче о движении в центральном поле, — для него это было просто некое математическое соотношение, которое является (используя опять-таки более новую терминологию) следствием уравнений движения. Будучи таковым, оно (как полагал Ньютон) не может содержать ничего принципиально нового по сравнению с этими уравнениями, хотя иногда и может помочь исследовать свойства движения.) Надо сказать, что Лейбниц ввёл особое название для кинетической энергии (правда, у него самого она была удвоенной) — «живая сила». Слово «сила» тогда (и много позднее) понималось не только в том смысле, как это было у Ньютона («сила вызывает ускорение») и как это понимается теперь, но и в довольно неопределённом смысле некоего движущего начала, способности к совершению работы и т. п. (в разговорном языке это слово употребляется ещё шире — «силы природы, обстоятельств, чувств»). Чётко отделив «живую силу» от прочих «сил», Лейбниц, несомненно, способствовал уточнению не только терминологии, но и отражаемых ею понятий, хотя само по себе данное название не кажется (по крайней мере, на наш слух) особенно удачным. (Название «энергия» появилось позднее — только в 1807 г. Т. Юнг (1773—1829) предложил заменить им «живую силу», а употреблять этот термин в общем смысле предложил У. Ренкин (1820—72) в 1853 г. К тому времени выяснилось, что соответствующее общее понятие имеет значение для всей физики, и был установлен общефизический закон сохранения энергии, но до появления термина «энергия» по старинке приходилось говорить о «сохранении силы».)

Лейбниц также задумывался над так называемыми «вариационными принципами механики», но об этом узнали только тогда, когда в середине XVIII в. эти принципы стали предметом обсуждения по инициативе других лиц, прежде всего, П.-Л. Мопертюи (1698—1757). По-видимому, неопубликованные размышления Лейбница на эту тему (в отличие от указания на сохранение энергии) никакого влияния на развитие механики не оказали.

них работах И. Бернулли (1667—1748) и Я. Германа[11], которые были представлены в Парижскую академию наук в 1710 г. и в которых уже определённо было достигнуто несомненное продвижение.

Особо надо сказать о теории движения Луны у Ньютона и учёных XVIII в. Ньютон продолжал заниматься ею до последних лет жизни. Из различных факторов, «возмущающих» движение Луны в земном поле тяготения, «упрощённом» путём сосредоточения массы Земли в её центре, главным является притяжение Солнца, и только его Ньютон и стремился учесть. В «Началах» изложен (в геометрической форме) вывод части полученных им к тому времени результатов; другие результаты указаны без разъяснений. В 1711 г. Ньютон написал сочинение «Теория Луны», содержащее более полное изложение этих вопросов вместе с некоторыми добавлениями. Но оно было опубликовано только в 1772 г. К этому времени трудами других учёных — прежде всего, Клеро, Даламбера и Эйлера — движение Луны было исследовано заново. Оценивая достижения Ньютона с завоёванных наукой новых позиций, Лаплас пришёл к выводу, что Ньютон опередил своё время лет на 50 или более того и что он располагал значительной частью построенной позднее теории. Но у теории Ньютона, как её знал Лаплас, был один существенный недостаток: она давала неправильное значение для перемещения с течением времени перигея (ближайшей к Земле точки) лунной орбиты. (Скорость её смещения получалась вдвое меньше действительной.) Математики XVIII в. столкнулись вначале с той же трудностью, но затем Клеро и Даламбер справились с нею. Оказывается, Ньютон тоже смог это сделать! Спустя 150 лет после его смерти лорд Портсмутский подарил Кембриджскому университету часть оставшихся от Ньютона бумаг. Их изучил Дж. Адамс (1819—1892) (тот самый, который одновременно с У. Леверье (1811—77) указал координаты ещё не открытого Нептуна; математикам Адамс памятен также как автор одного из способов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений). Адамс обнаружил, что в конце концов Ньютон пришёл к достаточно точному выражению для движения перигея орбиты Луны. (Однако мнение Чандрасекара по данному вопросу [57] не столь благоприятно для Ньютона. Я этим не занимался и потому своего мнения не имею.)

Ньютоновской теории движения Луны в сопоставлении с достижениями его предшественников и последователей посвящена статья

[11] Я. Герман (1678—1733) — ученик Я. Бернулли (1654—1704), старшего брата И. Бернулли. (Между прочим, позднее Герман в течение нескольких лет работал в Петербургской академии наук, которую, как и несколько других учёных, покинул, будучи недоволен правлением печально известного И. Д. Шумахера, с которым впоследствии постоянно конфликтовал М. В. Ломоносов.)

«Закон всемирного тяготения и теория движения Луны» видного астронома Н. И. Идельсона (1885—1951), в течение ряда лет руководившего астрономическими вычислениями в Ленинграде. Статья опубликована в сборнике [31] и воспроизведена в книге [30].

По мнению самого Ньютона и математиков XVIII в., значение исследований движения Луны прежде всего состояло в том, что решался вопрос, определяется ли движение Луны законом всемирного тяготения или нет[12]. Но с нашей точки зрения оно этим далеко не исчерпывается. Фактически в этих работах начала разрабатываться теория возмущений — комплекс методов, призванных определить изменения в движениях сравнительно простых физических систем (вроде системы двух точечных масс) при относительно небольших возмущениях, результат воздействия которых уже нельзя выразить несколькими точными формулами, но малость которых всё же позволяет получить хорошие приближённые выражения для этого результата. Область применений теории возмущений огромна (и не исчерпывается одной только небесной механикой).

Конечно, у Ньютона теория возмущений не могла иметь того систематического характера, какой с самого начала проступал в работах корифеев небесной механики середины XVIII в., даже когда они, как и Ньютон, занимались только движением Луны. Для такой система-

[12] Одно время из-за движения перигея лунной орбиты им казалось, что нет. Затем с этим справились, но всплыла новая проблема — так называемое вековое ускорение Луны, обнаруженное Галлеем в 1693 г. на основании анализа сведений о солнечных затмениях начиная с античных времён. Галлей пришёл к выводу, что период обращения Луны вокруг Земли со временем уменьшается. В 1787 г. Лаплас предложил объяснение этого явления на основании одних сил тяготения. Он показал, что Луна таким своеобразным образом реагирует на медленное изменение эксцентриситета орбиты Земли, вызванное возмущающим влиянием притяжения других планет на движение Земли. (Этот эффект на самом деле является периодическим, но с очень большим периодом — десятки тысяч лет. Сейчас период обращения Луны уменьшается, а в далёком будущем будет увеличиваться.) Лаплас считал, что после этого не осталось таких особенностей в движении Луны, которые не объяснялись бы на основании закона всемирного тяготения. Но в XIX в. выяснилось, что указанный Лапласом эффект вдвое меньше реально наблюдаемого. Другая же половина наблюдаемого векового ускорения Луны имеет совершенно иную причину — геофизическую. Эта причина состоит в приливном трении (поглощении энергии приливных волн в морях). Едва ли надо объяснять, что под его влиянием вращение Земли замедляется (между прочим, качественно это было предсказано И. Кантом (1724—1804)); отнюдь не столь очевидно, что при этом Луна удаляется от Земли (объяснять этого я не буду, прошу поверить на слово). При удалении Луны от Земли скорость её движения по орбите должна уменьшаться, а длина орбиты увеличиваться, что удлиняет период обращения Луны, но замедление вращения Земли «перевешивает», и это приводит к кажущемуся уменьшению периода обращения Луны (измеряемому по земным суткам).

тичности вся теория начиная с предшествующих глав механики должна была бы более последовательно развиваться преимущественно в аналитическом стиле, а у Ньютона это всё-таки было ещё не совсем так (даже, насколько можно судить, в неопубликованных первоначальных исследованиях, которые он потом переделывал для публикации, «зашифровывая» их содержание в синтетическом стиле)[13]. Я не говорю уже о почти неизбежной неполноте работ первопроходца. Но всё или почти всё это можно сказать и по поводу прочего материала, включённого в «Начала», и тем не менее в истории точных наук немного найдётся сочинений сравнимого значения. Увы, у работ Ньютона по теории движения Луны (и тем самым по теории возмущений), которые не уступают по уровню его другим достижениям, судьба оказалась иной. Его математические рукописи задолго до своей запоздалой публикации получили некоторую известность среди английских математиков и тем самым всё-таки принесли некоторую пользу, не говоря уже о стимулирующем воздействии известий о некоторых его результатах. «Начала» хоть и с трудом, но всё-таки читались (и перекладывались на более понятный аналитический язык, что порой было «расшифровкой» первоначальных рассуждений Ньютона, а порой и нет). Но «лунная» рукопись 1711 г., видимо, до своего опубликования в 1772 г. оставалась совершенно неизвестной (возможно, потому, что предмет поначалу кажется специальным и способен заинтересовать немногих); тем более не были известны материалы, попавшие в руки Адамса в 70-х гг. XIX в. Было известно только то, что содержалось в «Началах». Лаплас мог понять данную там сводку, сопоставляя её с тем, что знал. Клеро же, который вначале не мог иметь таких знаний, писал: «После долгих размышлений над теорией Ньютона и не достигнув той степени убеждённости, которой я ожидал, я решил больше ничего у него не заимствовать и самостоятельно искать определения движения небесных тел, при единственном допущении об их взаимном притяжении». (Цитировано по упомянутой выше статье Идельсона, который добавляет, что «после исследования этой проблемы новыми методами..., Клеро к величайшему своему удивлению пришёл к тем же самым результатам, о которых Ньютон сообщает на страницах „Начал“». Это относится к первым успехам Клеро; повторяю, что позднее он, как и его соперники, продвинулся дальше.)

[13]Если учесть успех Ньютона с перигеем лунной орбиты (ставший известным позднее), то создаётся впечатление, что математики середины XVIII в. превзошли Ньютона главным образом в том именно отношении, что их методы были более систематическими и открытыми для дальнейшего развития, тогда как в отношении их окончательных (на тот момент) выводов о движении Луны их преимущество было не так уж велико.

«Начала» заканчиваются разделом «Общее поучение». Сперва в нём резюмируются возражения против Декартовой теории вихрей. Затем отмечаются особенности в строении Солнечной системы: орбиты планет имеют малые эксцентриситеты (что не может иметь чисто механического объяснения, ибо оно относилось бы и к кометам, а их орбиты весьма эксцентричны) и находятся примерно в одной плоскости, причём движения происходят в одном направлении; то же справедливо для известных тогда спутников планет. «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественнейшего и премудрого существа». (Теперь мы склонны заменить «существо» протопланетным диском, но детали не ясны.) Далее Ньютон поясняет своё понимание этого «существа», т. е. Бога. Впрочем, сотворив мир, Бог предоставил дальнейшее действию им же созданных естественных законов[14]. Один из них — это закон всемирного тяготения, который Ньютон принимает как экспериментальный факт. «Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю»[15]. Последний абзац начинается словами: «Теперь следовало бы кое-что добавить о некоем тончайшем эфире...», с которым предположительно связан ряд физических и биологических

[14]Бог Ньютона не может вечно почивать на лаврах: подобно часовых дел мастеру, он должен время от времени заново приводить в порядок созданный им механизм — так сказать, чистить, смазывать, регулировать и ремонтировать, — иначе всё расстроится. Причина состоит в возмущениях в движениях планет из-за их взаимного притяжения. Ньютон мог довольно точно вычислять эти возмущения для не очень больших промежутков времени; по его методам получается, что некоторые возмущения могут всё это время нарастать. Тогда кажется, что они будут возрастать и дальше, а это со временем нарушит гармонию планетных движений (заметно изменятся размеры и формы орбит, их расположение в пространстве). Тут Бог вмешивается и восстанавливает порядок.

В «Началах», насколько я знаю, таких высказываний нет (подозреваю, что вопрос об устойчивости Солнечной системы тогда ещё не был осмыслен). Но в более поздней «Оптике» ясно сказано, что неправильности в Солнечной системе, происходящие от взаимного притяжения планет, способны «нарастать до тех пор, пока эта система не потребует полного преобразования».

Более точные методы, развитые позднее, показали, что на значительно бо́льших промежутках времени существенные изменения орбит имеют колебательный характер, оставаясь небольшими. Так ли это на бесконечном «промежутке» времени — неясно, но известно, что в некоторых упрощённых задачах так действительно будет вечно. По-видимому, если в Солнечной системе и возможны заметные изменения орбит планет, то только за время, сравнимое с продолжительностью её существования. Так что Богу пока вмешиваться незачем. (С кометами дело обстоит иначе; о них он, видимо, не заботится.)

[15]По каковой причине он и был обозван Энгельсом «индуктивным ослом». Спасибо корифею всех наук: если Ньютон — осёл, то всем нам и подавно нечего переживать по поводу ограниченности своих способностей.

явлений. Последняя фраза: «Но это не может быть изъяснено вкратце, к тому же нет и достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы определены и показаны»[16]. Фактически последний абзац — это завещание следующим столетиям (которые разобрались-таки в указанных Ньютоном явлениях, но в конце концов обошлись без эфира).

[16]См. предыдущее подстрочное примечание.

Приложение VII. Притяжение шара

Притяжение однородного шара (или шара, состоящего из однородных концентрических слоёв) можно определить либо с помощью вычислений (так, в частности, было у Ньютона, облачившего свои вычисления в геометрическую форму; гипотетическая реконструкция его хода мыслей сжато изложена в [40][1], либо с помощью некоторых рассуждений, при которых вычислений почти не требуется, но используются идеи, появившиеся спустя век после Ньютона. Здесь будет описан второй путь[2].

Общая идея, которая возникла позднее это идея поля. Сперва (в трудах Лапласа и его современников) это была чисто математическая идея, но со времён М. Фарадея (1791—1867) и Дж. К. Максвелла (1831—1879) возникло и укоренилось также и физическое понятие поля.

Нам нужна только математическая идея, но я скажу и о физике. Из повседневной жизни нам хорошо известно, что такое вещество. Физика XVIII в. уточнила различные свойства вещества, а потом (окончательно уже в XX в.) было доказано, что привычное нам «сплошное» вещество состоит из атомов, которые объединяются в молекулы. Но оказывается, имеются не менее реальные физические объекты — поля, основными примерами которых являются поле тяготения и электромагнитное поле. (В микромире имеются и другие поля, но от нашей повседневной жизни это далеко.) Привычное проявление поля состоит в том, что возле неко-

---

[1] Впрочем, Чандрасекар [57] сомневается в достоверности этой реконструкции.

[2] Литтлвуд придумал, как изложить рассуждения, соответствующие второму пути, не привлекая явно понятий XIX в. Он допускает даже, что Ньютон мог бы прийти к таким рассуждениям, если бы раньше не нашёл вычислительного решения задачи, и объясняет, как это могло бы произойти. Я не стал следовать варианту Литтлвуда, потому что те понятия, без которых он ухитрился обойтись, всё равно важны.

При вычислительном подходе непосредственно рассматривают притяжение сферической оболочки, по которой равномерно распределена некоторая масса, и доказывают, что вне оболочки её притяжение точно такое же, какое получится, если всю массу оболочки сосредоточить в её центре. Чтобы сделать отсюда вывод о притяжении шара, разбивают его на концентрические слои и заменяют притяжение каждого слоя притяжением сферической оболочки той же массы. Заранее не исключено, что ответ при такой замене будет только приближённым. Но чем тоньше будут концентрические слои, на которые мы разбиваем шар, тем меньше будет ошибка. А между тем ответ всё время получается один и тот же (вне шара притяжение такое же, как если бы вся его масса — сумма масс соответствующих оболочек, т. е. слоёв, — была сосредоточена в его центре). Значит, ошибка этого ответа меньше, чем любое положительное число, а это означает, что ответ на самом деле точный.

Ньютон работал именно с оболочкой.

Замечу, что при вычислительном подходе тоже можно внести некоторые упрощения, используя кое-что из более поздних идей: надо вычислять не напряжённость поля, а его потенциал. Я не буду на этом останавливаться. Более подготовленные читатели могли узнать об этом, знакомясь с электростатикой.

его вещественного объекта («источника поля») на другие кусочки вещества действуют некоторые силы. (В случае электромагнитного поля вещество, о котором идёт речь, должно нести электрические заряды. Иногда они взаимно компенсируются, но при попадании в электромагнитное поле всё-таки проявляются.) Сперва это пытались описывать как прямое действие одних объектов на другие. Такое описание для сил гравитации даётся законом Ньютона. Для электрического поля имеется аналогичный закон Кулона, но этим дело не кончается: на движущиеся заряды действуют ещё магнитные силы. Попытки выразить закон их действия в каком-то аналогичном виде не увенчались успехом. Зато увенчалась полным успехом идея, что в пространстве, окружающем источник поля, происходят какие-то изменения, там имеется нечто воздействующее на помещённые в эту область кусочки вещества. Мы воспринимаем это воздействие как действие источника поля на эти кусочки, а на самом деле непосредственно на них действует созданное этим источником поле. Поле имеется и там, где никаких кусочков вещества нет, хотя мы этого не замечаем. Законы, описывающие поле, носят совсем иной характер, чем законы типа ньютоновского закона всемирного тяготения или закон Кулона, — ведь поле рассредоточено в пространстве, несколькими материальными точками тут не обойтись. Соответствующий математический аппарат — это дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие поведение в пространстве и времени тех величин, которые характеризуют поле.

Это отчасти напоминает вещественную сплошную среду, и поэтому долгое время пытались объяснить поле[3] как проявление процессов, происходящих в некоей особой всепроникающей среде, «эфире». Но оказалось, что этому эфиру приходится приписывать свойства, качественно отличные от свойств всех веществ, и его никак нельзя обнаружить. А тогда не следует ли признать поле «первичной реальностью»[4] на-

[3]Главным образом, электромагнитное; для всемирного тяготения долго хватало ньютоновского закона, так что обращаться к физическому пониманию поля было не обязательно, хотя математическая трактовка этого поля систематически использовалась. «Физическое» понимание гравитационного поля (оказавшееся тесно связанным с неевклидовой геометрией) было достигнуто только А. Эйнштейном (1879—1955).

[4]В обязательной для советской интеллигенции единственно верной (по определению) и всесильной (в чём легко было убедиться на собственном опыте) философии диалектического материализма имелся термин «материя». Ранее он был синонимом «вещества», но в диамате приобрёл более широкий смысл как «объективной реальности». Такое употребление слова «материя» согласуется с изречениями корифеев марксизма-ленинизма (о полях те не знали, но проявили известную философскую осторожность, воздержавшись от излишней конкретизации свойств «материи») и потому было использовано физиками вроде С. И. Вавилова или В. А. Фока, пытавшимися обеспечить свободу развития науки путём подходящей интерпретации

равне с веществом? Тем более, что многие привычные свойства вещества, оказывается, являются не какими-то «первичными» свойствами, а следствиями электромагнитного взаимодействия составляющих это вещество атомов (т. е. полевых процессов!) в сочетании с особенностями квантовой механики — механики микрообъектов.

В этой книжке нам нужно только математическое понятие поля, по существу гораздо более простое. Если каждой точке некоторой области (или даже всего пространства) сопоставлен некоторый вектор (который при этом обычно представляют себе как направленный отрезок с началом в этой точке), то говорят, что в этой области (или во всём пространстве) задано векторное поле, а если сопоставлено некоторое число, то говорят, что задано скалярное поле (когда векторы как бы противопоставляют числам, то последние называют скалярами). Как видно, понятие скалярного поля по существу совпадает с понятием функции, уточним: функции с числовыми значениями. А векторное поле — это по существу функция, только принимающая векторные значения. В обоих случаях подразумевается, что функция задана в некоторой области пространства или, на худой конец, в области на некоторой поверхности (например, плоскости); впрочем, ничто не мешает говорить и о векторном поле на некоторой линии (например, на прямой или её интервале) — иногда так тоже делают.

Если математическое понятие поля равносильно понятию функции, то зачем употребляют два названия для одного и того же объекта? Это делают в связи с тем, как данный объект возник и (или) что в связи с этим мы собираемся с ним делать, так что это вопрос не формального определения, а смыслового оттенка. В наши дни математические поля, как подсказывает название, часто возникают при изучении физических полей. Впрочем, наиболее наглядный пример векторного поля не совсем таков — он связан с веществом. Именно, если мы имеем дело с течением жидкости или газа в некоторой области, то каждой её точке соответствует вектор скорости той частицы жидкости, которая в данный момент времени находится в этой точке. Полученное векторное поле называется вектором скоростей (данного течения); оно может изменяться со временем. Читатель мог видеть фотографии течений, в которых некоторые частицы жидкости (газа) тем или иным способом (подкрашиванием, задымлением) сделаны видимыми. На фотографиях видны так

положений диамата. Поскольку обнаружилось, что помимо вещества имеется другая «объективная реальность», использование термина «материя» в более общем смысле (для обозначения всех «первичных реальностей» — сейчас это вещество и поле, а со временем, может быть, появится и ещё что-нибудь) представляется вполне целесообразным.

называемые линии тока; в точках такой линии векторы скорости течения касаются этой линии. Другой наглядный пример — силовые линии магнитного поля (это уже настоящее физическое поле). Касательные в точках этих линий направлены так же, как направлены действующие в этом поле силы. Читатель, вероятно, видел, что железные опилки в магнитном поле образуют «цепочки» или «полоски», вытянутые вдоль силовых линий. (Рис. 83.)

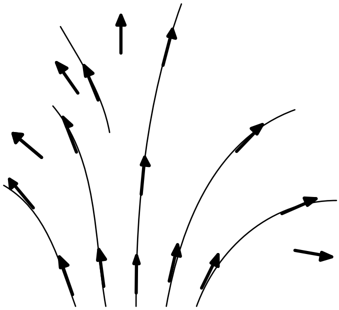


Рис. 83

Простой пример скалярного поля — это поле температур. Имеется некое нагретое тело; каждой его точке сопоставляется число — температура в этой точке; это и есть интересующее нас поле. В некоторых случаях изучение векторных полей сводится к изучению вспомогательных скалярных полей, уже не столь наглядных. Я не буду этого объяснять, но, если читатель достаточно знаком с электростатикой, он может подумать о поле потенциала. Совершенно аналогичным образом полю тяготения тоже сопоставляется скалярное поле соответствующего потенциала (исторически с тяготением это произошло даже раньше, чем с электричеством).

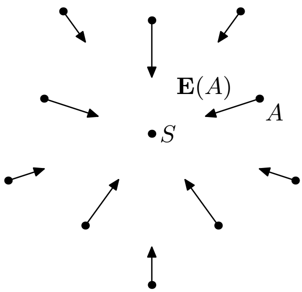


Рис. 84

Рассмотрим поле тяготения, создаваемое некоторым телом или некоторыми телами. Напряжённость $\mathbf{E} = \mathbf{E}(A)$ этого поля в точке A — это сила, с которой данное поле действует на помещённую в точку A «пробную» единичную массу. Таким образом, физическому объекту — полю тяготения — сопоставляется векторное поле напряжённости. Напряжённость поля тяготения, создаваемого точечной массой M, находящейся в точке S, есть

$$\mathbf{E}(A) = \frac{fM}{|AS|^2}\frac{\overrightarrow{AS}}{|AS|}.$$

Сила, действующая в этом поле на точечную массу m, находящуюся в точке A, равна, как мы знаем,

$$\frac{fMm}{|AS|^2}\frac{\overrightarrow{AS}}{|AS|} = m\mathbf{E}(A).$$

Значит, если имеется какое-то поле тяготения, создаваемое, вообще говоря, уже не одной материальной точкой, а некоторыми телами, и его напряжённость есть $\mathbf{E}$, то на точечную массу m, находящуюся в точке A, действует сила $m\mathbf{E}(A)$. Действительно, мы представляем себе наше поле как созданное некоторыми материальными точками S_i (Ньютон подразумевал бы, что последние суть «корпускулы» (атомы, молекулы), из которых состоят наши тела); сила, действующая на пробную единичную массу в точке A, является суммой сил, действующих на неё во всех этих полях, т. е. напряжённость нашего поля равна сумме напряжённостей полей с «источниками» S_i; с другой стороны, сила, действующая на массу m в точке A, равна сумме сил, действующих на неё во всех этих полях, а уж об этих силах мы знаем, что они равны произведению m на соответствующие напряжённости. Итак, зная напряжённость поля, мы можем сразу определить, какая сила действует на материальную точку массы m. Но при этом упрощается и определение силы, действующей на какое-нибудь тело T, не сводящееся к материальной точке. Мысленно разобьём T на столь малые части, размерами которых уже можно пренебречь, т. е. которые можно считать материальными точками; пусть они имеют массы m_1, m_2, ... и расположены в точках A_1, A_2, ... Тогда на i-ю материальную точку действует сила $m_i\mathbf{E}(A_i)$, а суммарная сила, действующая на T, равна $m_1\mathbf{E}(A_1) + m_2\mathbf{E}(A_2) + \ldots$[5] (Для сплошного тела задача сводится к вычислению некоторого интеграла.)

Итак, поле тяготения полностью характеризуется своей напряжённостью, так что его математическое описание действительно сводится к некоторому векторному полю. Мы хотим доказать, что напряжён-

[5]При этом в нашем поле тяготения части тела T могут как бы стремиться двигаться по-разному. С этим связано явление морских приливов и отливов (под действием притяжения Луны и Солнца океанская вода начинает двигаться несколько иначе, чем твёрдая Земля). Если тело T твёрдое, то «жёсткая» связь между его частями заставляет их двигаться «взаимно согласованным» образом — так, что расстояния между ними не меняются, но при этом в T возникают внутренние силы, которые называют приливными. Для вращающихся вокруг Земли небольших искусственных спутников приливные силы ничтожны, но они могут оказаться огромными для объекта астрономических размеров и даже разорвать его на части. (Единство не слишком малого естественного спутника планеты определяется не его твёрдостью, т. е. силами межмолекулярного сцепления, а ньютоновским притяжением его частей друг к другу. Если спутник окажется ближе к планете, чем так называемый «предел Роша», борьба между притяжением его частей друг к другу и их притяжением к планете станет неравной, и спутник распадётся на более мелкие части, в пределах каждой из которых приливные силы будут незначительными. Единство каждой из этих частей поддерживается уже не её собственным тяготением, — для малого тела оно ещё более незначительно, — а межмолекулярными взаимодействиями.)

ность поля, создаваемого однородным (или состоящим из однородных концентрических слоёв) шаром массы M с центром в O и радиуса a, в находящейся вне шара точке A равна

$$\mathbf{E}(A) = \frac{fM}{|AO|^2} \frac{\overrightarrow{AO}}{|AO|}. \tag{2}$$

Выше, объясняя, чем же векторное (или скалярное) поле отличается от функции с векторными (или скалярными) значениями, я сказал: формально у нас они ничем не отличаются, но фактически, говоря о поле, имеют в виду, как этот объект возник и (или) что мы собираемся с ним делать. По поводу первого я пояснил, что поле часто (но не всегда) возникает как математическое описание физического поля. В нашем случае (напряжённость поля тяготения) так оно и есть. По поводу второго надо сказать, что имеется несколько понятий, специфических именно для поля. Для полей физического происхождения эти понятия имеют физический смысл и обычно фигурируют в тех или иных физических законах. Те же понятия имеют смысл и для «математических» полей, будучи в этом случае, конечно, уже просто некоторыми математическими объектами. Формально ничто не мешает рассматривать эти объекты для какой-нибудь векторной или скалярной функции, заданной в некоторой области. Но если обращение к такому объекту действительно оказывается целесообразным по характеру рассматриваемого вопроса, то часто бывает уместно называть исходную (скалярную или векторную) функцию полем. Это сразу вызывает в памяти комплекс представлений и результатов, традиционно относимых к математической теории скалярных и векторных полей, что тоже может оказаться полезным.

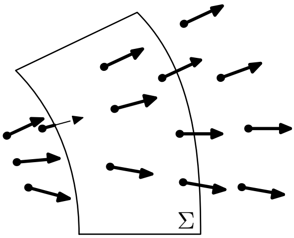


Рис. 85

Нам понадобится одно такое понятие, специфическое для векторных полей.

Рассмотрим сперва векторное поле скоростей $\mathbf{v}$ какого-нибудь потока жидкости или газа с плотностью ρ. Количество (масса) жидкости (газа), протекающей за единицу времени через некоторую поверхность Σ, называется потоком векторного поля $\rho\mathbf{v}$ через эту поверхность. Здесь подразумевается, что течение является стационарным; это значит, что плотность $\rho(A)$ и скорость жидкости $\mathbf{v}(A)$ в любой точке A не зависят от времени t. (Другое дело, что частица жидкости[6], перемещаясь со временем из одной точки в другую, может иметь в различных точках различные скорости, поэтому скорость частицы, вообще говоря, зависит от времени. Плотности в различных местах, куда может попадать частица, тоже могут быть разными.)[7]

Внесём некоторые уточнения. Прежде всего, вполне может случиться, что «за единицу времени» часть жидкости, прошедшей через Σ, успеет ещё раз (а может быть, и не один раз) снова пройти через Σ. Тогда эта часть как бы дважды (а то и бо́льшее число раз) засчитывается в «количество жидкости, протекающей за единицу времени через Σ». Если бы мы рассматривали жидкость как совокупность огромного числа атомов или молекул, то, конечно, можно было бы сказать, что мы считаем число событий, состоящих в том, что какой-то атом

[6]Ниже несколько раз встречается это название, поэтому стоит пояснить его смысл. Под частицами жидкости обычно понимают вовсе не те атомы или молекулы, из которых эта жидкость состоит. Если говорить об этих атомах и молекулах, то их скорости могут сильно различаться, так что говорить о какой-то единой скорости $\mathbf{v}(A)$, которую жидкость имеет возле данной точки A пространства, можно только в том смысле, что $\mathbf{v}(A)$ есть средняя скорость атомов и молекул в некотором малом объёме возле A, который хотя и мал, но всё же огромен по сравнению с размерами самих атомов и молекул и со средним расстоянием между соседними атомами (молекулами), а потому он содержит много атомов (молекул) и разумно говорить об их средней скорости. Часть жидкости, заполняющую такой объём, и называют «частицей жидкости». Если объём взять слишком большим, то его можно считать состоящим из многих частиц, и их скорости вполне могут различаться; говоря о частице, мы имеем в виду, что она столь мала, что в её пределах скорость течения практически постоянна, причём то же самое относится и к другим «макроскопическим» величинам — для наших целей важна только плотность, вообще же в механике жидкостей и газов большую роль играют давление и температура.

Таков физический смысл понятия частицы. При математическом описании течения жидкости (или газа) мы обычно рассматриваем её как «идеализированную» сплошную среду, характеризуемую определёнными величинами, которые могут меняться от точки к точке (на самом деле эта картина является результатом усреднения движений и взаимодействий огромного числа атомов и молекул, о чём в рамках самой этой картины мы как бы забываем). В рамках этой картины «частица» — это просто очень малая часть жидкости (и только когда мы вспоминаем об атомно-молекулярной природе вещества, то уточняем, что с «микроскопической» точки зрения «частица» всё же довольно велика).

[7]Если же говорить о нестационарном течении, когда значение плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$ в точке A может изменяться со временем, так что $\rho = \rho(A,\, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(A,\, t)$, то говорят о потоке $\rho\mathbf{v}$ через Σ в данный момент времени $t = t_1$, понимая под этим поток поля $\rho(A,\, t_1)\mathbf{v}(A,\, t_1)$ с этим самым фиксированным t_1 через Σ. Можно было бы не столь формально сказать так. Пусть $Q(t)$ — количество жидкости (газа), протекшее через Σ за время от некоторого начального момента t_0 до момента t. Тогда поток поля $\rho\mathbf{v}$ через Σ в момент времени $t = t_1$ — это значение в этот момент времени производной $dQ(t)/dt$. (Такое определение годится, конечно, и для стационарного течения.)

Нам не придётся иметь дело с векторными полями, меняющимися со временем.

пересёк Σ; если он пересёк Σ десять раз, то это даёт вклад 10 в общее число пересечений. Но мы хотим говорить о потоке на уровне обычных макроскопических понятий. Тогда надо было бы внести надлежащие формальные уточнения в сказанное выше о том, что какие-то части жидкости засчитываются по несколько раз. Вместо этого проще отчасти изменить точку зрения и сказать, что мы рассматриваем количество жидкости ΔQ, протекшее через Σ за малый отрезок времени Δt, и берём $\Delta Q/\Delta t$. Впрочем, строго говоря, это не всегда спасает: если где-то $\mathbf{v}$ касается Σ, то возле точек касания вполне может случиться, что какие-то частицы жидкости, едва успев пересечь Σ, сразу же снова попадают на Σ, и какое бы малое Δt мы ни взяли, какая-то часть жидкости будет за это время проходить через Σ дважды или ещё бо́льшее число раз. Ниже я буду игнорировать эту возможность, потому что для моих целей обсуждение потока как количества жидкости, протекающей через Σ, имеет предварительный, наводящий характер. Моей целью сейчас является некая формула, дающая некое выражение для потока $\rho\mathbf{v}$ через Σ. Когда я её получу, я изменю определение потока, сказав, что правая часть этой формулы — это отныне и есть поток. Тогда, конечно, в некоторых случаях останется не совсем ясным, какое отношение этот поток будет иметь к количеству жидкости, протекающей через Σ (чтобы он имел отношение, иногда одну и ту же частицу всё же надо было бы учитывать несколько раз). Но это не имеет для нас значения.

Гораздо существеннее следующее. Пусть речь идёт о течении в трубе, протянутой, как обычно в задачах, «из пункта A в пункт B», причём рассматриваются два случая — в одном жидкость течёт из A в B, а в другом — из B в A. Количество жидкости, проходящей за секунду через поперечное сечение Σ трубы, может быть для обоих течений одинаковым, но, очевидно, в известном смысле это противоположные случаи. Условимся считать, что когда жидкость течёт, скажем, из A в B, то поток $\mathbf{v}$ через Σ положительный, а когда из B в A — отрицательный. В более общем случае мы тоже принимаем, что когда жидкость пересекает поверхность Σ в какую-то одну сторону, то поток положительный, а если в обратную сторону, то он отрицательный. Каким образом можно формально указать, что вот в эту сторону поток считается положительным? Мы будем рассматривать только гладкие поверхности Σ (в каждой точке A такой поверхности имеется касательная плоскость, причём эта плоскость непрерывно зависит от A; говоря наглядно, Σ не имеет изломов или заострений). В каждой точке A гладкой поверхности Σ имеется нормальная к ней прямая N_A, т. е. прямая, проходящая через A и перпендикулярная к касательной плоскости к поверхности в этой точке. На N_A имеются два противоположно направленных единичных

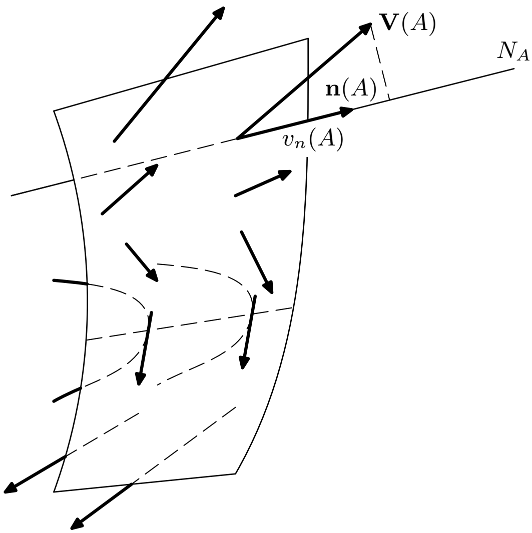


Рис. 86

вектора, которые коротко называют «единичными нормалями» (к Σ в точке A). Пусть мы ориентировали нормальную прямую N_A, т. е. выбрали на ней положительное направление; иными словами, мы решили принять один из этих векторов единичной нормали (обозначим его через $\mathbf{n}(A)$) за «указатель положительного направления». Тогда возле точки A естественно считать поток положительным, если вектор $\mathbf{v}(A)$ направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{n}(A)$, т. е. если проекция $v_n(A)$ вектора $\mathbf{v}(A)$ на ориентированную прямую N_A положительна[8]. И такой «указатель положительного направления» надо выбрать во всех точках поверхности Σ, так что на Σ определяется поле единичных нормалей $\mathbf{n}(A)$. Конечно, это надо сделать «согласованным образом», чтобы у этого поля не было разрывов. Понятно, что если мы выберем $\mathbf{n}(A_0)$ в какой-то точке A_0, то возле этой точки соответствующее направление определится уже однозначно из условий, чтобы у поля $\mathbf{n}(A)$ не было разрывов и чтобы в точке A_0 получался выбранный нами вектор. Затем можно перейти к более далёким точкам, и т. д.

[8]Напоминаю, что если прямая ориентирована, то лежащие на ней векторы можно рассматривать как числа, ибо все они получаются умножением положительно направленного единичного вектора, лежащего на этой прямой, на некоторые числа — координаты этих векторов на этой прямой. Проекция $\mathbf{v}(A)$ на N_A, рассматриваемая как вектор (таково и было её первоначальное определение), есть $v_n(A)\mathbf{n}(A)$ с некоторым числом $v_n(A)$. Выше оно тоже названо проекцией $\mathbf{v}(A)$ на N_A.

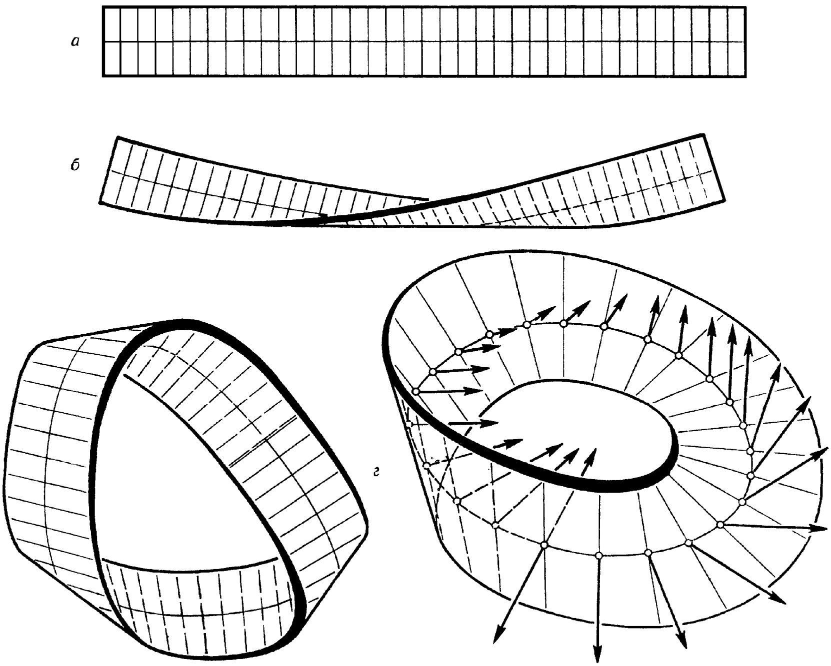


Рис. 87

Здесь имеется одна тонкость: существуют поверхности Σ, для которых попытка построить непрерывное поле единичных нормалей не удаётся. Пример — хорошо известный лист Мёбиуса, который легко склеить из бумажной полоски (рис. 87). Если мы начнём с какой-нибудь его точки A_0, выбрав в ней единичную нормаль $\mathbf{n}(A_0)$, то тогда можно приступить к построению поля $\mathbf{n}$ на всём листе Мёбиуса, двигаясь от A_0 «во все стороны» и непрерывно продолжая наше поле единичных нормалей. Но это приводит к противоречию: когда мы сделаем один оборот вдоль листа и вернёмся в точку A_0, мы придём туда с направлением единичной нормали, противоположным первоначально выбранному.

Если склеить лист Мёбиуса из бумаги и попытаться закрасить одну его сторону, то он окажется закрашенным «с обеих сторон». (Представьте себе, что нормали на рис. 87 заменены кисточками.) Бумажный лист Мёбиуса можно рассматривать как очень тонкое тело, которое получается, если на каждой нормальной прямой N_A «идеального» листа Мёбиуса Σ (настоящей поверхности, не имеющей толщины) взять те точки, которые отстоят от A не более чем на ε, где $\varepsilon > 0$ очень мало.

Граница этого тонкого тела состоит из поверхности Π, образованной теми точками, которые отстоят от соответствующих точек A на ε, и ещё «боковой» поверхности, точки которой лежат на нормальных прямых N_A, взятых в точках края листа Мёбиуса Σ. Когда мы «красим лист Мёбиуса», мы на самом деле красим поверхность Π. Если бы на Σ имелось непрерывное поле единичных нормалей $\mathbf{n}_A$, то поверхность Π состояла бы из двух частей Π_1, Π_2 (одна — это концы векторов $\varepsilon\mathbf{n}_A$, отложенных от соответствующих точек A, другая — концы векторов $-\varepsilon\mathbf{n}_A$). Тогда, начав красить, скажем, Π_1, мы бы только эту часть поверхности Π и закрасили, а на Π_2 не перешли бы. Но в случае листа Мёбиуса поверхность Π, как говорят, связная, т. е. её нельзя разбить на две отдельные части, отстоящие друг от друга на некоторое расстояние; вот она вся и закрашивается. (На рис. 88 показано, что получится, если попытаться заштриховать П, начиная с отрезка aa. Штриховка доведена до отрезка bb, который кажется находящимся на другой стороне П, нежели aa. Ясно, что при продолжении штриховки мы вернёмся к aa, заштриховав всю поверхность П.) Говорят, что лист Мёбиуса, как и другие поверхности, на которых не существует непрерывных полей единичных нормалей, — это односторонние поверхности. Поверхности же, на которых такие поля имеются, называются двусторонними.

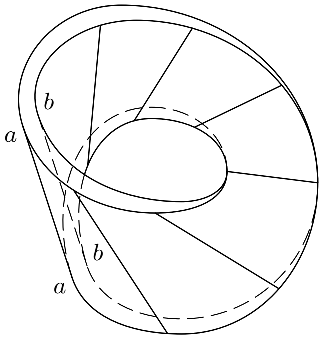


Рис. 88

Замечание. Многим читателям может быть известно другое свойства листа Мёбиуса: это неориентируемая поверхность. Я не буду объяснять, что это значит, но для тех, кто с этим встречался, замечу, что по своему смыслу ориентируемость и двустороннесть — это разные свойства, однако для поверхностей в обычном трёхмерном евклидовом пространстве свойства ориентируемости и двустороннести эквивалентны (одно из них влечёт другое).

Поток векторного поля $\rho\mathbf{v}$ через поверхность Σ определяется только для двусторонней поверхности Σ. При этом подразумевается, что на Σ выбрано непрерывное поле нормалей $\mathbf{n}$. При выборе противоположно направленных нормалей знак у потока изменится. Если надо указать, какое поле нормалей выбрано, то можно сказать подробнее, например, так: поток $\rho\mathbf{v}$ через Σ в направлении $\mathbf{n}$.

Рассмотрим простейший пример, когда скорость $\mathbf{v}$ и плотность ρ всюду одни и те же, а Σ — область на некоторой плоскости. Мы должны ещё выбрать единичную нормаль $\mathbf{n}(A)$ к этой плоскости; в данном случае вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$ во всех точках поверхности Σ один и тот же. Где находится в некоторый момент времени t та часть жидкости, которая протекла через Σ в последнюю секунду перед этим моментом? Она занимает призму, основание которой есть Σ, которая расположена по ту сторону от Σ, куда направлен вектор $\mathbf{v}$ (если отложить его от какой-нибудь точки поверхности Σ), и ось которой параллельна этому вектору и имеет ту же длину, что и он. (В теоретико-множественных терминах

$$\textit{призма} = \{\mathbf{x} + s\mathbf{v};\ \mathbf{x} \in \Sigma,\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}.$$

В этой записи точки $A \in \Sigma$ отождествляются с векторами $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$, где O — начало отсчёта. Частица жидкости, которая в момент времени $t - s$ пересекла Σ в точке $\mathbf{x}$, к моменту t придёт в точку $\mathbf{x} + s\mathbf{v}$.) Объём этой призмы равен произведению площади S её основания на длину высоты, а последняя длина совпадает с длиной $|v_n|$ проекции вектора $\mathbf{v}$ на нормальную к Σ прямую. Интересующий нас поток векторного поля $\rho\mathbf{v}$ через Σ равен массе жидкости, содержащейся в этой призме, причём масса берётся со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, направлены ли векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ в одну и ту же сторону от Σ или нет. Такой же знак имеет и проекция v_n вектора $\mathbf{v}$ на нормальную к Σ прямую (ориентированную с помощью вектора $\mathbf{n}$). Мы приходим к выводу, что

$$\textit{поток} = \rho v_n S. \tag{3}$$

А теперь рассмотрим общий случай. Разобьём поверхность Σ на маленькие участки $\Delta\Sigma_i$ площади ΔS_i. Пусть A_i — какая-нибудь точка поверхности $\Delta\Sigma_i$. Если бы участок $\Delta\Sigma_i$ был плоским, так что вектор $\mathbf{n}(A)$ был бы постоянным в пределах этого участка, и если бы $\mathbf{v}(A)$ и $\rho(A)$ были постоянны в пространстве возле $\Delta\Sigma_i$, то в момент времени t жидкость, протекшая за время $[t - \Delta t,\, t]$ с малым Δt через $\Delta\Sigma_i$[9], заполняла бы призму, которая имеет основание $\Delta\Sigma_i$ и находится по ту сторону от $\Delta\Sigma_i$, куда указывает вектор $\mathbf{v}(A_i)$, и ось которой параллельна $\mathbf{v}(A_i)$ и имеет длину $|\mathbf{v}(A_i)|\Delta t$. Объём этой призмы равен $|v_n(A_i)|\Delta t\Delta S_i$, а масса этой жидкости, взятая с соответствующим знаком, равнялась бы

$$\Delta Q_i = \rho(A_i) v_n(A_i) \Delta S_i \Delta t. \tag{4}$$

[9] Теперь мы рассматриваем малый отрезок времени, ибо за бо́льшее время частица жидкости, прошедшая через $\Delta\Sigma_i$, может уйти на значительное расстояние от $\Delta\Sigma_i$, где плотность и скорость будут совсем другими.

На самом деле $\Delta\Sigma_i$ может незначительно отклоняться от плоскости, вектор $\mathbf{n}(A)$ в пределах $\Delta\Sigma_i$ может немного отличаться от $\mathbf{n}(A_i)$, возле $\Delta\Sigma_i$ вектор $\mathbf{v}(A)$ и плотность $\rho(A)$ не обязательно постоянны, а только близки к $\mathbf{v}(A_i)$ и $\rho(A_i)$; жидкость, протекшая за время от $t-\Delta t$ до t через $\Delta\Sigma_i$, образует в момент времени t некое тело, представляющее собой «слегка деформированную» призму, описанную выше. Поэтому формула (4) является не точной, а приближённой, но ошибка мала по сравнению с $\Delta S_i \Delta t$. (Несколько небрежно можно сказать, что мала относительная ошибка этой формулы. Небрежность здесь та, что $v_n(A)$ вполне может где-нибудь на Σ обращаться в нуль; возле таких точек правая часть равенства (4) мала сравнительно с $\Delta S_i \Delta t$, и тогда уже не приходится говорить о малой относительной ошибке.) Общая же масса жидкости, протекшей за это время через Σ, есть

$$\Delta Q = \sum \Delta Q_i \approx \sum \rho(A_i) v_n(A_i) \Delta S_i \Delta t,$$

причём ошибка этой формулы может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с Δt, если «кусочки поверхности» $\Delta\Sigma_i$ достаточно малы. Поэтому

$$\textit{поток } \rho\mathbf{v} \textit{ через } \Sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx \sum \rho(A_i) v_n(A_i) \Delta S_i, \tag{5}$$

где ошибка стремится к 0 при измельчении разбиения поверхности Σ на участки $\Delta\Sigma_i$.

В интегральном исчислении доказывается, что (в предположении гладкости поверхности Σ и непрерывности $\rho(A)$ и $\mathbf{v}(A)$) существует предел правой части приближенного равенства (5) при неограниченном уменьшении участков $\Delta\Sigma_i$. Этот предел есть так называемый «интеграл по поверхности» или «поверхностный интеграл» $\iint_\Sigma \rho v_n\, dS$. По этой причине

$$\textit{поток } \rho\mathbf{v} \textit{ через } \Sigma = \iint_\Sigma \rho v_n\, dS. \tag{6}$$

Я, конечно, не собираюсь вникать в интегральное исчисление, но всё-таки сделаю некоторые пояснения.

Интегрирование функции f по поверхности Σ имеет простой и наглядный смысл, когда f — это поверхностная плотность некоторого заряда, распределённого по Σ. В этом случае $\iint_\Sigma f\, dS$ есть суммарная величина этого заряда. (Я говорю о заряде, а не о массе, потому что заряд и его плотность вполне могут быть отрицательными. Если всюду $f \geqslant 0$, то можно сказать и так, что мы хотим найти суммарную величину массы, распределённой по поверхности с поверхностной плотностью f. Функция f есть поверхностная плотность заряда (массы), если заряд (масса) малого участка поверхности есть $f(x)\Delta S + o(\Delta S)$, где ΔS — площадь этого участка, а x — какая-нибудь его точка.) Сравните это с упомянутой в конце § 4 более простой задачей об определении заряда, распределённого по прямолинейному отрезку $[a,\, b]$, если известна его линейная плотность $f(x)$, где ответ даётся интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$. В общем случае интеграл по поверхности, как и $\int_a^b f(x)\,dx$, ни к каким зарядам или массам не имеет отношения, а является чисто математическим понятием, определяемым как предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения поверхности Σ на участки $\Delta\Sigma_i$ (хотя при желании можно вообразить, будто данная функция f является плотностью заряда, и тогда $\iint_\Sigma f\,dS$ будет суммарным зарядом).

Как и в конце § 4, заряд или масса — это просто более наглядное название для того, что там было названо «аддитивной функцией F области». В данном случае речь идёт об областях на поверхности Σ: области $G \subset \Sigma$ сопоставляется число $F(G) = \iint_G f\,dS$ (обозначение указывает, что интегрирование ведётся не по всей поверхности Σ, а только по области G. При построении соответствующих интегральных сумм берутся $\Delta\Sigma_i \subset G$.)

В принципе, связь между поверхностным интегралом и интегральной суммой, стоящей в правой части формулы (5), не отличается от относящейся к самому началу курса интегрального исчисления связи между интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ и интегральной суммой (26) (подразумевающей, что отрезок $[a,\, b]$ разделён на маленькие отрезки с помощью системы точек деления (25) и что в каждом отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$ выбрано некоторое число ξ_i). Различие только в том, что для поверхностного интеграла надо сделать больше уточнений: что такое гладкая поверхность, что такое площадь (площадь как всей поверхности, так и её «кусочка»), каким образом мы разбиваем поверхность Σ (или область на этой поверхности) на «кусочки» $\Delta\Sigma_i$. Отчасти по этой причине, а отчасти потому, что желательно говорить об интеграле по поверхности в связи с другими вопросами (а это требует и подготовки, и времени), студенты встречаются с этими интегралами позднее, чем с $\int_a^b f(x)\,dx$. Однако в принципе это, повторяю, одно и то же (хотя «технически» может оформляться по-разному).

Что касается неизбежных (хотя и досадных) уточнений, то в случае поверхностного интеграла при работе с интегральными суммами (особенно если мы, так сказать, вынуждены сходить с поверхности, как это было при вычислении ΔQ_i) может понадобиться, чтобы рассматриваемые малые участки поверхности $\Delta\Sigma_i$ были более или менее правильной формы — не слишком узкими, с не слишком изрезанной границей, и т. д. При уменьшении участка поверхности $\Delta\Sigma_i$ (что происходит при переходе к более мелкому разбиению поверхности Σ) его форма не должна усложняться. Пожалуй, ещё более неприятным является уточнение свойств той «слегка деформированной призмы», которая заполнена в момент времени t жидкостью, протекшей через $\Delta\Sigma_i$ за время от $t - \Delta t$ до t. В общем случае трудно даже сформулировать точно, чего мы хотим. (Насколько проще было иметь дело с отрезком $[t,\, t + \Delta t]$ числовой оси и соответствующими дугами траекторий в §§ 4, 5!) Однако можно поступить так. Хотя теперь в постановке задачи не содержится никаких независимых переменных, которые по самому её характеру играли бы особую роль (вроде t в §§ 4, 5), но можно ввести какие-нибудь криволинейные координаты u, v на поверхности Σ (или по крайней мере на её части, о чём будет сказано ниже). Тогда за участки $\Delta\Sigma_i$ можно принять участки поверхности, отвечающие изменению u на Δu и v на Δv. При всей неопределённости сказанного выше о форме участков, кажется наглядно ясным, что такие $\Delta\Sigma_i$ нам подходят. Это будут криволинейные четырёхугольники с гладкими сторонами, т. е. довольно правильной формы; если Δu и Δv — величины одного порядка малости (я позволю себе этого не уточнять), то такие участки $\Delta\Sigma_i$ не будут слишком узкими; при уменьшении Δu и Δv формы участков не усложняются.

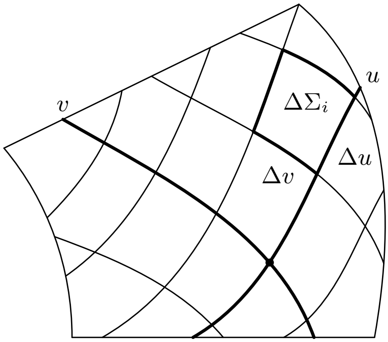


Рис. 89

Конечно, сказанное — не более чем наводящие соображения в пользу криволинейных четырёхугольников, возникающих из «координатной сетки». Но при строгих рассуждениях с поверхностными интегралами такие $\Delta\Sigma_i$ действительно используются. Впрочем, когда мы интересуемся самими поверхностными интегралами, они в основном остаются как бы за сценой. Дело в том, что при использовании криволинейных координат u, v все рассматриваемые величины становятся функциями двух переменных, и внешне мы имеем дело с плоскостью $(u,\, v)$ и прямоугольниками из соответствующей «координатной сетки», образованной прямыми $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на этой плоскости. Надо только знать, как связана площадь ΔS_i криволинейного четырёхугольника $\Delta\Sigma_i$ с площадью $\Delta u \Delta v$ соответствующего прямоугольника на плоскости $(u,\, v)$.

Нетрудно догадаться, что с точностью до величины более высокого порядка малости они пропорциональны друг другу (конечно, множитель пропорциональности меняется от одного четырёхугольника к другому); роль геометрии поверхности Σ сводится к тому, чтобы найти множитель пропорциональности; это не так уж сложно. Но, рассматривая поток поля $\rho\mathbf{v}$ через Σ, мы по самому определению этого потока должны как бы сходить с поверхности Σ. Тогда роль геометрии, конечно, возрастает.

Здесь есть ещё одно обстоятельство, на которое надо обратить внимание. Что, если нельзя ввести на всей поверхности Σ криволинейные координаты? Ведь если это можно сделать, то координаты устанавливают взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие (как говорят в математике, гомеоморфизм) между Σ и некоторой областью на плоскости (u, v), а вполне может случиться, что такого соответствия установить нельзя (как говорят, поверхность Σ не гомеоморфна никакой плоской области). Например, кажется довольно ясным, что это так, если Σ — сфера. (Представьте себе резиновую сферу, материал которой можно как угодно сжимать, растягивать, изгибать, но не разрешается рвать. Удастся ли превратить сферу в плоскую область?) В этом случае можно разбить Σ на несколько частей $\Sigma^{(j)}$, на каждой из которых можно ввести подходящие криволинейные координаты (но на «стыке» этих частей соответствующие координаты «не согласуются друг с другом»). Для каждой из этих частей можно определить $\iint_{\Sigma^{(j)}}$ и доказать формулу (6). После этого естественно принять, что $\iint_{\Sigma}$ — это сумма всех $\iint_{\Sigma^{(j)}}$. (Здесь возникает вопрос: можно по-разному разбивать Σ на части $\Sigma^{(j)}$, допускающие введение криволинейных координат; не может ли от этого зависеть сумма соответствующих $\iint_{\Sigma^{(j)}}$? Можно доказать, что нет. Впрочем, технически это может выглядеть несколько иначе[10].) После этого получаем

$$\textit{поток } \rho\mathbf{v} \textit{ через } \Sigma = \sum_j (\textit{поток } \rho\mathbf{v} \textit{ через } \Sigma^{(j)}) = \\ = \sum_j \iint_{\Sigma^{(j)}} \rho v_n \, dS = \iint_{\Sigma} \rho v_n \, dS.$$

До сих пор речь шла о потоке через поверхность Σ векторного поля $\rho\mathbf{v}$, имеющего механический смысл: $\mathbf{v}$ — векторное поле скорости некоторого течения жидкости (газа), а ρ — её (его) плотность. По аналогии, для любого другого векторного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(A)$ мы тоже

[10]Примечание для больших знатоков: вместо разбиения Σ на $\Sigma^{(j)}$ проще использовать так называемое разбиение единицы.

говорим о его потоке через Σ, определяя этот поток как $\iint_\Sigma E_n\,dS$, где E_n — проекция $\mathbf{E}$ на нормаль. Теперь, в отличие от предыдущего случая, слово «поток» употребляется как термин, имеющий только тот смысл, который ему придан посредством только что данного определения. Мы просто воспользовались готовым названием, но теперь слово «поток» не подразумевает никакого перемещения чего бы то ни было через поверхность Σ. Конечно, при желании можно представить себе течение жидкости с полем скорости $\mathbf{v}=\mathbf{E}$ и плотностью $\rho=1$ или с какой-нибудь другой плотностью ρ и скоростью $\mathbf{v}=\frac{1}{\rho}\mathbf{E}$; тогда $\iint_\Sigma E_n\,dS$ приобретёт тот механический смысл, с которого мы начали (и который послужил причиной названия «поток»). Но для произвольного поля $\mathbf{E}$ это воображаемое течение жидкости не только является вымышленным, но и может даже противоречить реальным физическим законам движения жидкостей и газов.

В общем случае поток поля $\mathbf{E}$ через Σ — это математическое понятие. Но оно имеет физический смысл не только тогда, когда рассматривается течение жидкости и $\mathbf{E}=\rho\mathbf{v}$. Для электротехники (и, значит, для всей нашей жизни) имеет огромное значение открытие Фарадея, что при изменении магнитного поля, «пронизывающего» поверхность Σ, которая «натянута» на некоторый замкнутый контур, в последнем возникает электродвижущая сила. Количественное выражение этого факта таково: с точностью до множителя, зависящего от используемой системы единиц, электродвижущая сила равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции через Σ.

Далее $\mathbf{E}$ всегда будет напряжённостью некоторого поля тяготения. Рассмотрим поток такого поля для четырёх случаев.

1. Поле создаётся массой M, сосредоточенной в точке O. Нас интересует поток векторного поля $\mathbf{E}$ через некоторую поверхность Σ, разумеется, не проходящую через O. Но сперва мы рассмотрим поток поля $\mathbf{E}$ через маленький кусочек $\Delta\Sigma$ поверхности Σ, имеющий площадь ΔS; можно считать, что это криволинейный черырёхугольник, связанный с «координатной сеткой» на поверхности Σ или на её части, как описано при обсуждении формулы (6). Пусть расстояние $|OA_0|$ от некоторой точки $A_0\in\Delta\Sigma$ до O равно r; для других точек $\Delta\Sigma$ расстояние $|OA|$, вообще говоря, отлично от r, но ввиду малости $\Delta\Sigma$ близко к r. Нормаль $\mathbf{n}(A_0)$ направлена к O, так что угол φ между нею и $\overrightarrow{A_0O}$ острый.

В этом случае

$$\mathbf{E}(A_0)=\frac{fM}{r^2}\frac{\overrightarrow{A_0O}}{|A_0O|},\qquad E_n(A_0)=\frac{fM}{r^2}\cos\varphi,$$

а в других точках $A \in \Delta\Sigma$ проекция $E_n(A)$ вектора $\mathbf{E}(A)$ на соответствующую нормальную прямую тоже близка к $(fM/r^2)\cos\varphi$ (хотя уже не обязательно в точности равна этому выражению). Поток поля $\mathbf{E}$ через $\Delta\Sigma$ приблизительно равен $(fM/r^2)\cos\varphi\Delta S$ (возможная ошибка мала по сравнению с ΔS).

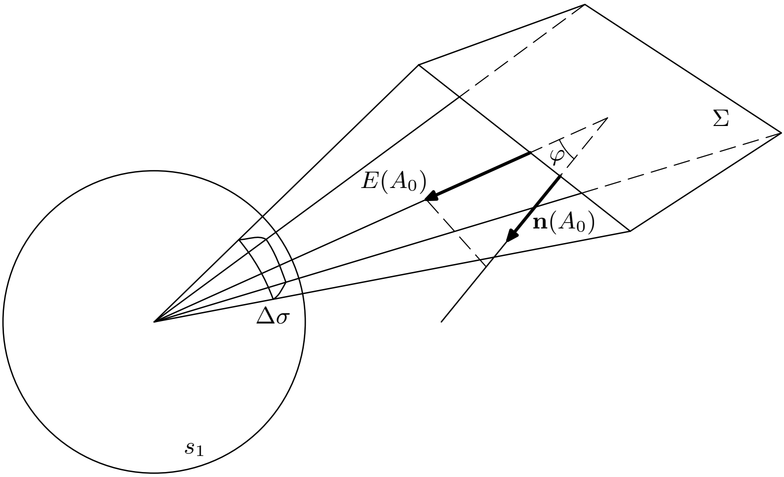


Рис. 90

Обратим внимание на выражение $(1/r^2)\cos\varphi\Delta S$. Оно имеет простой геометрический смысл: это есть (опять-таки с точностью до $o(\Delta S)$) телесный угол $\Delta\omega$, под которым видна поверхность $\Delta\Sigma$ из точки O. Напомню определение телесного угла. Соединим точку O со всеми точками $A \in \Delta\Sigma$ посредством лучей (полупрямых), начинающихся в O. Получится некоторое тело K, которое можно назвать конусом над $\Delta\Sigma$ с вершиной в O. (В элементарной геометрии под конусом обычно понимают конус над кругом, но там рассматривают также и конусы над многоугольниками, только эти конусы называют пирамидами.) Обозначим через $\Delta\sigma$ область на единичной сфере s_1 с центром в O, по которой конус K пересекает эту сферу. Площадь $\Delta\omega$ этой области — это и есть интересующий нас телесный угол. (Сравните с измерением обычного угла на плоскости посредством длины дуги, высекаемой этим углом на окружности единичного радиуса с центром в вершине угла.)

Переход от $\Delta\Sigma$ к $\Delta\sigma$ — это центральное (с центром O) проектирование поверхности $\Delta\Sigma$ на сферу s_1. (Возможно, читатель встречался с центральным проектированием на плоскость, но принцип один и тот же.) Его можно представить себе происходящим в два шага. Сперва осу-

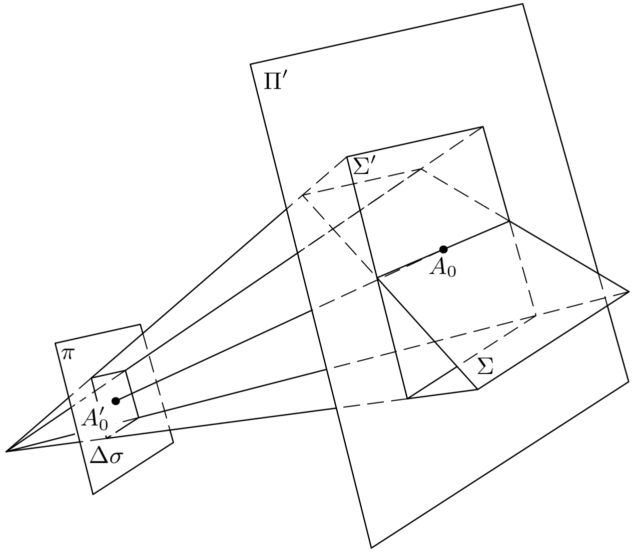


Рис. 91

ществим центральное проектирование поверхности $\Delta\Sigma$ на плоскость Π', проходящую через точку A_0 и перпендикулярную к OA_0. Получающуюся при этом фигуру в плоскости Π' обозначим через $\Delta\Sigma'$. Затем осуществим центральное проектирование $\Delta\Sigma'$ на s_1. Посмотрим, как при этих двух шагах изменяется площадь проектируемой фигуры.

Ввиду малости $\Delta\Sigma$ будем считать, что $\Delta\Sigma$ — это область в касательной плоскости Π к поверхности Σ в точке A_0. (Если угодно, мы смещаем точки $\Delta\Sigma$ параллельно $\mathbf{n}(A_0)$ в Π. Эти малые смещения отражаются и на дальнейших построениях, но вызванные этим изменения тоже малы. Мало изменяется и площадь $\Delta\Sigma$.)

Проецирование $\Delta\Sigma$ на Π' осуществляется с помощью лучей, исходящих из O. Они, конечно, не параллельны друг другу, но углы между ними малы; малы и расстояния, на которые смещаются точки участка $\Delta\Sigma$ при проектировании. Поэтому с большой точностью можно считать, что проектирование осуществляется с помощью прямых, параллельных OA_0, т. е. перпендикулярных Π'. При таком проектировании площадь фигуры, лежащей в плоскости Π, умножается на косинус угла между плоскостями, а этот угол есть угол φ между $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{A_0O}$. (Сказанное очевидно для прямоугольников, у которых одна пара сторон параллельна линии пересечения плоскостей, — длины этих сторон при проектировании не меняются, — а другая пара сторон, следовательно, перпендикулярна указанной линии, — длины последних двух сторон умножаются на $\cos\varphi$. После этого для площадей других фигур можно использовать «аппроксимационные» соображения вроде тех, которые использовались в § 3 при вычислении площади эллипса.) Поэтому площадь $\Delta S'$ фигуры $\Delta\Sigma'$ равна $\Delta S\cos\varphi$.

Фигура $\Delta\sigma$ расположена на сфере s_1, но можно считать её расположенной в плоскости π, касательной к сфере s_1 в точке A_0' — проекции на сферу s_1 точки A_0, т. е. точке пересечения луча OA_0 с этой сферой. (Соображения аналогичны тем, которые приводились по поводу «помещения» $\Delta\Sigma$ в Π.) Но тогда получается, что мы рассматриваем центральную проекцию плоскости Π' на параллельную ей плоскость π, причём расстояние от π до центра проектирования O равно 1, а расстояние от Π' до O равно r. Каждая фигура плоскости Π' переходит в подобную ей фигуру плоскости π, причём все расстояния между точками первой фигуры уменьшаются в r раз. В таком случае площадь проектируемой фигуры уменьшается в r^2 раз (это очевидно для прямоугольников, а в общем случае можно использовать «аппроксимационные» соображения). Значит,

$$\Delta\omega = \frac{1}{r^2}\Delta S' = \frac{1}{r^2}\cos\varphi\cdot\Delta S, \qquad \textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Delta\Sigma = fM\Delta\omega. \tag{7}$$

2. По смыслу рассуждений в п. 1 формула (7) получена как приближённая формула, тем более точная, чем меньше $\Delta\Sigma$. Но, оказывается, ошибки, сделанные при выводе формулы (7), компенсируются, и формула является точной!

При этом вовсе не нужно, чтобы поверхность, о потоке через которую идёт речь, была малой. Обозначим теперь эту поверхность через Σ (раз это уже не маленький кусочек), а телесный угол, под которым она видна из O, через ω. Мы предположим, что на ней имеется непрерывное поле единичных нормалей $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$, всюду направленное в сторону O (в том смысле, что угол между $\mathbf{n}(A)$ и $\overrightarrow{AO}$ острый). Тогда

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma = fM\omega. \tag{8}$$

Для доказательства разобьём Σ на маленькие «кусочки» $\Delta\Sigma_i$ площади ΔS_i. Как и при обсуждении формулы (6), «кусочки» можно считать криволинейными четырёхугольниками, отвечающими некоторой «координатной сетке»[11]. Пусть «кусочек» $\Delta\Sigma_i$ виден из O под телесным углом $\Delta\omega_i$. Ясно, что $\omega = \sum\Delta\omega_i$ (при разбиении Σ на «кусочки» $\Delta\Sigma_i$

[11] Если на всей поверхности Σ ввести криволинейные координаты нельзя, разобьём её на части, на каждой из которых это возможно. Аналогично тому, как это было при доказательстве формулы (6), если формула (8) будет доказана для всех этих частей,

конус K разбивается на соответствующие «узкие» конусы K_i, а в пересечении с s_1 получается, что проекция σ нашей поверхности Σ на s_1 разбивается на маленькие области $\Delta\sigma_i$ с площадями $\Delta\omega_i$). Поэтому из п. 1 следует, что

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma = \sum(\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Delta\Sigma_i) = \sum fM\Delta\omega_i = fM\omega.$$

Пока что мы всё ещё допускаем, что это равенство может быть не точным, а приближённым, но чем меньше «кусочки» $\Delta\Sigma_i$, тем оно точнее. А ведь как бы мы ни разбивали Σ на «кусочки», потоки поля $\mathbf{E}$ через Σ и $fM\omega$ остаются теми же самыми. Вот и выходит, что равенство (8) является точным.

Замечание. На самом деле формула (6) верна и тогда, когда поверхность Σ «изогнута» таким образом, что местами на ней поле $\mathbf{n}$ направлено в сторону O, а местами — в сторону от O (там угол между $\mathbf{n}(A)$ и $\overrightarrow{AO}$ тупой). Но при этом надо считать, что та часть Σ_- поверхности Σ, где вектор $\mathbf{n}(A)$ направлен в сторону от O, даёт отрицательный вклад в ω, тогда как часть Σ_+, где вектор $\mathbf{n}(A)$ направлен в сторону O, даёт, как и раньше, положительный вклад. Именно, если часть Σ_+ видна из O под телесным углом ω_+, а Σ_- — под телесным углом ω_-, то в формуле (8) надо под ω понимать $\omega_+ - \omega_-$. Действительно,

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma_+ = fM\omega_+,$$

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma_- = -(\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma_- \textit{ в сторону } -\mathbf{n}) = -fM\omega_-,$$

а та часть поверхности Σ, где вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен $\overrightarrow{AO}$, не даёт вклада ни в поток (там $E_n = 0$), ни в ω. А поток поля $\mathbf{E}$ через Σ равен сумме потоков через Σ_+ и Σ_-.

Но это нам не понадобится.

3. Пусть Σ — это сфера, а точка O, где сосредоточена масса M, находится внутри этой сферы. Нормали $\mathbf{n}$ направим в сторону центра сферы, что означает, что они идут к центру по радиусам; тогда выполнено условие, что угол между $\mathbf{n}(A)$ и $\overrightarrow{AO}$ острый. Конус K в данном случае — это всё пространство (куда ни посмотри из O, видна точка сферы Σ), поэтому $\sigma = s_1$ и $\omega = 4\pi$ (ибо площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$). Итак,

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma = 4\pi fM.$$

4. Пусть внутри сферы Σ имеются материальные точки с массами M_i; их общая масса $M = \sum M_i$; i-я точка создаёт поле тяготения

отсюда будет следовать её справедливость и для всей поверхности Σ. Поэтому можно считать, что на всей поверхности Σ можно ввести криволинейные координаты.

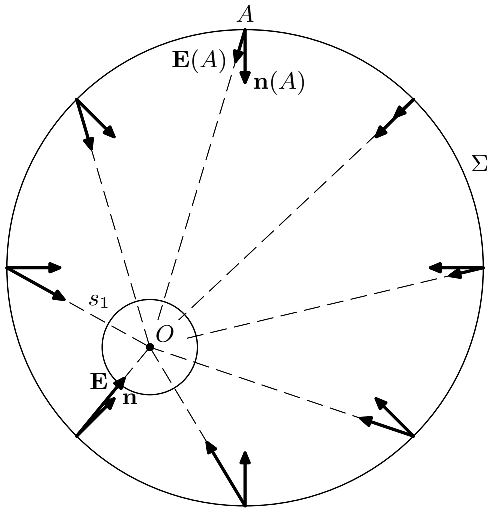


Рис. 92

с напряжённостью $\mathbf{E}_i$, поток которой через Σ равен $4\pi f M_i$. А все массы вместе создают поле с напряжённостью $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$. Тогда поток поля $\mathbf{E}$ через Σ равен сумме потоков полей $\mathbf{E}_i$, т. е. $\sum 4\pi f M_i = 4\pi f M$.

От системы материальных точек можно перейти к любому распределению массы M внутри Σ. (Если речь идёт о теле T с непрерывным распределением массы, разбиваем его на маленькие «кусочки» и рассматриваем каждый «кусочек» как материальную точку. Впрочем, это скорее надо математикам, когда они хотят последовательно разрабатывать теорию притяжения подобного рода тел, отвлекаясь от того, что на самом деле тела состоят из атомов и молекул. Это не праздное занятие, потому что реально во многих случаях вычисления действительно производятся в такой «непрерывной» модели, и желательно иметь уверенность в её внутренней согласованности. Но это всё-таки занятие для специалистов.) Поэтому *поток через сферу Σ напряжённости поля тяготения, созданного как угодно распределёнными внутри Σ массами, равен $4\pi f M$, где M — суммарная масса внутри Σ.*

Замечание. Последнее утверждение справедливо не только для сферы, но и для любой замкнутой поверхности, и называется теоремой Гаусса. Мы ограничились единственно нужным нам случаем сферы, чтобы в п. 3 не надо было возиться с возникающим в общем случае вопросом, с какими знаками надо брать телесные углы, под которыми видны из O различные части поверхности Σ.

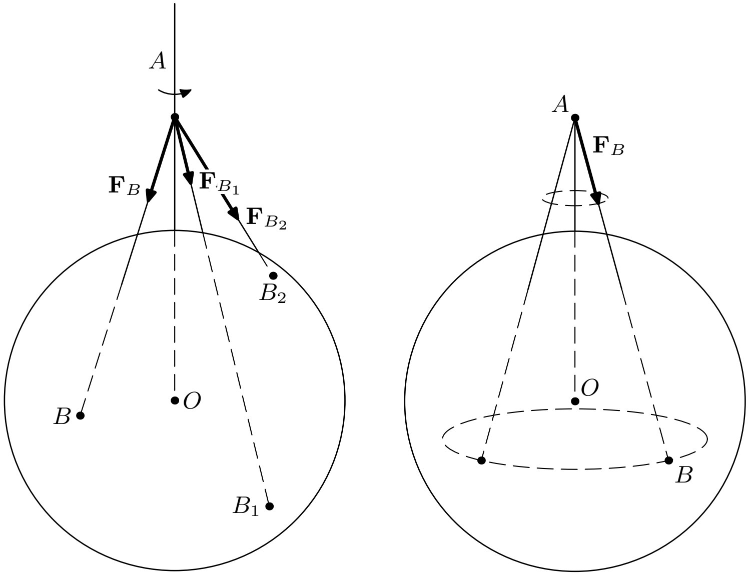


Рис. 93

Теперь уже легко доказать формулу (2) для напряжённости поля тяготения, создаваемого шаром массы M, который состоит из концентрических однородных слоёв. Пусть, как и раньше, O — центр шара, а точка A лежит вне шара; обозначим для краткости $r = |AO|$. (На рис. 93 слева изображены силы притяжения единичной массы, помещённой в точке A, к трём частицам B, B_1, B_2 шара.) Используем соображения симметрии. Мысленно повернём шар на угол φ вокруг оси OA. С одной стороны, $\mathbf{E}(A)$ слагается из векторов сил, действующих на находящуюся в точке A единичную массу со стороны частиц шара. Раз частица B повернулась вокруг оси OA на φ, то так же повернулась и направленная по AB сила притяжения $\mathbf{F}_B$. (На рис. 93 справа пунктиром показана окружность, по которой движется B при вращении вокруг оси OA. Сила $\mathbf{F}_B$ изображается направленным отрезком с началом O и с концом на прямой AB. Начало осталось на месте, а конец повернулся, ибо повернулась на угол φ вокруг оси OA вся прямая AB. При вращении вокруг OA конец этого отрезка движется по соответствующей пунктирной окружности.) И поскольку это так для всех частиц шара, и суммарная сила притяжения $\mathbf{E}(A)$ повернулась на φ. С другой стороны, ввиду однородности слоёв, составляющих шар, при повороте ничего не изменится. Итак, вектор $\mathbf{E}(A)$ переходит в себя при повороте на любой угол φ вокруг оси OA. Это возможно только для вектора, направленного по оси OA. Итак, $\mathbf{E}(A) = E(A)\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к сфере в точке A, направленная по AO от A к O. Сила притяжения $\mathbf{F}_B$, направленная к B, имеет положительную проекцию на ось AO, ориентированную от A к O; значит, то же верно и для суммы $\mathbf{E}(A)$ этих сил. Поэтому $E(A) > 0$.

Пусть точка A' находится на том же расстоянии от O, что и A. Путём поворота вокруг подходящей оси на подходящий угол переведём A в A'. Рассуждая аналогично предыдущему, заключаем, что при этом $\mathbf{E}(A)$ перейдёт в $\mathbf{E}(A')$. Значит, $E(A) = E(A')$ (ведь $|\mathbf{n}(A)| = |\mathbf{n}(A')|$ $(=1)$). Остановимся на момент перед финальной сценой и переведём дух:

$$\mathbf{E}(A) = E(r)\mathbf{n}(A),$$

где $E(r)$ — функция от r. Мы хотим доказать, что она равна fM/r^2.

В финале, как deus ex machina[12], появляется теорема Гаусса. На сфере Σ радиуса r проекция E_n вектора $E(r)\mathbf{n}$ на нормальную прямую (т. е. попросту на радиус), ориентированную согласно направлению $\mathbf{n}$, есть $E(r)$; значит,

$$\textit{поток } \mathbf{E} \textit{ через } \Sigma = E(r)\cdot(\textit{площадь сферы}) = 4\pi r^2 E(r).$$

По теореме Гаусса это выражение равно $4\pi fM$, откуда и следует «happy end»:

$$E(r) = \frac{1}{r^2} fM.$$

Замечание. Теорема Гаусса, разумеется, справедлива и в электростатике с очевидными изменениями: в вакууме поток поля напряжённости электрического поля, создаваемого расположенными внутри сферы (более общим образом, внутри замкнутой поверхности) Σ зарядами, общая величина которых есть Q, равен $4\pi Q$, если нормали $\mathbf{n}$ на сей раз направлены наружу Σ и используется система единиц, в которой величина силы взаимодействия двух зарядов Q_1 и Q_2 в вакууме равна по абсолютной величине Q_1Q_2/r^2. Обычно эту теорему излагают в курсе физики именно в связи с электростатикой.[13]

[12] «Бог из машины» — первоначально это было ироническим комментарием в древности по поводу финалов античных драм, когда на сцене (даже у великих драматургов) внезапно появлялся бог и приводил всё в должный порядок, чего без его вмешательства никак бы не вышло. Бог не мог, как простой смертный, войти в дверь или выйти из-за куста; он спускался с неба, для чего и была нужна машина.

[13] Теорема верна и для электростатического поля в веществе, только в ней тогда речь идёт о потоке векторного поля электрической индукции.

В более элементарных учебниках физики поток напряжённости $\mathbf{E}$ электрического поля определяют не с помощью интеграла или гидродинамической аналогии, а следующим образом. Рисуют (хотя бы в уме) силовые линии этого поля — не все, конечно (их континуум, они сплошь заполняют ту область, где имеется поле[14]), а некоторые. Именно, их рисуют с «густотой», пропорциональной величине $|\mathbf{E}|$ напряжённости поля. Роль потока играет число силовых линий, пересекающих Σ, причём при подсчёте каждая линия учитывается с надлежащим знаком (а точнее, учитывается каждое пересечение линии с Σ). Разумеется, поток тогда всегда будет целым числом, но это как раз не так уж существенно физически. Если пользоваться системой единиц с очень малой единицей напряжённости, то поток в нашем старом смысле тоже будет почти что целым числом — он будет целым числом плюс дробь, которой можно пренебречь. Более существенно другое. Мы можем начать с некоторой поверхности Σ и разместить на ней точки с плотностью, пропорциональной E_n. Через эти точки мы будем проводить силовые линии. Тогда можно проверить, что возле Σ их «густота» как раз и будет пропорциональна $|\mathbf{E}|$. Но ведь как дальше идут эти линии — это от нас уже не зависит, а определяется полем $\mathbf{E}$. Где гарантия, что всюду их густота останется пропорциональной $|\mathbf{E}|$?

Например, представим себе изменённый закон тяготения, при котором притяжение обратно пропорционально не квадрату r^2 расстояния r между притягивающимися материальными точками, а кубу r^3. Тогда точечный источник поля, находящийся в точке O, создаёт напряжённость

$$\mathbf{E}(A) = \frac{\mathrm{const}}{|AO|^3}\frac{\overrightarrow{AO}}{|AO|},$$

и поток поля $\mathbf{E}$ через сферу радиуса r с центром в O обратно пропорционален r. Получается, что чем дальше от O, тем меньше силовых линий. Математически понимаемые силовые линии (те, которых касаются векторы поля), конечно, никуда не деваются (в данном случае они суть лучи, начинающиеся в O), но мы условились обращать внимание только на часть этих линий, выделенную с известной густотой. И вот, оказывается, по мере удаления от O эти линии исчезают из сферы нашего внимания. А если вообразить себе притяжение, обратно про-

[14] В области, где задано непрерывное векторное поле $\mathbf{E}$, через каждую точку A, где $\mathbf{E}(A) \neq 0$, проходит силовая линия (понимаемая чисто математически — как такая линия, что в каждой её точке вектор $\mathbf{E}(A)$ касается этой линии). Это утверждение эквивалентно теореме существования решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданным начальным значением.

порциональное r, то при удалении от O будут возникать, или, точнее, требовать нашего внимания новые силовые линии.

Утверждение, что если для поля тяготения или электростатического поля где-то нарисованы силовые линии с «правильной» (пропорциональной напряжённости) густотой, то и при их продолжении (как линий с соответствующими касательными) «густота» всюду останется «правильной», представляет собой очень элементарную, а потому неуклюжую формулировку одного из вариантов теоремы Гаусса. «Появляющиеся» и «исчезающие» силовые линии — это, конечно, тоже кустарщина. В математической теории векторных полей эта кустарщина заменяется точным понятием — так называемой дивергенцией $\operatorname{div}\mathbf{E}$ векторного поля $\mathbf{E}$. Дивергенция — это число, которое как бы измеряет, в какой степени возле данной точки A «возникают» или «исчезают» силовые линии. В каждой точке оно своё, так что векторному полю $\mathbf{E}(A)$ сопоставляется скалярное поле $\operatorname{div}\mathbf{E}(A)$. А если говорить в терминах гидродинамической аналогии, рассматривая $\mathbf{E}$ как $\rho\mathbf{v}$ для некоторого воображаемого течения жидкости или газа, то $\operatorname{div}\rho\mathbf{v}$ — это как бы количество жидкости, которое добавляется или исчезает из-за того, что местами имеются какие-то «источники» или «стоки» (рассредоточенные по некоторым областям). Это физически нереально, но для течения газа вполне реальна дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{v}$ — она измеряет скорость изменения объёма частицы газа, проходящей через данную точку. Имеется простая формула, позволяющая вычислить дивергенцию с помощью декартовых координат x, y, z. Обозначим координаты вектора $\mathbf{E}$ через E_x, E_y, E_z; тогда[15]

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{9}$$

С дивергенцией связана следующая теорема М. В. Остроградского (1801—1862)[16]. Пусть Σ — замкнутая поверхность, которая вместе с огра-

[15]Когда речь идёт о функциях нескольких переменных (как оно и есть в данном случае: вектор $\mathbf{E}$ и его координаты зависят от x, y, z), то производные по этим переменным называют «частными производными» и обозначают с помощью «круглого» знака ∂ вместо d. Иными словами, $\partial E_x/\partial x$ — это производная $dE_x(x, y, z)/dx$, вычисляемая при постоянных y, z.

[16]Её связывают также с именем Гаусса, но, согласно «Математической энциклопедии», Гаусс опубликовал задолго до Остроградского только частный случай. Теорема же, связываемая с именем Гаусса в этой книжке, бесспорно принадлежит ему, как и её первые применения в теории электромагнитного поля. Будь она опубликована раньше, она могла бы стимулировать работу Остроградского, но на самом деле последний уже получил свою теорему к моменту публикации теоремы Гаусса, всего на год опередившей публикацию Остроградского. Я не знаю, исходил ли он, как Гаусс, из задач теории поля или имел в виду другие приложения (позднее он использовал свою теорему, вернее, её многомерный вариант, в вариационном исчислении).

ничиваемой ею областью целиком содержится в области, где задано векторное поле $\mathbf{E}$. В качестве «указателя положительного направления при пересечении этой поверхности» выберем поле единичных нормалей, направленных наружу. Тогда поток поля $\mathbf{E}$ через Σ равен интегралу от $\operatorname{div}\mathbf{E}$ по области, ограничиваемой поверхностью Σ. В частности, если Σ состоит из двух концентрических сфер Σ_1 и Σ_2 радиусов $r_1 < r_2$ с центром O и если внутри Σ_1 распределена некоторая масса M, создающая поле тяготения $\mathbf{E}$, а больше никаких масс нет, то ограничиваемая поверхностью Σ область V — это зона между двумя сферами; она лежит в области определения поля $\mathbf{E}$, и там $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Поэтому поток поля $\mathbf{E}$ через Σ равен 0. А он слагается из потоков через Σ_1 и Σ_2, причём на Σ_1 направление наружу от V — это направление внутрь Σ_1, а на Σ_2 это направление наружу Σ_2, так что теперешний поток поля $\mathbf{E}$ через Σ_2 отличается знаком от рассматривавшегося ранее (тогда соответствующая нормаль направлялась внутрь сферы). Итак, поток поля $\mathbf{E}$ внутрь сферы Σ один и тот же для всех достаточно больших сфер. А когда радиус сферы Σ достаточно велик, то на ней $\mathbf{E}(A)$ близко к $-(fM/r^2)\overrightarrow{AO}/|AO|$, так что поток близок к $4\pi fM$. При больших r поток будет сколь угодно мало отличаться от $4\pi fM$; так как он не зависит от r, он равен $4\pi fM$; и по той же причине он равен $4\pi fM$ для любой сферы, заключающей внутри себя всю массу M.

Вот и всё. Но здесь мы использовали сведения, входящие в учебную программу второго курса. Тем, кто от этого далёк, это рассуждение, боюсь, скажет только то, что помимо умных дядей Ньютона и Гаусса был ещё умный дядя Остроградский, а предыдущее рассуждение (длинное, но наглядное) скажет, я надеюсь, несколько больше.

Приложение VIII. Послесловие для знатоков

Часть 1. О дифференцировании у Ньютона и Лейбница

В списке литературы в конце этой книжки указаны два сборника статей, посвящённые памяти Ньютона [31], [45]. Статьи, написанные соответственно Н. Н. Лузиным (1883—1950) и А. Н. Колмогоровым (1903—1987), посвящены научной методологии математических работ Ньютона. Настоящая часть 1 отчасти дополняет эти статьи, при этом кое-что из них воспроизводится (но, конечно, я не собираюсь пересказывать их целиком).

Известно, что в течение длительного времени дифференциальное и интегральное исчисления оставляли желать лучшего по части точности основных понятий — удовлетворительные определения таковых отсутствовали. Естественно, при этом не было строгих доказательств ряда утверждений, а иногда и формулировок или точных формулировок утверждений. Наведение порядка в этом деле является заслугой в первую очередь О. Коши (1789—1857) (в том, что касалось степенных рядов, заметную роль сыграли также К. Гаусс и Н. Абель (1802—1829))[1]. Критическая деятельность Б. Больцано (1781—1848), к сожалению, оставалась в то время малоизвестной. Завершение критической перестройки связывают с именем К. Вейерштрасса (1816—1897), причём в отношении специального (но важного с этой точки зрения) вопроса о построении системы действительных чисел надо упомянуть ещё Р. Дедекинда (1831—1916), Г. Кантора (1845—1918) и Ш. Мерэ (1835—1911), о котором я ничего не знаю сверх того, что он предложил то же построение, что и Кантор. И вот, когда, наконец, разобрались с действительными числами, оказалось, что вполне удовлетворительная трактовка таковых была дана Евдоксом в его «теории отношений». (Но Платон запретил называть отношения числами, а может быть, не Платон, а сами математики того времени так думали? В конце концов, мы тоже не возражаем, что $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$; но тогда нельзя не поставить им в вину, что они, называя действительные числа «отношениями» (не всё ли равно, как называть?), не развили как следует элементарной алгебры этих объектов.) И Евдокс же разработал «метод исчерпывания», в какой-то степени предвосхищавший некоторые стороны интегрального исчисления (а Архимед дал замечательные образцы использования этого метода).

«Теорию отношений» перестали понимать, похоже, ещё до конца античности. О «методе исчерпывания» помнили дольше. В средние века

[1] До некоторой степени кое о чём (о роли пределов) в XVIII в. правильно говорил Даламбер, однако в целом «навести порядок» ему не удалось.

время от времени появлялись сочинения, выдержанные в стиле этого метода (правда, чаще это была неуклюжая имитация с фактическими ошибками). Но интегральное исчисление без дифференциального неизбежно оставалось набором изолированных примеров, общность которых если и осознавалась, то в лучшем случае на уровне «родовых идей и понятий», а не на уровне точных математических формулировок.

Построение дифференциального исчисления у Ньютона и Лейбница различалось. Для Ньютона основным исходным понятием была производная, а для Лейбница — дифференциал (хотя оба они знали и о другом понятии). Производная проще: функции $f(t)$ сопоставляется некая новая функция $\dot{f}(t)$. При фиксированном значении t скорость (производная) $\dot{f}(t)$ — это некоторое число. Что такое число, все знают; вопрос в том, какое именно число есть $\dot{f}(t)$; ответ, данный Ньютоном, хотя и не является вполне удовлетворительным, всё же для начала приемлем. Лейбниц же сопоставляет функции $f(t)$ не однотипный с нею объект, а нечто новое — дифференциал. При фиксированном t функции $f(t)$ сопоставляется не число, а (при обычной трактовке) линейная функция от приращения $h = \Delta t$ аргумента функции f, равная $\dot{f}(t)h$, причём в обозначении $df(t)$ во времена Лейбница (да и много позднее) даже и не указывали, что этот дифференциал есть функция от h; это теперь стали при случае писать $df(t, h)$. Считая же t переменным, получаем функцию двух переменных. Однако Лейбниц говорил иначе: $df(t)$ — «бесконечно малая величина». Теперь этому тоже умеют придавать точный смысл, добавляя к обычной числовой прямой $\mathbb{R}$ новые элементы (что делается в нестандартном анализе А. Робинсона (1918—1974)). Это технически намного сложнее (потому что надо добавить сразу не только дифференциалы функций, но и много чего другого, хотя бы произведения и отношения тех же дифференциалов и дифференциалы высших порядков, а на самом деле гораздо больше), но некоторые считают, что в конечном счёте получается проще. Но уж Лейбниц-то никак не мог этого проделать! Вот и получается, что в трактовке Лейбница основной новый объект — это вообще неизвестно что.

Хотя оба подхода — с производными и дифференциалами — в принципиальном отношении эквивалентны и хотя на первых порах производные выглядят проще, однако в конечном счёте работать с дифференциалами нередко бывает удобнее, особенно когда речь идёт о функциях нескольких переменных[2]. Поэтому ещё при жизни Ньютона в континен-

[2] Вероятно, в этом отношении история моего обучения довольно типична. Я, конечно, одновременно познакомился и с производными, и с дифференциалами, но довольно долго производные были мне «ближе». Только позднее, когда я уже делал первые шаги в самостоятельной научной работе, я «сжился» с дифференциалами.

тальной Европе начал утверждаться подход Лейбница, несмотря на то, что это было «пойди туда не знаю куда». А ведь Ньютон представлял себе, что такое дифференциал в нашем смысле — главная линейная часть приращения функции. (Ещё бы! Он, оказывается, знал и о «главной нелинейной» части до n-го порядка, т. е. о формуле Тейлора.) Однако он предпочитал исходить из производной. Если бы его точка зрения утвердилась, то возможно, что строгая трактовка дифференциального исчисления не заставила бы долго ждать. Ведь вполне мог бы сложиться такой подход: сперва производные, затем дифференциал (в случае нескольких переменных — линейная комбинация производных, умноженных на приращения), его интерпретация как главной линейной части приращения, и вот уже мы без всякой мистики имеем практически всё, чем был силён Лейбниц, только поначалу это делалось бы малость неточно, но и необходимые уточнения последовали бы очень скоро, ведь Ньютон был к ним близок (см. ниже). Это могло бы произойти, если бы английская математика после Ньютона оказалась сильнее. Но почему-то она надолго почти замерла в своём развитии. (Самым выдающимся её представителем был К. Маклорен (1698—1746), но, при всём уважении к Маклорену, если сравнивать его с его континентальными современниками, он окажется где-то возле пятого места.) И указанная возможность не реализовалась.

Как же можно работать с «пойди туда — не знаю куда»? Думаю, что в самом начале были найдены (прежде всего самим Лейбницем, но также и его последователями, особенно И. Бернулли) достаточно чёткие формальные правила действий с дифференциалами, и ими можно было пользоваться, принимая их, так сказать, за аксиомы. («Найдены» могло означать и «угаданы» на основании аналогии, которая иногда подводила. Одно время Лейбниц думал, что $d(fg) = df \cdot dg$, по аналогии с формулой $d(f + g) = df + dg$! Но потом он, конечно, нашёл правильную формулу, которая теперь называется «формулой Лейбница»[3].) Так что в какой-то степени тогдашнее дифференциальное исчисление было аксиоматическим[4]. Конечно, аксиоматика не была отточена настолько, чтобы не надо было обращаться к интуиции или к каким-то содержательным соображениям, не обязательно вполне обоснованным. Существенное отличие от современных аксиоматических исследований

[3]Мне кажется, что говорить о развёртывании дифференциального исчисления именно как некоего исчисления, т. е. как теории с обширным запасом формул и правил действия, можно только с того момента, как появляется формула Лейбница. С этого момента возможности использования дифференциального исчисления увеличиваются во много раз.

[4]В [7] та же мысль выражена другими словами.

состояло в отсутствии доказательства непротиворечивости. Лейбниц и его последователи были уверены, что изучают какие-то реально существующие объекты; откуда же тут взяться противоречию? Оно может появиться только из-за нашей ошибки. Непротиворечивость обеспечивалась эмпирически: если встречалось какое-то противоречие, искали его причину и уточняли «аксиоматику». Как известно, непротиворечивость обычно устанавливается путём предъявления интерпретации (модели). До нестандартного анализа тогда было далеко, но главная линейная часть приращения, которая фактически уже была у Ньютона, вполне подошла бы. В общем-то о ней и в школе Лейбница не могли не знать[5], но почему-то не отождествляли её с дифференциалом. Почему — психологическая загадка. Видимо, завораживала прелесть (неосознанного, но ощущавшегося) неархимедова расширения пространства $\mathbb{R}$, а тривиальная интерпретация одного только дифференциала не устраивала... Даёшь нестандартный анализ в полном объёме! Только когда надоело ждать пришествия А. Робинсона со всеми его предтечами (см. историю развития математической логики), согласились на ме́ньшее, тем более что этого ме́ньшего (всегда, почти всегда или часто?) хватает.

Ньютон определял производную df/dt так же, как это сделано в § 4, — как предел разностного отношения $\Delta f/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Поэтому спрашивается: как Ньютон понимал предел?

Колмогоров указывает, что «понятие предела является для Ньютона одним из исходных понятий, не подлежащих в силу их примитивного характера и интуитивной ясности прямому определению. Однако во всех своих утверждениях о свойствах пределов и способах их нахождения Ньютон вполне точен и ни в чём не расходится с нашими современными представлениями». Такое понятие можно только пояснять на примерах, что Ньютон и делал.

В вопросе о точности ньютоновских понятий Лузин идёт несколько дальше. По его мнению, Ньютон имел дело исключительно с кусочно монотонными функциями, а для такой функции $f(x)$, заданной на интервале $(a,\, b)$, предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ равен верхней или нижней грани функции f на подходящем маленьком интервале $(a,\, a+\delta)$. Лузин говорит, что «*такое* предельное значение в самом деле *видно на глаз*». Получается, что у Ньютона вообще всё строго, только малость недоработаны формулировки. По-моему, здесь Лузин увлёкся, к чему он вообще бывал склонен. Класс кусочно монотонных функций не замкнут относительно простейших операций, начиная со сложения, поэтому он не пригоден

[5]Тот же И. Бернулли открыл соотношение, эквивалентное формуле Тейлора. Правда, оно было именно эквивалентно последней, а всё-таки не совпадало с ней.

для того, чтобы класть его в основу анализа, и недоработочка получается весьма досадной, хотя на конкретных примерах у Ньютона это не сказывается.

Повторяю, что выше я не пересказывал статьи Колмогорова и Лузина, а лишь кое-что отметил и прокомментировал. Хочу добавить ещё одно замечание: одно из пояснений Ньютона, имеющее общий характер и обсуждаемое у Колмогорова, фактически почти эквивалентно одному из вариантов современного определения предела $\lim\limits_{t\to a} f(t)$. Этот вариант гласит[6]: $\lim\limits_{t\to a} f(t) = b$, если функция, равная $f(t)$ при $t \neq a$ и b при $t = a$, непрерывна в точке a. По поводу соответствующего пояснения Ньютона (которое я не буду воспроизводить текстуально) Колмогоров указывает, что оно совершенно правильно. Мне кажется, можно сказать сильнее, как я и сделал, — пояснение почти эквивалентно современному определению предела[7]. У Ньютона нет определения понятия непрерывности, поэтому я и говорю, что определение Ньютона «почти эквивалентно» современному определению, а не просто «эквивалентно». Но несомненно, что практически не только Ньютон, но и люди куда меньшего калибра прекрасно отличали непрерывные функции от разрывных. Пусть понятие предела будет первичным, но если сказано (неизвестно на каком основании), что это первичное понятие эквивалентно такому-то «вторичному» понятию, определённому так же, как это делаем мы, то ясно, что расхождения с современными представлениями о свойствах пределов и способах их нахождения и не должно быть.

Вероятно, если бы английская математическая школа после Ньютона оказалась более сильной, максимум через одно-два поколения ньютоновское пояснение превратилось бы в определение, которому предшествовало бы корректное определение непрерывности, и обоснование анализа состоялось бы на 100 лет раньше.

В начале XVIII в. возник приоритетный спор между Ньютоном и Лейбницем (с активным участием других английских и континентальных математиков), в котором обе стороны проявили себя не самым лучшим образом и о котором можно прочитать в литературе. Этот спор, равно как и запоздалый характер публикаций Ньютона по анализу (см. в [48]), тоже не способствовал популярности его точки зрения.

---

[6] В современных терминах.

[7] И хотя обычно в основу изложения берётся другое определение, данный вариант тоже вполне пригоден в этом отношении. Он и принят за основу в известном учебнике Э. Ландау «Введение в дифференциальное и интегральное исчисление». М.: ИЛ, 1948, отличающемся, как известно, полным соблюдений формальных требований строгости (включая надлежащую полноту приводимого и используемого набора утверждений) и вместе с тем краткостью.

Часть 2. Об одной мнимой неточности у Ньютона и о различных выводах законов Кеплера

Один из параграфов книги [7] озаглавлен: «Доказал ли Ньютон эллиптичность орбит?» Параграф является откликом на обсуждение данного вопроса в статье Р. Вейнстока [14]. В [14] указано, что Ньютон нашёл определённые решения дифференциальных уравнений задачи Кеплера, которые действительно описывают движения по эллиптическим орбитам, или, более общим образом, по коническим сечениям, но не доказал, что других решений нет. Арнольд разъясняет, что среди ньютоновских решений имеются решения, отвечающие любым наперёд заданным начальным условиям (положению и скорости планеты в начальный момент времени), и напоминает, что по известной в теории дифференциальных уравнений теореме существования и единственности решение с данным начальным условием единственно, так что если Ньютон предъявил некое решение, то никакого другого решения не может быть.

Правда, у Ньютона этой теоремы существования и единственности решения не было, но, во-первых, он считал единственность физически очевидной, а во-вторых, для решений, являющихся аналитическими функциями времени, единственность получается столь просто, что и говорить о ней незачем. Во времена же Ньютона все функции были аналитическими[8].

Арнольд добавляет [7], что если можно предъявить семейство решений $x(t, a)$ с произвольными начальными значениями a[9], причём x гладко зависит от (t, a), а a в свою очередь может быть выражено как гладкая функция от (x, t), то единственность тоже обеспечена: нет никаких других решений, кроме решений из этого семейства. В этом случае не надо заранее подразумевать решения аналитическими функциями времени. (Доказательство сводится к использованию a как новой неизвестной вместо x. В этих терминах уравнение (или система таковых) принимает вид $da/dt = 0$ и, конечно, не имеет решений, кроме решений $a = \mathrm{const}$.) Ньютон же фактически именно такое семейство решений и предъявил. Арнольд добавляет: «Можно, конечно, возразить, что Ньютон не знал этой теоремы. Действительно, он её не формулировал в таком виде, как это сейчас сделали бы мы. Но по существу он её наверняка знал, так же как и многие другие приложения теории

[8] Вне своих особых точек, которые Ньютон умел распознавать. (Я уже говорил об этом в § 4.)

[9] Отметим, что x и a могут быть «векторами» — наборами чисел, так что речь может идти не об одном уравнении, а о системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

возмущений». Последняя упомянута здесь потому, что в ней, по существу, как раз и переходят к некоторым новым переменным вроде a, в терминах которых уравнения если и не сводятся к $da/dt=0$ (это, так сказать, идеал), то во всяком случае упрощаются. А Ньютон, как говорилось в приложении VI, — основатель теории возмущений. (Впрочем, мне кажется, что можно всё-таки сомневаться, в какой степени Ньютон осознавал общность этого приёма — перехода к новым переменным вроде a. Догадался ли бы он использовать его не для учёта возмущений, а по поводу единственности? Вероятно, догадался бы, если бы очень захотел установить последнюю, но вот захотел бы?)

Если читателю сказанное не совсем очевидно, то советую прочитать подробнее у Арнольда — мне к этому нечего добавить, а воспроизводить то, что написано в достаточно доступной брошюре, незачем. Я вполне разделяю не только его научное суждение по этому поводу, но и его ироническое отношение к дискуссии.

Арнольд указывает, что критическое замечание в адрес Ньютона раньше высказал А. Уинтнер (1903—1958) в своей известной книге [53]. Действительно, там сказано (в примечании в конце книги к § 241):

«Было бы резонно предположить, что Ньютон вывел (3_2) (уравнение эллипса. — Д. А.) как следствие (2) (дифференциальное уравнение задачи Кеплера, упоминаемое ниже как (2_1), и два закона сохранения — энергии и момента импульса. — Д. А.). Однако целый ряд важных страниц в „Началах“ касаются вывода (2_1) из кеплеровых законов для кругового[10] планетного движения... Первым, кто доказал, что все траектории при $U(r)=1/r$ являются коническими сечениями, был, по-видимому, Иван Бернулли».

Но Уинтнер, не в пример Вейнстоку, воздержался от «разоблачения вековой легенды». Что его удержало — пиетет к Ньютону, тогда ещё не выветрившийся, или то, что он не только знал теорему единственности, но и в духе Ньютона готов был принять её как некую самоочевидную истину? Так или иначе, но он только сказал, что у Ньютона нет такого-то рассуждения, а не утверждал, будто у Ньютона есть пробел. Но всё же он сказал: «Первым, кто доказал...», а точнее было бы сказать: «Первым, кто непосредственно доказал...».

В «Началах» имеется прямая ссылка на единственность решения с заданными начальными условиями. Это следствие 1 из предложения XIII первой книги:

[10] По-видимому, упоминание о круговом движении — какая-то небрежность: что для него можно выводить на «целом ряде страниц»? Другое дело — для эллиптического движения, которым действительно и занимался Ньютон.

«Из последних трёх предложений (в них речь идёт о движении по эллипсу, гиперболе и параболе, удовлетворяющем II закону Кеплера. — Д. А.) следует, что если какое-нибудь тело P выходит по направлению прямой PR с какой-либо скоростью и находится под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной квадратам расстояний до центра S, то это тело будет двигаться по коническому сечению, коего фокус лежит в центре сил, и наоборот; ибо при заданных фокусе, точке касания и положении касательной можно построить лишь одно коническое сечение, имеющее в этой точке заданную кривизну. Кривизна же найдётся по заданной скорости и центростремительной силе: под действием той же центростремительной силы и при той же скорости не могут быть описываемы две различные траектории, касающиеся друг друга».

Вейнсток отмечает, что часть, начинающаяся со слова «ибо», была добавлена во втором издании «Начал»[11]. Вторая половина последней добавленной фразы — это как раз утверждение о единственности, никак не мотивированное. По-видимому, Ньютон воспринимал его прежде всего как физический принцип, но, как говорилось, он отлично знал и то, что при решении дифференциальных уравнений с помощью рядов единственность получается настолько очевидным образом, что даже и говорить об этом кажется излишним. Но поскольку в «Началах» упоминаний о решении дифференциальных уравнений с помощью рядов нет, нет и ссылки на такую мотивировку единственности.

Между прочим, в первой книге «Начал» есть одно место, откуда при желании можно было бы и без всяких рядов извлечь утверждение о единственности в нужном нам сейчас специальном случае. Это раздел VIII — «О нахождении орбит, по которым обращаются тела под действием каких угодно центростремительных сил» (последние на самом деле подразумеваются зависящими только от r). В современных терминах его содержание сводится к следующему. Обозначая через $U(r)$ потенциальную энергию, имеем законы сохранения энергии[12] и момента

[11] К тому времени И. Бернулли указал, что в «Началах» содержится решение обратной задачи Кеплера, а не прямой. Добавленные полторы фразы давали короткий ответ на это замечание. Видимо, для такого математика, как И. Бернулли, этого ответа оказалось достаточно — насколько известно, он больше не утверждал, будто прямая задача в «Началах» не решена (и, значит, впервые решил её сам Бернулли, о его решении будет вкратце сказано далее).

[12] Применительно к данной задаче он действительно доказан у Ньютона (в той же книге, в разделе под двойным названием: «Предложение XL. Теорема XIII»), хотя, как обычно в «Началах», выражен в геометрической формулировке, причём в данном случае она не только громоздка, но (и это хуже) не даёт оснований думать, что речь идёт о сохранении какой-то величины, имеющей важное физическое значение.

импульса

$$\frac{mv^2}{2} + U(r) = E = \mathrm{const}, \qquad r^2\dot{\varphi} = M,$$

а так как

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{M^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2},$$

мы получаем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{M}\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}},$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2(E - U(r))/m - M^2/r^2}}, \tag{10}$$

где φ_0, r_0 — значения φ и r в начальный момент времени t_0. Далее скажу словами Вейнстока:

«Самое странное заключается в том, что в действительности „Начала“ содержат общий метод определения орбиты тела, движущегося под действием центральной силы, но в них нигде не упоминается о том, что Ньютон когда-либо применял этот метод к наиболее важному случаю — силе, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния... В следствии 3 к предложению XLI Ньютон упоминает о применении своего метода к силе, направленной к центру и *обратно пропорциональной кубу расстояния от него*, и приводит результат без каких-либо вычислений. Но о применении общего метода к определению орбит при движении под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, нигде не говорится ни в „Началах“, ни в других работах Ньютона... Моя собственная догадка, не подкреплённая никакими сколько-нибудь весомыми аргументами, состоит в том, что Ньютон не сумел вычислить интеграл, возникающий в случае обратных квадратов». (Этот интеграл при $U(r) = -km/r$ приводится путём замены переменной $x = 1/(\alpha r + \beta)$ с подходящими α и β к «табличному интегралу» — интегральному выражению для арксинуса. В наши дни это должен уметь проделать студент, но в то время это было совсем не просто. Стоит заметить, что тогда ещё не было обозначений arcsin, arccos для обратных тригонометрических функций. Эти обозначения ввёл Эйлер, и, похоже, введение специальных обозначений отражало то, что он причислил соответствующие функции к тому стандартному «джентельменскому набору» функций, которые мы теперь называем «элементарными», а ранее они в такой роли не воспринимались.)

Однако Чандрасекар указывает [57], что в «Началах» по другому поводу (притяжение сплюснутой планетой точки, находящейся на её оси, — следствие III предложения XCI первой книги «Начал») приведён результат вычисления точно такого же интеграла. Видимо, изложение хода этого вычисления в словесно-геометрическом стиле «Начал» оказалось столь громоздким, что Ньютон препочёл не загромождать им разделы о задаче Кеплера, коль скоро он мог предложить другое решение последней. (Другое дело — указанная задача о притяжении: она не вызывает такого интереса, и поэтому в ней можно просто привести ответ, не объясняя, как он получен.)

Главное же для нас сейчас в том, что формула (10) однозначно определяет $r(\varphi)$ при заданных начальном положении планеты r_0, φ_0 и её начальной скорости v_0 (чем однозначно определяются M и E). Для такого вывода не надо иметь явной формулы для этого интеграла. Значит, для центрального поля единственность доказана[13]. Ньютон не отмечает этого специально, ибо он был уверен, что единственность имеет место всегда.

В общем, Ньютона можно было бы упрекнуть за недостаточную чёткость формулировок. Но ведь с не меньшим основанием в том же можно было бы обвинить любого аналитика до Коши, ибо он не мог бы дать удовлетворительного определения используемых им понятий производной и интеграла. По сравнению с этим грехом (в котором Ньютон повинен менее других) некоторая нечёткость формулировок применительно к физически очевидному утверждению — мелочь, которая вообще не заслуживала бы упоминания, не относись она к Ньютону.

Выступление Вейнстока вызвало дискуссию, информация о которой содержится в его же статье [15]. Он объективно констатирует, что его точка зрения не получила поддержки, но несмотря на это остаётся при своём мнении («не могу поступиться принципами»).

Я думаю, что мы должны быть благодарны Уинтнеру и Вейнстоку за их исторические замечания, особенно учитывая, что в дискуссии, вызванной [14], освещались различные исторические обстоятельства, которые до того (по крайней мере, для более или менее широких кругов) оставались в тени. Но Вейнсток, правильно указывая, что «Начала» трудно читать, напрасно делает вывод, что их никто не изучал сколько-либо серьёзно, оттого и остался незамеченным существенный пробел. Я говорил в приложении VI, что кое-кто изучал «Начала» (и отмечал

[13] Таким образом, совершенно полный вывод законов Кеплера из законов механики в духе «Начал» слагается из двух разнородных частей: решение обратной задачи Кеплера доставляет нам решения соответствующих дифференциальных уравнений с произвольными начальными данными; на основании редукции к интегралу (вычисление которого позволило бы обойтись без первой части) обосновывается единственность решения.

ошибки). Просто в основном это были лица, занимавшиеся механикой, которые не просто знали, какие данные однозначно определяют эволюцию системы, но, так сказать, «воспринимали эту истину своим нутром»[14]. И. Бернулли, считавший, что у Ньютона нет доказательства «Ньютон $\Longrightarrow$ Кеплер», составлял в этом отношении исключение — он был более «чистым» математиком. Конечно, он при случае занимался задачами механики и, разумеется, понимал, что решение однозначно определяется начальными данными, но для него это, видимо, не было самоочевидной истиной. Впрочем, ему хотелось подчеркнуть ценность своего доказательства. (Точнее, двух предложенных им доказательств, которые и независимо от этого имеют достоинства. Первое из них есть, по существу, перефразировка VIII раздела первой книги «Начал» (ещё не столь аналитическая и потому не столь простая, как приведённая выше) вместе с вычислением соответствующего интеграла; студентам по сей день чаще всего сообщают именно это доказательство[15]. Во втором доказательстве вопрос иным способом (с помощью упоминаемой в конце следующего пункта формулы Ньютона, переоткрытой Бернулли) сводится к тому же интегралу.)

Теперь я скажу несколько слов о других доказательствах законов Кеплера.

У Арнольда имеется «Добавление 1. Доказательство эллиптичности орбит», где приведено доказательство, предложенное в 1889 г. Э. Гурса [26][16], а позднее переоткрытое в 1906 г. Т. Леви-Чивита (1873—1941) (см. [39]) (неоднократно использовавшим затем замену переменных, на которой основано это доказательство) и в 1911 г. К. Болином. В нём

[14]Упомянутые выше корифеи небесной механики жили в то время, когда общей теоремы существования и единственности ещё не было (первую теорему такого типа доказал Коши), поэтому для них это было скорее физическим принципом. Впрочем, повторяю, что метод получения локальных решений в аналитическом случае с помощью рядов с неопределёнными коэффициентами восходит к Ньютону, и тот факт, что эти коэффициенты при заданных начальных условиях определяются однозначно, автоматически гарантирует единственность решения в классе аналитических функций. Заслуга Коши состоит в том, что он впервые доказал сходимость этих рядов в общем случае; это даёт теорему существования. После этого и стали формулировать теорему существования и единственности; отдельно же о единственности до того, может быть, и не говорили за тривиальностью.

[15]По иронии судьбы, многочисленные результаты и методы И. Бернулли уже давно вошли в учебники без упоминания об их авторе, который был весьма чувствителен к вопросу о приоритете. В этом отношении его старшему брату Якову и сыну Даниилу повезло больше. Но можно посмотреть на дело и с такой точки зрения: результаты и методы И. Бернулли так точно ложились в «фарватер» развивавшегося математического анализа (в немалой степени способствуя формированию этого «фарватера»), что они как бы теряли индивидуальность.

[16]Указанием на работу Гурса я обязан А. Альбуйи.

используется дифференцирование и немножко комплексных чисел, так что оно чуть менее элементарно, чем рассуждения из § 6, но тоже очень просто. Читателю, подготовка которого чуть выше той, которая нужна для чтения настоящей книги, поучительно будет ознакомиться с этим доказательством, основанном на другой идее (которая, в отличие от наших элементарных рассуждений, имеет и другие применения).

Интересно ещё одно короткое доказательство, использующее так называемый вектор Рунге—Ленца **A** (см. ниже). Рунге и Ленц никогда не претендовали на авторство; фактически вектор **A** был известен и тогда, когда в математике формально ещё не было понятия вектора. Об истории см. [20], [21], [5]. Она начинается с работы Я. Германа 1710 г., первоначално оформленной как письмо к И. Бернулли, который и опубликовал её вместе со своими замечаниями[17]. Метод Германа, впоследствии переоткрытый в более изящной форме Ж. Лагранжем (1736—1813) [38][18] и позднее Лапласом (которому он и приписан в [53], где сказано также, что этот метод переоткрыл ещё К. Якоби (1804—51)), фактически приводит к вектору **A** (у самого Германа — с точностью до постоянного множителя, что, конечно, несущественно), а именно, компоненты вектора **A** появляются как некие константы, от которых зависят решения задачи. В трудах по небесной механике вектор **A** часто фигурирует под названием «вектор Лапласа».

Здесь надо сделать одно терминологическое замечание. С математической точки зрения мы почти всё время говорим о решениях некоторого дифференциального уравнения. По историческим причинам вместо «процесса (или способа) решения дифференциального уравнения» часто говорят об «интегрировании» последнего. Причина такова: чтобы решить простейшее дифференциальное уравнение $dx/dt = f(t)$, нужно прибегнуть к самому обычному интегрированию функции f; а другие дифференциальные уравнения можно считать какими-то обобщениями

---

[17] По словам Германа, на него оказало стимулирующее влияние известие, что И. Бернулли каким-то образом решил задачу Кеплера (при этом самого решения Бернулли Герман ещё не знал).

[18] Я обязан указанием на эту работу, опубликованную в 1781 г., тоже А. Альбуйи. Она была забыта, в отличие от более поздней работы Лапласа. Возможно, это произошло потому, что Лагранж, писавший в данном случае не учебник или систематический трактат, а научную статью по теории возмущений, задачи Кеплера специально не обсуждал. Но он фактически оперировал с координатами вектора **A** в произвольной декартовой системе координат с началом в S. (В задаче Кеплера координаты векторов **M**, **A** могут играть роль постоянных, от которых зависят решения дифференциального уравнения, описывающего эту задачу. В соответствии с общей идеологией теории возмущений, Лагранж использовал те же самые компоненты векторов **M**, **A** как новые переменные в возмущённой задаче.)

Альбуйи упоминает ещё о Я. Риккати (1676—1754), работы которого я не видел.

или модификациями этого простейшего уравнения; раз уж для него мы используем термин «интегрирование» как синоним «решения», будем пользоваться такой же терминологией и в общем случае. Ход мысли здесь, конечно, довольно поверхностный, но, тем не менее, соответствующая терминология стала достаточно общеупотребительной и привела к тому, что константы, от которых зависят решения, называют «константами интегрирования». Если данное решение имеет такие-то константы интегрирования, то они, конечно, не меняются при изменении независимой переменной. На этом языке координаты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{M}$, равно как и энергия E, суть некие константы интегрирования для дифференциального уравнения, описывающего задачу Кеплера. Исторически они и появились как выражения для некиих величин, сохраняющихся при движении, и лишь потом было осознано, что эти величины естественно рассматривать как координаты некоторых векторов.

Что касается вектора $\mathbf{A}$, то мысль принять соответствующие константы интегрирования за координаты некоторого вектора и, главное, выразить его с помощью операций векторной алгебры через $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ принадлежит, насколько я знаю, У. Гамильтону (для него она была естественной ввиду связи $\mathbf{A}$ с $\overrightarrow{SV_0}$ из § 6, см. ниже) [18]. При всей своей простоте, она была принципиально новой[19]. Если у нас имеются две кон-

[19] Специалисты по небесной механике, несомненно, знали, какой геометрический смысл можно придать этим константам интегрирования (см. ниже), в этом смысле можно сказать, что вектор $\mathbf{A}$ был им известен ещё тогда, когда не было понятия вектора. Но о выражении $\mathbf{A}$ с помощью операций векторной алгебры через $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ до Гамильтона не могло быть речи, поскольку не было самой векторной алгебры.

Раз уж зашла речь о понимании векторной природы восходящих к Герману постоянных интегрирования, стоит сказать и о векторах момента импульса и момента силы. Они, в отличие от вектора $\mathbf{A}$ (который, как уже было сказано и как мы увидим ниже, связан с формой орбиты), не имеют такого непосредстенного геометрического смысла, но зато имеют гораздо более общий характер. Осознание векторной природы момента импульса пришло вслед за осознанием такой же природы момента силы, а последнее сперва произошло в статике, где моменты сил играют важную роль. Вначале были известны только моменты сил относительно осей; эти моменты проявляются уже в условиях равновесия рычага: момент силы, действующей на одно плечо рычага, равен моменту силы, действующей на другое плечо. Когда сила F перпендикулярна к плечам рычага, то можно и усомниться, стоит ли вводить специальное название для произведения длины плеча L на силу, коль скоро классическая формулировка «отношение сил должно быть обратно пропорционально отношению длин плеч» не оставляет желать ничего лучшего. Но когда она направлена наклонно к плечу, то в условии равновесия это произведение надо умножить ещё на синус угла α между плечом и силой, и тут уже ощущается, что произведение $FL\sin\alpha$ — это нечто новое и немаловажное. (Условие равновесия в подобного рода случае знал уже Леонардо да Винчи (1452—1519), который выражал его примерно такими словами: наклонно направленную силу представлять себе как бы действующей в воображаемом рычаге, плечом которого служит перпендикуляр, опущенный из точки опоры станты, то, конечно, можно взять вектор, координаты которого в данной координатной системе суть эти константы, но что это даст? Возьмите хотя бы вектор, координаты которого в обычно используемой нами системе суть E и M; много ли проку от такого объединения этих двух констант в один вектор? А вот при объединении в один вектор констант интегрирования, восходящих к Герману, получается вектор, который, как было сказано, можно выразить через $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ с помощью операций векторной алгебры (и который, стало быть, может быть введён независимо от каких-либо специальных координат).

Собственно, Гамильтон не объединил две уже известные константы в вектор $\mathbf{A}$, а сразу получил этот вектор. При этом он, естественно, пользовался не векторной алгеброй, а алгеброй кватернионов, им же и открытой. Если можно так выразиться, у Гамильтона внутри исчисления кватернионов вызревало векторное исчисление (конечно, у последнего были и другие истоки). «Чисто векторную» формулу для $\mathbf{A}$ первым написал, по-видимому, Дж. У. Гиббс (1839—1903), который был прежде всего физиком, внесшим очень большой вклад в термодинамику и статистическую физику, но который проявил себя и как математик, сыгравший большую роль в выделении векторного исчисления в самостоятельную дисциплину и активно содействовавший его применениям в других разделах математики.

К. Т. Д. Рунге (1856—1927) просто написал один из первых (после Гиббса) учебников по векторному исчислению, где тоже остановился на векторе $\mathbf{A}$. Лица, узнавшие об $\mathbf{A}$ из его книги, видимо, сочли, что раз по поводу $\mathbf{A}$ Рунге не даёт литературных ссылок, то, значит, он сам и придумал этот вектор. По этой логике, Рунге придумал также и формулу $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$! (В учебнике вообще невозможно давать сколько-либо подробные ссылки, это получился бы не учебник, а исторический труд.) Ленц использовал вектор $\mathbf{A}$ (по поводу которого он сослался на Рунге) в вычислениях примерно такого же характера, какие были обычными в небесной механике со времён Лагранжа и тем более Лапласа, но он рассматривал другой физический объект — квазиклассическую модель атома по Бору (и, скорее всего, не знал о математически близкой деятельности более чем вековой давности в работах по небесной механике). Физики (прежде всего, по-видимому, В. Паули (1900—1958), указавший

рычага на линию действия силы.) «Объединение» же моментов силы относительно трёх координатных осей в один вектор и выяснение его значения для статики — заслуга Л. Пуансо (1777—1859). В то время ещё не было векторной алгебры, так что Пуансо, не имея в своём распоряжении векторного произведения, формально не мог им пользоваться, однако он прекрасно знал, какова длина вектора момента и как он направлен.

и успешно использовавший аналог вектора **A** уже не в квазиклассической модели, а в настоящей квантовой механике) узнали об **A** из статьи Ленца и наивно приписали открытие и первые применения этого вектора соответственно Рунге и Ленцу.

История усложняется из-за небрежности Германа, который счёл обнаруженные им константы интегрирования равными нулю, — довольно частая студенческая ошибка, однако странная для учёного академического уровня[20]. Эту ошибку немедленно отметил и исправил И. Бернулли (собственный же его метод был совершенно иным); оказалось, что по существу она не влияет на окончательный результат. Замечание Бернулли было, конечно, существенным, но всё-таки этого, по-моему, недостаточно, чтобы упоминать Бернулли наряду с Германом и Лапласом в числе авторов соответствующего метода, как это сделано в [20], [21]. Рассуждение Германа (не столько в своём первоначальном виде, сколько в той форме, которая позднее была придана этому рассуждению) короткое и красивое; оно делает честь изобретательности его авторов, но то же самое можно сказать и так: уж больно оно искусственное. Если же взять вектор **A** «с потолка», то проверка того, что этот вектор доставляет ещё одну величину, сохраняющуюся при движении (в дополнение к энергии и моменту импульса), не составляет труда для студента I курса (она сводится к элементарному дифференцированию). А после этого движение по коническим сечениям получается сразу.

К сожалению, в известной мне русской литературе изложения этого метода нет (тогда как за рубежом он довольно популярен), хотя сам вектор можно найти. В справочных целях указываю его[21]:

$$\mathbf{A} = -m_P k\frac{\mathbf{r}}{r} + [\mathbf{v},\, \mathbf{M}],$$

[20] Собственно, Герман пользовался только одной из этих констант, и никакой ошибки у него не было бы, если бы нулём была только она. Если известно, что орбита имеет ось симметрии, то, направив по ней одну из координатных осей, можно было бы показать, что одна из констант интегрирования действительно равна нулю. Мы знаем, что орбиты суть кривые второго порядка, которые и в самом деле имеют оси симметрии, но как можно было бы убедиться в существовании осей симметрии заранее, не зная решения задачи Кеплера? При другом законе притяжения к S осей симметрии может и не быть. (Например, если бы притяжение было обратно пропорционально не r^2, а r^3, то среди орбит имелись бы логарифмические спирали, что, кстати, знал уже Ньютон.) Так что существование осей симметрии в нашем случае (случае ньютоновского притяжения) — это его специфическое свойство (в отличие от результатов § 5). Чтобы это свойство установить, надо далеко продвинуться в исследовании именно данного случая; и похоже, что продвинуться надо примерно на столько же, насколько надо для определения орбит.

[21] Должен с сожалением отметить, что среди опечаток в [5] имеется неверная формула для вектора **A**, хотя там же по ходу изложения получена правильная формула для его координат.

где $\mathbf{M}$ — вектор момента импульса[22], а квадратные скобки означают векторное произведение. (Но в литературе этот вектор может встретиться с каким-нибудь постоянным множителем и с противоположным знаком, ибо он не столь «стандартен», как фундаментальные физические величины — кинетическая энергия, импульс, момент импульса[23].) Для кеплеровского движения по коническому сечению вектор момента импульса направлен от S к перигелию (ближайшей к S точке орбиты) и длина его равна $m_P v_0 M$, т. е. (см. формулу (35)) произведению $m_P k = f m_P m_S$ на эксцентриситет e. Первое выражение для $|\mathbf{A}|$ указывает на связь с рассуждениями § 6, а второе объясняет название «вектор эксцентриситета» («excentricity vector»)[24].

Тот факт, что при движении планеты $d\mathbf{A}/dt = 0$, можно проверить, проведя вычисление непосредственно в терминах векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $d\mathbf{v}/dt = -(k/r^2)\mathbf{r}/r$, $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$ и не обращаясь ни к каким координатам. А можно использовать те же координаты, что и в § 5, и тогда постоянство вектора $\mathbf{A}$ получается на пути, близком к тому, каким мы там шли. В этих терминах вектор $\mathbf{M}$ имеет координаты $(0,\, 0,\, m_P M)$, а $\mathbf{v}$ — конечно, $(\dot{x},\, \dot{y},\, 0)$; по известной формуле для координат векторного произведения получаем, что координаты вектора $[\mathbf{v}, \mathbf{M}]$ имеют вид $(m_P M\dot{y},\, -m_P M\dot{x},\, 0)$. Далее третья координата у всех векторов равна нулю, и я о ней не говорю. Координаты вектора $\mathbf{r}/r$ суть $(\cos\varphi,\, \sin\varphi)$, поэтому координаты вектора $(1/m_P k)\mathbf{A}$ суть

$$\frac{1}{m_P k} A_x = -\cos\varphi + \frac{M}{k}\dot{y}, \quad \frac{1}{m_P k} A_y = -\sin\varphi - \frac{M}{k}\dot{x}. \tag{11}$$

[22] Он, значит, отличается от обычно используемого нами вектора момента скорости, будучи больше в m_P раз.

[23] В то же время в известных мне физических (но не астрономических!) публикациях неизменно фигурирует множитель m_P, отчего я тоже его сохранил, вопреки принятому в этой книжке обычаю опускать этот множитель.

[24] Это название я встретил у Альбуйи. Оно кажется мне более оправданным, чем встречающиеся в литературе названия «вектор Германа—Бернулли—Лапласа, Германа—Лапласа, Лапласа». У физиков возникла манера отдавать в названиях должное всем, кто внёс более или менее существенный вклад в исследование того или иного вопроса, но при этом давать сокращённое название по одним только первым буквам фамилий этих авторов. В данном случае это выглядело бы примерно так: метод ГБЛЛЯГГРЛ (причём не исключено, что ещё и Риккати вправе претендовать на добавление своего Р в это название). Это, увы, несъедобно, и даже отказ от исторически совсем уж необоснованного завершающего РЛ не очень поможет. С другой стороны, хотя у Германа не было не только вектора, но и вообще геометрической интерпретации, довольно резонным было бы название «вектор Германа», если бы он сам не лишил себя права на такое название, ошибочно объявив компоненты этого вектора равными нулю.

Но уравнение (2) можно записать в виде

$$\ddot{x} = -\frac{k}{r^2}\cos\varphi, \qquad \ddot{y} = -\frac{k}{r^2}\sin\varphi,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\cos\varphi = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi\frac{M}{r^2} = \frac{M}{k}\ddot{y},$$

$$\frac{d}{dt}\sin\varphi = \frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \cos\varphi\frac{M}{r^2} = -\frac{M}{k}\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cos\varphi - \frac{M}{k}\dot{y}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\sin\varphi + \frac{M}{k}\dot{x}\right) = 0, \tag{12}$$

что и означает постоянство координат вектора $\mathbf{A}$.

Отсюда уже сразу получаются результаты § 5 о годографе. Ввиду соотношений (11) вектор скорости $\mathbf{v}$ имеет координаты

$$\dot{x} = \frac{k}{M}\left(-\sin\varphi - \frac{A_y}{m_P k}\right) = -\frac{k}{M}\sin\varphi + c_1,$$

$$\dot{y} = \frac{k}{M}\left(\cos\varphi + \frac{A_x}{m_P k}\right) = \frac{k}{M}\cos\varphi + c_2,$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. Значит, конец V вектора $\mathbf{v}$ (отложенного от S) всё время лежит на окружности радиуса k/M, центр которой V_0 имеет координаты (c_1, c_2), причём направление вектора $\overrightarrow{V_0V}$ отвечает полярному углу $\varphi + 90°$. Именно это и получилось в § 5. А далее, как мы видели, всё уже просто.

Имеются и другие выводы законов Кеплера, но большинство прочих выводов сравнительно элементарного характера мне лично кажутся недостаточно простыми и прозрачными, а часть выводов требуют методов довольно развитой науки (и, как уже говорилось, доставляют демонстрацию этих методов на простом примере). Довольно простым, хотя и чуть более сложным, чем в § 6, является вывод, излагаемый ниже, в части 3.

Достоинством изложенного здесь метода Гамильтона, кроме простоты, является то, что он тесно связан с некоторыми другими методами (тем самым достигается известная унификация части трактовок задачи Кеплера). Это относится к содержанию следующей части, а также к указанной Ю. Мозером связи задачи Кеплера с некоторой чисто геометрической задачей: оказывается, совокупность всех движений, отвечающих какому-нибудь фиксированному значению энергии E, определённым образом связана с совокупностью движений по геодезическим линиям («прямым») в пространстве постоянной кривизны, знак которой противоположен знаку E. В особенно интересующем нас случае $E < 0$ (о котором, собственно, и говорил сам Мозер; случаи $E = 0$ и $E > 0$ рассмотрел Ю. С. Осипов[25]) речь идёт просто о движениях по большим кругам на сфере.

К результату Мозера (и Осипова) можно прийти, рассматривая всевозможные годографы, отвечающие данной энергии E. В результате получается некоторое семейство окружностей на плоскости или (если мы не ограничиваемся движениями, происходящими в фиксированной плоскости) во всём трёхмерном пространстве. Эти семейства совсем по другим поводам привлекли внимание геометров ещё в середине XIX в., и тогда была выяснена связь этих семейств с движениями по геодезическим линиям в пространствах постоянной кривизны. В частности, при $E < 0$ речь идёт просто о давно известной стереографической проекции плоскости на подходящим образом подобранную сферу[26]. Мозер рассуждал совершенно иначе, не привлекая нашей геометрии, а остроумно оперируя с формулами. Отчасти это можно объяснить тем, что он хотел написать явные формулы, связывающие эти две задачи (Кеплера и геометрическую), но ведь их можно получить и на нашем пути, попросту описывая формулами соответствующие геометрические построения. Так что на самом деле причина скорее была в том, что предложенный

[25]Однофамилец нынешнего президента Российской академии наук.

[26]В качестве независимой переменной для движений по сфере используют введённую в § 6 «эксцентрическую анома́лию» — оказывается, если, так сказать, принять её за новое время, то движения происходят с постоянной скоростью. При этом обнаруживается следующее неожиданное обстоятельство.

Задаче Кеплера на плоскости с координатами x, y присуща очевидная симметрия относительно поворотов этой плоскости вокруг «Солнца» S. В задаче о движениях с постоянной скоростью по большим кругам на двумерной сфере симметрий гораздо больше — она симметрична относительно любых поворотов вокруг центра O сферы. Оказывается, с этими симметриями определённым образом связаны некоторые константы интегрирования. В задаче Кеплера с вращениями вокруг S связан момент M, а в задаче о движениях с постоянной скоростью по большим кругам на двумерной сфере с вращениями вокруг каждой из координатных осей Ox, Oy, Oz, проходящих через центр сферы, связан свой момент M_x, M_y, M_z (последние три числа являются просто координатами вектора момента импульса $\mathbf{M}$). Если вернуться от последней задачи к задаче Кеплера, то, оказывается, из M_z получается обычный момент импульса M, сохраняющийся при движениях в этой задаче, а из M_x и M_y получаются координаты вектора эксцентриситета $\mathbf{A}$. Можно сказать, что на самом деле в задаче Кеплера, помимо очевидной симметрии относительно поворотов вокруг S, имеется ещё некая «скрытая симметрия», которая и проявляется в сохранении при движении вектора $\mathbf{A}$.

Такое доказательство этого сохранения, конечно, сложнее простых соображений, изложенных выше. Его значение состоит в том, что оно увязывает вектор $\mathbf{A}$, который появился как бы «сам по себе», с другими понятиями и фактами.

Гамильтоном подход к задаче Кеплера был в значительной степени забыт. Некоторое время я пребывал в приятном заблуждении, что я был первым, кто обнаружил связь результатов Мозера с подходом Гамильтона [6], но потом узнал (от Осипова), что меня опередил Дж. Милнор [43]. (В последних двух статьях можно найти ссылки на первоначальные работы с фо́рмульным подходом.)

Часть 3. Формулы Клеро—Бине

Вывод законов Кеплера из закона всемирного тяготения и других законов Ньютона, приведённый в § 6, имеется у У. Гамильтона [17] и, по-видимому, там и был предложен впервые. (Так полагает и автор исторических заметок [20], [21]. Это хорошо согласуется с тем фактом, что Гамильтон был автором самого понятия «годограф». Явно или неявно годографы могли появляться и до него просто как некоторые кривые, возникающие по ходу исследования, но он обратил на них специальное внимание и дал им название.) Сравнительно недавно этот вывод вновь появился в [1], причём несомненно, что авторы переоткрыли его заново, — у них нет даже термина «годограф». Насколько мне известно, в литературе на русском языке этот вывод имеется только в переведённых книгах [29], [41]. Но нечто близкое хорошо известно и в русской литературе. А именно, вывод легко получается на основании формул Клеро—Бине, которые имеются во многих учебниках механики (и которые старее, чем работы Гамильтона)[27].

Пусть поле центральное ($\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$); тогда сохраняется момент количества движения и движение происходит в плоскости. Мы будем пользоваться полярными координатами (r, φ) в этой плоскости с полюсом в центре силового поля. Сохранение момента означает, что

$$\text{момент} = mr^2\dot{\varphi} = rv_\varphi = 2m\dot{\sigma} = mM, \qquad M = \text{const}.$$

Как и в § 6, для нас будет играть основную роль дифференцирование по φ, которое мы будем обозначать штрихом ($' = d/d\varphi$). Ускорение $\mathbf{w}$ имеет только радиальную компоненту w_r (т. е. $w_\varphi = 0$). Формулы Клеро—Бине — это формулы, выражающие скорость и ускорение в терминах вспомогательной переменной $\rho := 1/r$ и её производных по φ. Раз сохраняется момент импульса (ведь сила центральная), то это эквивалентно тому, чтобы писать их в терминах $v_r = \dot{r}$, $v_\varphi = M/r$. В таком виде для того случая, когда сила обратно пропорциональна r^2, наши формулы

[27]Кроме того, повторяю, что в [53] изложен вывод формул (12) без перефразировки этого результата в терминах вектора $\mathbf{A}$ (и ещё с тем совсем уж несущественным отличием от конца части 2, что Уинтнер, как и большинство занимавшихся этим авторов, пишет x/r, y/r вместо $\cos\varphi$, $\sin\varphi$).

из § 6 для v'_r, v'_φ — это и есть одна из формул Клеро—Бине. В общем случае

$$v^2 = M^2(\rho'^2 + \rho^2), \qquad w_r = -M^2\rho^2(\rho'' + \rho).$$

(Знак в последней формуле связан с постоянно принятым соглашением, что положительным расстоянием на прямой SP считается направление от S к P.)

Обе формулы чаще называют формулами Я. Бине (1786—1856), но иногда их связывают с именем А. Клеро[28]. Роль этих людей в науке весьма различна. Клеро — один из корифеев небесной механики, несколько проигрывающий из-за «соседства» с Л. Эйлером. (Да и кто от такого соседства не проиграл бы? Но надо сказать, что Клеро, уступая Эйлеру по разнообразию интересов и числу достижений, не уступал по их уровню.) Я. Бине преподавал астрономию в Колледж де Франс и, видимо, был хорошим вузовским профессором, но в науке с его именем, помимо этих двух формул, связывают немногое[29]. Вывел ли он их независимо от Клеро или нашёл в работах Клеро и успешно использовал в преподавании, так что это многим запомнилось, я не знаю.

Если $w_r = -k/r^2 = -k\rho^2$, то из второй формулы Клеро—Бине сразу следует, что $\rho'' + \rho - k/M^2 = 0$. Это уравнение гармонического осциллятора с действующей на него постоянной силой, которое гораздо проще уравнения, описывающего задачу Кеплера. Его решения суть $\rho = k/M^2 + A\cos(\varphi - \varphi_0)$, где A, φ_0 — некоторые константы («постоянные интегрирования»). Выбрав подходящим образом начальный луч, можно обеспечить, чтобы было выполнено равенство $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{k/M^2 + A\cos\varphi},$$

что очевидным образом преобразуется к уравнению конического сечения в полярных координатах.

Какое отношение это имеет к § 6? Поскольку $rv_\varphi = M$, мы имеем $v_\varphi = M\rho$, так что $v'_\varphi + v_\varphi - k/M = 0$. Но из равенства $rv_\varphi = M$ следует

[28] Я не пытался проверять по первоисточникам, но в [53] в примечании к §§ 211—212 сказано: «Дифференциальное уравнение второго порядка (относительно $1/r$), в котором независимой переменной служит полярный угол, приводится явно в „Теории Луны“ Клеро (1765)».

[29] Его имя носят несколько формул (не из главных) в теории гамма-функции; им предложено привившееся название «бета-функция» и соответствующее обозначение. Кроме того, историки указывают, что он занимался алгеброй, кривыми и поверхностями второго порядка, линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Но здесь его вклад, видимо, не настолько выделялся, чтобы память о нём сохранилась.

также, что $r'v_\varphi + rv'_\varphi = 0$, а так как $r' = 1/\omega\dot{r} = v_r/\omega$, мы получаем

$$\frac{v_r v_\varphi}{\omega} + rv'_\varphi = 0, \qquad v_r v_\varphi + \omega r v'_\varphi = 0$$

и, сокращая на $v_\varphi = r\omega$ (этот множитель отличен от нуля, ибо у нас $M \neq 0$), приходим к равенству $v'_\varphi = -v_r$. Итак,

$$v'_r = v_\varphi - \frac{k}{M}, \qquad v'_\varphi = -v_r. \tag{13}$$

В § 6 у нас была более простая система (32) для v_x, v_y. Но легко убедиться в эквивалентности этих систем, используя формулы, выражающие v_x, v_y через v_r, v_φ. Геометрически эта связь отвечает тому, что (v_x, v_y) и (v_r, v_φ) суть координаты одного и того же вектора $\mathbf{v}$, но в разных системах декартовых координат — неподвижной системе и системе, вращающейся с изменением φ с единичной скоростью. Можно на минуту обозначить вектор, имеющий в неподвижной системе координаты (v_r, v_φ), через $\mathbf{u}$; тогда $\mathbf{u} = A(\varphi)\mathbf{v}$, где $A(\varphi)$ есть матрица

$$A(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

а при записи произведения матрицы на вектор подразумевается, что вектор представлен в виде столбика из своих координат. Как легко видеть, производная $A(\varphi)$ по φ имеет вид

$$A'(\varphi) = JA(\varphi), \qquad \text{где } J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, если $\mathbf{v}$ изменяется (с изменением переменной φ) согласно уравнению (2), то

$$\mathbf{u}' = A'(\varphi)\mathbf{v} + A(\varphi)\mathbf{v}' = JA\mathbf{v} - A(\varphi)\frac{k}{M}\frac{\mathbf{r}}{r} = J\mathbf{u} - \frac{k}{M}A(\varphi)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если учесть, что

$$A(\varphi)\frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то как раз и получатся формулы (13).

Аналогичным образом можно перейти обратно от формулы (13) к системе (32). Так что при желании можно сказать, что рассуждение из § 6 является перефразировкой соображений, основанных на формуле Клеро—Бине. Однако я не уверен, что это было бы совсем уж правильно, потому что рассуждение из § 6 проще как вывода формулы Клеро—Бине, так и перехода от формулы (13) к системе (32).

Между прочим, нечто в этом роде часто говорят по поводу отношения формулы Клеро—Бине к одной формуле в первой книге «Математических начал натуральной философии». Дело в том, что у Ньютона была некоторая формула, от которой при желании можно перейти к формуле Клеро—Бине. Если поле центральное, R — радиус кривизны орбиты (в точке P), d — расстояние от S до прямой PQ, проходящей через P в направлении вектора скорости, то при обычных прочих обозначениях формула Ньютона гласит, что ускорение вычисляется по формуле $w = M^2 r/(Rd^3)$. (См. раздел «Предложение VI. Теорема V» в книге I и ее следствия, особенно следствие 5. Собственно, множителя M^2 у Ньютона нет, так как он говорит только, что ускорение пропорционально такой-то величине, но из его рассуждений ясно, что равенство будет именно при таком множителе.) Чтобы перейти отсюда к формуле Клеро—Бине, надо иметь явное выражение для R через r, $dr/d\varphi$ и $d^2r/d\varphi^2$ (а также выражение для d, которое получается, конечно, проще; наконец, надо иметь в виду наше соглашение о знаке для вектора, направленного по SP). Из-за этого (если не заимствовать откуда-то готовых формул) переход от этой формулы Ньютона к формуле Клеро—Бине не проще и скорее даже сложнее, чем непосредственный вывод последней. Другое дело, что Ньютон успешно использовал свою формулу в тех случаях, когда мы применяли бы формулу Клеро—Бине.

Мораль (не новая): наука развивается, говоря словами известного анекдота, «как молния — не так быстро, но зигзагом».

Литература

(Рекомендую также статьи в «Большой Советской Энциклопедии».)

[1] *Abelson H.*, *diSessa A.*, *Rudolph L.* Velocity space and the geometry of planetary orbits // Amer. J. of Phys. 1975. V. 43, N. 7. P. 579—589.

[2] *Aiton E. J.* The inverse problem of central forces // Annals of science. 1964. V. 20, N. 1, P. 81—99.

[3] *Aiton E. J.* The celestial mechanics of Leibniz: a new interpretation // Annals of science. 1964. V. 20, N. 2. P. 111—123.

[4] *Albouy A.* Lectures on the two-body problems // In: Classical ane celestial mechanics. The Recife lectures. Lectures in the Federal University of Pernambuco. Recife (1993—1999). — Princeton, N. J.: Princeton University Press, 2002. P. 63–116.

[5] *Аносов Д. В.* К истории вывода законов Кеплера из законов механики // Историко-математические исследования. 2-я серия. 2000. Вып. 5 (40). С. 9—25.

[6] *Anosov D. V.* A note on the Kepler problem // Journal of dynamical and control systems. 2002. V. 8, N. 3. P. 413—442.

[7] *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989.

Первые две главы касаются возникновения небесной механики и математического анализа, в четвёртой сообщается кое-что о последующем развитии небесной механики (но, конечно, эта тема необъятна; именно кое-что). Две другие главы в основном посвящены некоторым новым исследованиям на различные темы, истоки которых при желании можно связать с Ньютоном или его современниками.

[8] *Башмакова И. Г.* Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972.

Автор доказывает, что Диофант не только расширил область чисел, пользуясь (как общеизвестно) рациональными числами (что сказал бы Платон!) и фактически (это не столь известно) отрицательными числами (что...!!), не только приступил к построению буквенной алгебры (!!!) и не только рассматривал совершенно новые по своему характеру задачи, но что, вопреки распространённому мнению, у него имелись некоторые общие методы их решения.

[9] *Белый Ю. А.* Иоганн Кеплер (1571—1630). М.: Наука, 1971.

Книга содержит намного более подробную информацию о жизни Кеплера, его эпохе, его мировоззрении и его научной работе, чем в настоящей книжке.

[10] *Боголюбов А. Н.* Роберт Гук. М.: Наука, 1984.

Ссора с Ньютоном неблагоприятно отразилась на посмертной репутации Гука. Только сравнительно недавно историки постарались взглянуть на Гука более объективно. Данная книга отражает эту тенденцию. Мне только кажется, что в одном отношении автор слишком увлёкся: он полагает, что Гук был лучшим экспериментатором, чем Ньютон. Мне кажется, Гук проделал намного больше опытов, но оптические опыты Ньютона, когда в этом возникала необходимость, были более тонко поставлены.

[11] *Брагинский В. Б.*, *Полнарёв А. Г.* Удивительная гравитация. М.: Наука, 1985.

Книга посвящена современным представлениям о гравитации (по историческим причинам соответствующая теория получила название «общей теории относительности») и соответствующим экспериментам. Здесь эта книга упоминается потому, что в ней описаны опыты, подтверждающие совпадение гравитационного заряда и инертной массы.

[12] *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. М.: АН СССР, 1961.

Эта книга в несколько раз больше, чем посвящённая Ньютону брошюра А. Н. Крылова, поэтому она подробнее. В частности, С. И. Вавилов, будучи известным физиком-оптиком, особое внимание уделяет оптическим достижениям Ньютона. Другая сторона дела, выпукло представленная у Вавилова, — информация о различных гипотезах Ньютона, как относившихся к оптике, так и иных. Некоторые гипотезы составляли часть научного мировоззрения Ньютона и подчас могли влиять на направление его исследований, однако Ньютон чётко отличал гипотезы от установленных фактов.

[13] *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: Физматгиз, 1959.

Автор книги — одновременно крупный математик и историк науки. Говорить о многочисленных достоинствах книги не приходится, иначе не остановишься. Но кое-какие положения автора, как и О. Нейгебауера, вызывают возражения, см. книги Л. Я. Жмудя и И. Г. Башмаковой. Это касается трёх вопросов: степени заимствования ранней греческой наукой научных сведений с древнего Востока; Пифагора и его последователей; Диофанта.

[14] *Вейнсток Р.* Разоблачение вековой легенды: Ньютон и орбиты при движении в поле центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния // В кн.: Физика за рубежом, сер. Б — Преподавание. Сб. научно-популярных статей. М.: Мир, 1984. С. 178—209.

[15] *Weinstock R.* Inverse-square orbits. Newton's Principia and twentieth-century commentary there on // Arch. Hist. Exact Sci. 2000. V. 55, N. 2. P. 137—162.

[16] *Веселовский И. Н.*, *Белый Ю. А.* Николай Коперник. М.: Наука, 1974.

[17] *Hamilton W.* The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction // Proc. Roy. Irish Acad. 1845—1847. V. III, P. 344—353. Reprinted in: The mathematical papers of sir

William Rowen Hamilton. V. II, Dynamics. P. 287—292. Cambridge: University press, 1940.

[18] *Hamilton W. R.* On the application of the method of quaternions to some dynamical questions. Proc. Roy. Irish Acad., 1847. V. III. Appendix. Reprinted in: The mathematical papers of sir William Rowen Hamilton, V. III. Algebra. P. 441—448. Cambridge: At the University press, 1967.

[19] *Гиндикин С. И.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МНЦМО, 2001.

Первое издание было посвящено Дж. Кардано, Г. Галилею, Х. Гюйгенсу, Б. Паскалю и К. Гауссу. Говоря о Гюйгенсе, автор, в частности, сообщал о его исследовании центробежной силы, приводя соответствующие цитаты. Во втором издании добавлены главы о Лейбнице, Эйлере, Лагранже, Лапласе, Клейне (1849—1925), Рамануджане (1887—1920), а также о некоторых вопросах геометрии. В настоящей книжке упоминались некоторые из названных учёных, но в ней говорилось только о небольшой части их достижений, имеющей прямое отношение к нашей теме, а Гиндикин сообщает о них намного больше.

[20] *Goldstein H.* Prehistory of the «Runge—Lenz» vector // Amer. J. of Phys. 1975. V. 43, N. 8. P. 737—738.

[21] *Goldstein H.* More on the prehistory of the Laplace or Runge—Lenz vector // Amer. J. of Phys. 1976. V. 44, N. 11. P. 1123—1124.

[22] *Градштейн И. С.* Прямая и обратная теоремы. М,: Наука, 1972.

Ранее эта книжка выходила несколькими изданиями. Почти во всех них заодно немного говорилось о формализации части логики, придающей ей алгебраический вид.

[23] *Гребенников Е. А.* Николай Коперник. М.: Наука, 1982.

Указанная ранее книга о Копернике, написанная историками науки, в несколько раз больше последней, написанной специалистом по небесной механике. Поэтому первая книга подробнее, причём в ней говорится и о предыстории гелиоцентрической системы, чего нет во второй. Зато в последней проводится не только качественное (как у нас и как это вообще обычно в популярной литературе), но и количественное сопоставление выводов, следующих из теорий Птолемея и Кеплера. Для Луны же результаты старых теорий (вплоть до Кеплера) сопоставляются с современной теорией Дж. Хилла (1838—1914)[30]. (Подробнее это делается в [30].) Гребенников вкратце сообщает также о критическом анализе «Альмагеста», который был проведен американским учёным Р. Ньютоном и изложен в его книге под вызывающим названием «Преступление Клавдия Птолемея», опубликованной в 1977 г. (так что Веселовский и Белый не

[30] Физические принципы в более точных разработках XX века остались теми же, а в пределах уместной в данном случае точности теории Хилла достаточно.

могли о ней писать). Ньютон считает, что а) значительная часть наблюдательных данных у Птолемея так или иначе фальсифицирована (либо приводятся выполненные ранее наблюдения других астрономов, но искусственно пересчитанные на другое время, причём пересчёт производился, естественно, по теории Птолемея, да ещё и с ошибками; либо наблюдения «подправлены» таким образом, чтобы лучше соответствовать той же теории; либо они вообще не производились, а приводятся те данные, которые получаются из этой теории)[31]; б) в математике имеется немало ошибок, в том числе и грубых; в) описание астрономических инструментов является поверхностным — отсутствуют указания на их основные параметры. Гребенников занимает осторожную позицию, да и что можно сказать, не перепроверив данных Ньютона?

[24] *Гребенников Е. А.*, *Рябов Ю. А.* Поиски и открытия планет. М.: Наука, 1972.

Половина книги посвящена истории открытия Нептуна. Менее подробно говорится об открытии астероидов и Плутона. Начало книги посвящено законам планетных движений и истории их исследования.

[25] *Goodstein D. L.*, *Goodstein J. L.* Feynman's lost lecture. The motion of planets around the suns. London: Jonathan Cape, Random House, 1996. Позднее книга доиздавалась издательской группой Random House (я видел издание 1997 г., выпущенное издательством Vintage).

Книга содержит: рассказ о том, как были обнаружены записи лекции Фейнмана 1964 г. (неполные, особенно по части существенных для её понимания рисунков) и как она реконструировалась; краткие сведения о Копернике, Тихо де Браге, Кеплере, Галилее и Ньютоне; рассказ о Фейнмане, в значительной степени по личным воспоминаниям Гудстейна; более детальное, чем в лекции Фейнмана, изложение его аргументов с сохранением геометрического стиля лекции (это занимает почти половину книги); саму эту лекцию; исторические замечания к ней. Оказывается, Фейнман узнал о приёме с годографом скорости и использованием φ в качестве независимой переменной из книги [54], где этот приём привлечён

[31] В связи с этим стоит обратить внимание на одно место из «Фейнмановских лекций по физике» [56]. Там воспроизводится имеющаяся у Птолемея таблица углов отклонения света в воде при падении его из воздуха для углов от 10° до 80° с шагом в 10°. Значения в этой таблице близки к правильным. Закон преломления Снелла тогда не был известен, поэтому таблицу можно было составить только на основании эксперимента. Однако «данные таблицы слишком хорошо ложатся на параболу, поэтому они не могут быть результатом независимых измерений; это лишь ряд чисел, интерполированных по немногим измеренным точкам». В наши дни учёный может сгладить экспериментальные данные, но обязан предупредить об этом (а ещё лучше — привести данные измерений наряду со сглаженными). Видимо, научная этика того времени отличалась от нашей. (Даже в начале XVIII в. крупные (крупнейшие!) учёные не совсем разделяли наше мнение, см. в приложении IV о конфликте Ньютона с Флемстидом.)

для другой цели — вывода формулы рассеяния Резерфорда (о ней Фейнман тоже рассказал). В [54] не упоминаются ни Гамильтон, ни термин «годограф», и в лекции Фейнмана таких слов тоже нет. О том и другом Гудстейны узнали из книжки Дж. К. Максвелла [41] (точной ссылки на самого Гамильтона в ([25]) нет). В конце [25] объясняется также, что, хотя объём применений механики Ньютона огромен, в фундаментальной картине мира её теперь заменили теория относительности и квантовая механика (сюда следовало бы добавить теорию поля, поначалу только электромагнитного, но, как ни странно, этого не сказано).

Фейнман констатирует, что его изложение элементарное, но что это означает не то, будто его легко понять, а то, что для понимания этого изложения заранее надо знать очень немногое, и добавляет: «except to have an infinite amount of intelligence». Он также констатирует: «нелегко использовать геометрические методы для того, чтобы открывать (новые — Д. А.) вещи. Это очень трудно, но после того как открытие сделано, элегантность (геометрических — Д. А.) доказательств действительно очень велика». Почему-то он добавляет, что при использовании аналитического подхода «намного проще открывать вещи, чем доказывать», и отрицает за таким подходом возможность элегантности. (Этого я не понимаю. Взять хотя бы наш предмет: переход к независимой переменной φ и неизвестной $\mathbf{v}$ — верх элегантности, а это же анализ, и для полноты доказательства при этом отнюдь не требуется чрезвычайных усилий. Правда, Фейнман придал приёму Гамильтона совсем уж геометрический вид[32], но ведь он так сделал не потому, что у Гамильтона было «некрасиво», а ради бо́льшей элементарности.)

[26] *Goursat E.* Les transformations isogonales en Mécanique // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1887. V. 108. P. 446—450.

[27] *Дмитриев И. С.* Неизвестный Ньютон. Силуэт на фоне эпохи. СПб: Алетейя, 1999.

В книге описываются те стороны мировоззрения и деятельности Ньютона, которые до недавних пор были мало известны (особенно у нас). Хотя величие Ньютона состояло не в них и не будь он тем Ньютоном, о каком мы до сих пор знали, новооткрытый «неизвестный Ньютон» едва ли привлёк бы внимание (да и соответствующие материалы едва ли сохранились бы), полное освещение жизни и деятельности Ньютона включает и эту сторону. Ньютон был таким, каким он был.

[28] *Жмудь Л. Я.* Пифагор и его школа. Л.: Наука, 1990.

[29] *Зоммерфельд А.* Механика. М.: ИЛ, 1947.

[30] *Идельсон Н. И.* Этюды по истории небесной механики. М.: Наука, 1975.

[32]Получилось нечто среднее между Гамильтоном и Максвеллом: решая прямую задачу Кеплера, Фейнман, помимо идеи Гамильтона, использует также построения, которые связаны с максвелловским решением обратной задачи.

Сборник популярных (или полупопулярных) статей ленинградского астронома-вычислителя Н. И. Идельсона (1885—1951). Примерно половина книги посвящена старым теориям движения небесных светил (для планет — кончая Кеплером, для Луны — Ньютоном). Сопоставление старых теорий с новыми (т. е. с теорией Кеплера для планет и теорией Хилла для Луны) проведено детальнее, чем в [23].

[31] *Исаак Ньютон.* 1643—1727. Сборник статей к трёхсотлетию со дня рождения. М.—Л.: АН СССР, 1943.

Сборник статей ряда авторов, посвящённых прежде всего различным аспектам деятельности Ньютона в области точных наук (чему посвящён также сборник [45]), но также и некоторым другим вопросам, связанным с жизнью и деятельностью Ньютона. (Имеется даже статья о его портретах. Хотя в сборнике нет речи о «неизвестном Ньютоне» в смысле [27], но некоторым шагом в этом направлении является упоминавшаяся в приложении V статья С. Я. Лурье.) Статьи А. Н. Крылова, С. И. Вавилова и Н. И. Идельсона воспроизведены также в [37], [12], [30]; мне неизвестно, воспроизводились ли статьи других авторов. Некоторые статьи посвящены тем частям «Начал», которых мы не касаемся (Л. Н. Сретенский, «Ньютонова теория приливов и фигуры Земли»; А. Д. Дубяго, «Кометы и их значение в общей системе Ньютоновых „Начал“»; М. В. Кирпичёв, «Ньютон о подобии»). В части 1 приложения VIII я упоминал о статье Н. Н. Лузина «Ньютонова теория пределов».

[32] *Йейтс.* Розенкрейцерское просвещение. М.: Алтейя, 1999.

[33] *Karcher H.* Newton's $1/r$ gravitational potential derived from Kepler Orbits. Статья на web-странице

http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/KeplerOrbits.pdf

[34] *Кеплер И.* О шестиугольных снежинках. М.: Наука, 1982.

Несколько научно-популярных произведений Кеплера, включая и «Сон». С научной точки зрения особенно замечательно первое из этих произведений, по которому назван и весь сборник. При своей популярной форме оно является первой научной работой по кристаллографии. К нему восходит также «задача Кеплера» о плотнейшей упаковке шаров, не решённая и по сей день. А наибольшей известностью в своё время пользовался «Разговор с звёздным вестником, недавно ниспосланным смертным Галилео Галилеем, падуанским математиком» — отклик на первые телескопические открытия Галилея. Исторически и психологически интересна самохарактеристика «О себе», которой частично придана форма гороскопа.

[35] *Сурдин В. Г.* Неуловимая планета. М.: Век 2, 2005.

[36] *Ксанфомалити Л. В.* История открытия внесолнечных планет // Историко-астрономические исследования. 2002. Вып. XXVII. С. 54—79.

[37] *Крылов А. Н.* Ньютон и его значение в мировой науке. 1643—1943. М.: АН СССР, 1943.

Приведя в самом начале своей небольшой брошюры краткие биографические сведения о Ньютоне (в [12] и [27] они намного подробнее), А. Н. Крылов затем говорит почти исключительно о «Математических началах натуральной философии» Ньютона (вкратце освещая их содержание, местами пункт за пунктом) и о том, какое продолжение его работа в области механики и астрономии получила впоследствии.

[38] *Lagrange J.* Théorie des variations séculaires des éléments des planètes // Oeuvres. V. 5. Paris: Gauthier-Villars. 1870. P. 125—207.

[39] *Levi-Civita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps // Acta Math. 1906. V. 30. P. 306—327. Reprinted in: T. Levi-Civita. Opere matematiche. V. 2 (1901—1907). P. 419—439. Bologna: Nicola Zanichelli editore, 1956.

[40] *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990.

[41] *Максвелл Дж. К.* Материя и движение. М.—Ижевск, 2001.

Перепечатка перевода 20-х или 30-х гг. книги Максвелла о механике, вышедшей в 1877 г. и переизданной в 1920 г. под редакцией Дж. Лармора, сделавшего небольшие добавления (одно из них воспроизводит главу из другого сочинения самого Максвелла). В новом русском издании помещён также перевод статьи У. Нивена 1890 г. «Жизнь и научная деятельность Дж. К. Максвелла». Книга представляет собой довольно простой очерк основных идей механики, не доходящий до математических тонкостей вроде движения твёрдого тела и вопросов теории возмущений; в первоначальном тексте Максвелла не было также ни уравнений Лагранжа и Гамильтона, ни вариационных принципов, но об этом даётся некоторое понятие в добавлениях, сделанных Лармором. В ней также почти нет разбора конкретных задач (задача Кеплера — одно из немногих исключений, причём самое сложное). Поэтому данный очерк не является учебником (и, конечно, не замышлялся в качестве такового).

[42] *Маров М. Я.* Планеты Солнечной системы. М.: Наука, 1981.

Основное содержание книги — рассказ об успехах в исследовании планет, достигнутых в первую очередь с помощью космических аппаратов, но также и наземными оптическими и радиоастрономическими средствами. Однако здесь я цитирую её потому, что в ней сообщается об экспериментах по численному моделированию процесса образования планет, при которых в одном из вариантов довольно точно получилось правило Тициуса—Боде.

[43] *Milnor J.* On the geometry of the Kepler problem // Amer. Math. Monthly. 1983. V. 90, P. 353—365.

[44] *Михайлов А. А.* Земля и её вращение. М.: Наука, 1984.

[45] Московский университет — памяти Исаака Ньютона. 1643—1943. М.: МГУ, 1946.

Сборник статей ряда авторов, посвящённых различным аспектам деятельности Ньютона в области точных наук. Он в несколько раз меньше [31], но столь же содержателен. К нашей теме относятся статьи: А. Н. Колмогоров, «Ньютон и современное математическое мышление»; А. А. Космодемьянский, «Работы Ньютона по динамике и гидродинамике»; Г. Н. Дубошин, «Астрономия в работах Ньютона». (Последние две, как и первая половина брошюры А. Н. Крылова, посвящены «Математическим началам натуральной философии», причём Дубошин даёт более подробный, чем у Крылова, обзор астрономической части первой книги «Начал», но менее подробный — третьей книги, а Космодемьянский местами отходит от текста «Начал» и кое-что обсуждает подробнее.)

[46] *Нейгебауер О.* Точные науки в древности. М.: Наука, 1968.

Бо́льшая часть книги посвящена Древнему Египту и Вавилону. Кое-что здесь относится, я бы сказал, ещё не к науке, а к протонауке[33]. В конце книги дан краткий очерк системы Птолемея и обсуждаются связи между греческой и вавилонской астрономией, а также связи греческой математики с астрономией, включая вычислительную сторону дела. (У историков науки эти аспекты часто остаются в тени.)

[47] *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.

[48] *Ньютон И.* Математические работы. М.: ОНТИ, 1937.

Почти сразу же после создания математического анализа Ньютон довольно подробно изложил созданную им теорию в работе «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых», написанной в промежутке 1664—71 гг. и предназначенной, по его выражению, «для молодых геометров». (Геометрами и тогда, и много позднее называли вообще всех математиков, а «флюксии» — это ньютоновское название для производных.) Однако Ньютон, по выражению Д. Д. Мордухай-Болтовского, редактировавшего и комментировавшего русское издание его математических работ, «обнаружил крайнюю нерешительность в отношении опубликования» этой рукописи, и в конце концов она была издана только после его смерти, в 1736 г., причём не в оригинальном

[33]Наука, понимаемая как единая система знаний, не обязательно непосредственно связанных с практической деятельностью, и как отдельная сфера человеческой деятельности, имеющей своей целью получение новых знаний, возникла (или, может быть, окончательно оформилась) в Древней Греции. До того уже имелись научные сведения, подчас немалые, но, насколько мы знаем, не было науки в том смысле, как я сказал. Может быть, то, что было до греков, стоит назвать «протонаукой». Конечно, между протонаукой и наукой нет чёткой грани, вавилонская астрономия определённо становилась наукой и, по-видимому, стала ею в свои последние века (когда в Греции уже бесспорно существовала наука).

виде — на латинском языке, а в английском переводе (как объясняет Мордухай-Болтовский, издатель решил издать «Метод флюксий» со своими комментариями, но он не очень хорошо владел латынью и, будучи всё же в состоянии перевести «Метод» с латыни на английский язык, затруднялся изложить на латыни свои примечания). Оригинальная же рукопись, по-видимому, утрачена, о чём можно только сожалеть, так как при английском переводе, возможно, не все оттенки мысли автора удалось уловить. В отношении собственно «дифференциального и интегрального исчисления» как комплекса определённых приёмов публикация «Метода флюксий» безнадёжно запоздала, ибо уже в 1696 г. вышел «Анализ бесконечно малых» Г. Лопиталя (1661—1704), основанный на лекциях И. Бернулли (и, в общем, более совершенный в этом отношении). Констатируя этот факт, Мордухай-Болтовский отмечает, что «Метод» содержал ещё «богатый комплекс идей, с помощью которых обосновываются операции анализа и которые имели очень важное значение для эволюции основных понятий анализа», но, по-моему, как раз в этом отношении «Математические начала натуральной философии» содержат достаточно много. Впрочем, часть английских математиков имела возможность ознакомиться с рукописью Ньютона намного ранее, а о многих элементах теории флюксий он говорил в своей переписке; наконец, в 1704 и 1711 гг. (т. е. тоже поздно) были опубликованы две работы Ньютона по анализу, написанные значительно раньше (одна из них — ещё до «Метода флюксий»)[34].

Мордухай-Болтовский пишет, что приложение анализа к геометрии «почти всецело ведёт своё начало от Ньютона». Уникальный характер для своего времени имела также работа Ньютона о классификации кривых третьего порядка, по-настоящему продолженная только в середине XIX в.

[49] *Розенфельд Б. А.* Аполлоний Пергский. М.: МЦНМО, 2004.

[50] *Рожанский И. Д.* Античная наука. М.: Наука, 1980.

[51] *Терентьев М. В.* История эфира. М.: Фазис, 1999.

Посмертно опубликованная популярная книга физика-теоретика М. В. Терентьева посвящена возникновению физической концепции поля. Автор успел довести историю до Дж. К. Максвелла (1831—1879), т. е. до того момента, когда концепция поля фактически уже обрела самостоятельное существование, не требующее механической модели, но это ещё не было осознано. К настоящей книжке примыкает глава, посвящённая Декарту и Ньютону. Описание эволюции взглядов Ньютона, предлагаемое Терентьевым, кажется убедительным.

[52] *Трусдел К.* Очерки по истории механики. М. — Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

[34] Безусловно новым (если не считать более раннего краткого упоминания в одном из писем Ньютона) был, по современной терминологии, «многоугольник Ньютона» (служащий для представления решения $y(x)$ алгебраического уравнения $f(x, y) = 0$ в виде ряда по дробным степеням $x - x_0$).

[53] *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.

Эта книга была мной упомянута только по поводу дискуссии в части 3 приложения VIII. Вообще же она содержит обширную информацию по задачам двух и трёх тел. Уинтнер интересовался не только небесной механикой как наукой, сложившейся ко времени работы над книгой, но и её историей. Его книга содержит много ссылок на работы по небесной механике (как старые, так и для того времени новые) и кратких замечаний в связи с их содержанием. (Надо только предупредить, что, как я убедился при работе над настоящей книжкой, не следует полагаться на исчерпывающую полноту его исторических указаний. Это понятно: история всё-таки не была для него самоцелью.)

[54] *Fano U.*, *Fano L.* Basic physics of atoms amd molecules. N. Y.: John Wiley, 1959.

Близкий к нам материал (вывод формулы Резерфорда) содержится в приложении III к этой книге. Согласно Гудстейну, Фейнман именно там нашёл приём, который я связываю с именем Гамильтона.

[55] *Фейнман Р.*, *Лейтон Р.*, *Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1. Современная наука о природе, законы механики. М.: Мир, 1965.

[56] *Фейнман Р.*, *Лейтон Р.*, *Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 3. Излучение, волны, кванты. М.: Мир, 1965.

[57] *Chandrasekhar S.* Newton's *Principia* for the common reader. Oxford: Clarendon Press, 1995.

Оглавление

Предисловие . . . 3
Как читать эту книгу . . . 5
Введение . . . 7
§ 1. Задача Кеплера . . . 11
§ 2. Координаты . . . 23
§ 3. Эллипс и другие кривые второго порядка . . . 34
§ 4. Скорость . . . 49
§ 5. Второй закон Кеплера . . . 75
§ 6. Первый и третий законы Кеплера . . . 88
§ 7. Обратная задача Кеплера . . . 104
§ 8. О связи между прямой и обратной задачами Кеплера . . . 117
Приложение I. До Кеплера . . . 129
Приложение II. Кеплер . . . 150
Приложение III. О предыстории понятия состояния материальной точки — «стрела» Зенона . . . 167
Приложение IV. Ньютон . . . 171
Приложение V. Всемирное тяготение . . . 184
Приложение VI. О «Математических началах натуральной философии» 194
Приложение VII. Притяжение шара . . . 213
Приложение VIII. Послесловие для знатоков . . . 240
Литература . . . 262