

А. Г. Алексенко

# ГРАФЕН

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ



Москва  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2014

УДК 620.22  
ББК 30.3я73  
А47

*Деривативное электронное издание на основе печатного издания: Графен / А. Г. Алексенко. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 168 с. : ил., [8] с. цв. вкл.*

**Алексенко А. Г.**

А47 Графен [Электронный ресурс] / А. Г. Алексенко. — Эл. изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 168 с. : ил., [8] с. цв. вкл.

ISBN 978-5-9963-2342-5

Рассматривается моноатомная наноуглеродная структура — графен, который предопределяет развитие многих инновационных сфер научной и промышленной деятельности. Техника графена составляет базис индустрии будущего — Шестого технологического уклада: плазмоники, фотоники, спинтроники, биоинформатики, терагерцевой наноэлектроники. Книга является первым систематизированным изложением графеновой нанотехники и содержит информацию, адаптированную для изучения текстов, касающихся графена.

Для инженеров, научных сотрудников, преподавателей и студентов технических учебных заведений и междисциплинарных систем повышения квалификации.

**УДК 620.22  
ББК 30.3я73**

**По вопросам приобретения обращаться:**

**«БИНОМ. Лаборатория знаний»**

**Телефон: (499) 157-5272**

**e-mail: [binom@Lbz.ru](mailto:binom@Lbz.ru), <http://www.Lbz.ru>**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель написания этой книги — привлечь внимание научно-педагогического сообщества, инженеров-естествоиспытателей и учащихся к невероятному потенциалу графена, являющегося точкой роста новых научных направлений, конвергентных отраслей науки и экономики, инструментом построения новой реальности.

Под новой реальностью мы понимаем складывающийся сейчас технологический уклад, шестой по счету. Для его обозначения используют аббревиатуру NBIC (NanoBioInfoCognito), символизирующую новую систему наукоемких производительных сил. Такая система включает в себя нанотехнологии, биотехнологии, информационные технологии и когнитивистику, нацеленную на разгадку великой тайны разума.

Нанотехнология — системообразующая основа перехода к шестому технологическому укладу. Нанозимия, нанохимия, нанобиология, наноматериалы, междисциплинарный комплекс когнитивных наук — это научная и культурная основа такого перехода. Процессы самоорганизации в живой и неживой природе — это примеры для подражания. Парадоксы квантового мира — это источник удивительных идей для развития науки и индустрии.

Обращение к графену неизбежно связано с образами квантовых полей и электродинамики, молекулярной оптики, плазмоники и метаматериалов. Потребность в приложениях междисциплинарных знаний — естественный стимул для смиренного изучения новых фундаментов, смыслов, сведений, необходимых для конструирования будущего.

Это изучение требует индивидуального переосмысления представлений линейной, спинорной и векторной алгебры, теории поля, освоения базисов, которые должны помочь понимать физические тексты.

Автор счел своим долгом привести в этой книге фрагменты таких сведений. Коллекция интернет-ссылок [1–8 и далее] открывает дорогу к конвергентному пониманию смысла естествознания.

Ожидается готовность воспринимать новые взгляды, новый непривычный подход. Желание разобраться потребует самостоятельного труда, работы мысли, изрядной перенастройки мозгов.

Многоликий графен заслуживает таких усилий!

# ГРАФЕН В НАНОРАЗМЕРНОМ МИРЕ

*Наноразмерный мир* — это действительность, в которой формируется и самоорганизуется материя. Величие и недостижимость такого мира веками охранялись его масштабами, измеряемыми миллиардными долями метра. Например, для атома единицей такого масштаба является один ангстрем ( $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ нм}$ ). В нанодиапазоне размеров (от 0 до 100 нм) проявляются необычные свойства частиц, их способности к взаимодействию, самоорганизации и развитию.

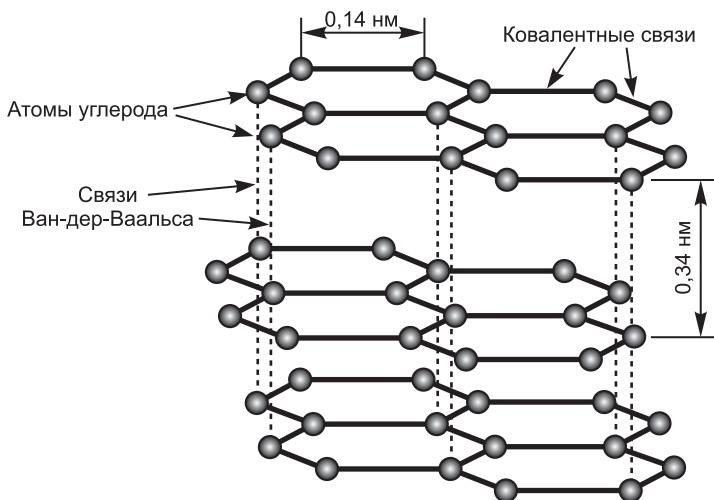
История науки демонстрирует стремление человека постичь великие тайны наномира. Древнегреческий философ Демокрит (V в. до н. э.) первым придумал понятие «атом» и на его основе создал свою атомистическую концепцию мироздания.

Сэр Джозеф Джон Томсон открыл в 1897 г. электрон как часть атома и подготовил вместе со своим учеником Резерфордом революцию в физике, связанную с именами Эйнштейна, Планка, Шрёдингера, Дирака, Паули и других знаменитых ученых, создавших креативу квантового мира.

Зондовая микроскопия и другие новейшие аналитические инструменты нашего времени превращают этот мир (живой и неживой) в нашу новую реальность.

**Парадоксально возникшее чудо.** *Графит*, трехмерный (3D) аллотроп углерода, использовался, начиная с XVI в., для письма и рисования. Структура пишущих стержней демонстрирует, как мы знаем, слабую ван-дер-Ваальсову межслойную  $\pi$ -связь, поддерживающую слои графена на расстоянии 0,335 нм друг от друга.

*Графен* (англ. *graphene*) является двумерной (2D) аллотропной модификацией углерода. Слой графена состоит из атомов углерода, расположенных на расстоянии 0,142 нм друг от друга в узлах гексагональной решетки. При этом каждый атом связан с тремя соседними атомами ковалентными химическими  $\sigma$ -связями\* с  $sp^2$ -гибридизацией, а четвертый валентный электрон включен в сопряженную  $\pi$ -систему графена. Таким образом, три связи, расположенные в плоскости, задают геометрическую структуру графена, а четвертая — его уникальные электронные свойства (рис. 1.1).



**Рис. 1.1.** Графеновые слои в графите: рисунок адаптирован из [http://www.substech.com/dokuwiki/lib/exe/fetch.php?w=&h=&cache=cache&media=graphite\\_structure.png](http://www.substech.com/dokuwiki/lib/exe/fetch.php?w=&h=&cache=cache&media=graphite_structure.png)

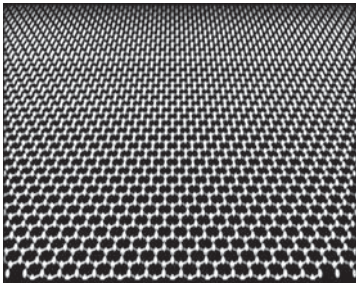
\* Ковалентные связи с соседними атомами решетки называются сигма-связями. Каждая такая  $\sigma$ -связь является весьма сильной, что объясняет прочность алмаза, графена, нанотрубок и других разновидностей наноуглерода. Она обусловлена малыми (0,14 нм) межатомными расстояниями.

$\pi$ -связи между слоями, располагающимися на расстоянии 0,34 нм, осуществляются силами Ван-дер-Ваальса. Поэтому межслойные  $\pi$ -связи являются достаточно слабыми, что объясняет хрупкость графита.

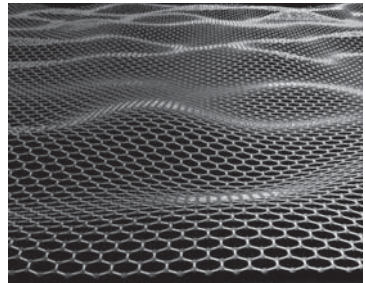
**Кристаллы, которые не должны существовать.** В вышедших в 1935–1937 гг. работах Р. Е. Пайерлса и Л. Д. Ландау утверждалось, что строго двумерные (2D) кристаллы углерода термодинамически неустойчивы и не могут существовать [10, 11].

*Умозрительная модель* углеродного листа [12] потребовалась (1947 г.) для создания зонной теории графита. В 1962 г. эта 2D-модель была названа *графеном* [13].

Термодинамическая стабильность реального [12, 23] графена (2004 г.) оказалась возможной из-за тепловых флуктуаций, создающих «рябь» — волнистость 2D-поверхности высотой  $\approx 0,5$  нм (рис. 1.2).



а)



б)

**Рис. 1.2.** Идеальная двумерная поверхность графена (а) существует благодаря ее малой волнистости (б)

До создания реального графена оставалось 42 года; в течение этих лет предпринимались безуспешные попытки изготовления 2D-материала. Кристаллизация атомов «снизу вверх» не удавалась, поскольку при этом получались другие аллотропные модификации углерода (графит, алмаз, фуллерены, нанотрубки [14]). Варианты химического расслоения графита (интеркаляции «сверху вниз») также не достигали цели.

*Появление графена* поразило научный мир своей внезапностью и изяществом. Научная сенсация состояла в получении графена прямым методом пилинга — микро-механического расслоения графита. Статья о получении

моноатомной пленки графена на подложке из окисленного кремния была опубликована в 2004 г. [15].

В самом простом варианте суть метода отслоения (пилинга) сводится к трению графитового стержня о гладкую окисленную ( $\text{SiO}_2$ ) поверхность кремния.

На такой поверхности остаются чешуйки графена, отщепленного от графита, и, даже если они имеют толщину в несколько атомных слоев, их можно наблюдать в оптическом микроскопе по интерференционной картине. При этом поверхность  $\text{SiO}_2$  механически стабилизовала моноатомные слои графена.

Как оказалось, расслоение графита удается сделать также с помощью обычной липкой ленты — скотча. Для этого тонкую пластинку графита помещают между двумя скотч-лентами и, последовательно разъединяя их, отщепляют раз за разом тонкие пленки графита, пока не будет получен достаточно тонкий слой. После этого скотч прижимают к подложке из окисленного кремния. В результате на подложке среди чешуек могут попадаться однослойные пленки, которые и представляют интерес [16].

Несмотря на свою простоту, такой метод расслоения позволяет получать образцы очень высокого качества, что дало возможность экспериментально продемонстрировать уникальные свойства графена.

Основные исполнители этой работы К. С. Новоселов\* и А. К. Гейм\*\* (фото на рис. 1.3) стали лауреатами Нобелевской премии по физике за 2010 г.

---

\* Константин Сергеевич Новоселов родился в 1974 г. в Нижнем Тагиле. В 1997 г. закончил МФТИ и до 1999 г. работал в Институте проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов, после чего уехал за границу. В настоящее время работает в Манчестерском университете. Имеет два гражданства — российское и британское.

\*\* Андрей Константинович Гейм родился в 1958 г. в Сочи. В 1982 г. закончил факультет общей и прикладной физики МФТИ, а в 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию в Институте физики твердого тела АН СССР. До 1990 г. работал в Институте проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов, после чего уехал за границу. На момент совершения открытия (2004 г.) вместе с К. С. Новоселовым работал в Манчестерском университете. Сейчас трудится там же, являясь формально гражданином Голландии.

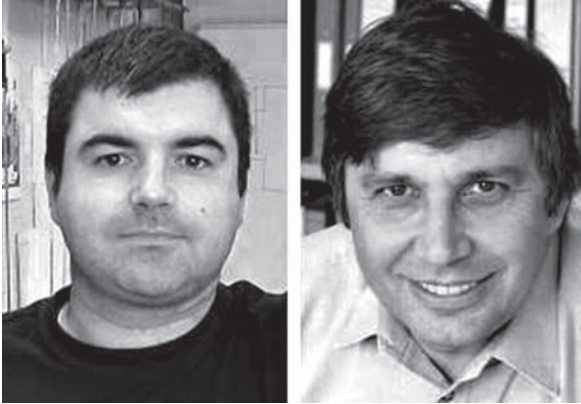


Рис. 1.3. Нобелевские лауреаты К. С. Новоселов и А. К. Гейм

Огромная научная активность [17, 18] позволила авторам быстро оценить перспективность графена и предопределила настоящий шквал исследований и публикаций.

Только в 2010 г. в исследования по графеновой тематике были вовлечены свыше 300 компаний, а число исследовательских публикаций превысило 3000 [19].

За несколько лет, прошедших после открытия Гейма и Новоселова, ученые не только научились производить полупромышленные количества графена, но и обнаружили невероятно широкий набор свойств данного материала. А. К. Гейм охарактеризовал графен как «огромный спектр материалов, по разнообразию применений сравнимый с пластмассой» [16].

В самом деле, в сообщении Шведской академии наук о присуждении премии говорится, что в будущем из пластика с добавлением графена могут производиться спутники, самолеты и автомобили, необыкновенно легкие и прочные.

Таким образом, появление реального графена явилось революционным событием, открывшим беспрецедентные перспективы для развития технологий нового, Шестого технологического уклада.

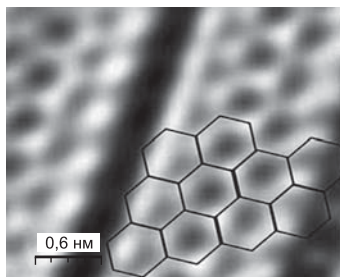
**Шаги графеновой революции.** В странах Евросоюза в мае 2011 г. стартовала десятилетняя Программа GRAPHENE-CA с бюджетом 1 млрд евро. По этой программе разворачивают работу более 130 исследовательских групп, представляющих 80 научных и промышленных организаций из 21 европейской страны [20]. Ожидается, что первые коммерчески значимые продажи графена начнутся к 2015 г., когда рынок, по прогнозам, достигнет 67 млн долл. К 2020 г. рынок графена достигнет 675 млн долл. со среднегодовым темпом роста 58,7% в период 2015–2020 гг. [20].

«Дорожные карты» и прогнозы рынка графена постоянно обновляются (см., например, [21, 22]).

Частные программы, существующие в США и европейских странах, нацелены на быстрое получение результатов по коммерциализации графена. Такова, например, программа развития техники суперконденсаторов и графен-литиевых батарей с бюджетом 500 млн долл. [23].

**Моноатомные материалы.** Появление графена активизировало работы по получению 2D-форм других материалов.

*Силицен* — 2D-кремний (рис. 1.4) — двумерное аллотропное соединение кремния, подобное графену, но совместимое с существующей полупроводниковой техникой. Реально получен в 2010 г. [24]–[26].



**Рис. 1.4.** Силицен был выращен на подложке из диборида циркония  $ZrB_2$ : фото заимствовано из [http://1injener.ru/images/NANO/NANO\\_20110327\\_2\\_1.jpg](http://1injener.ru/images/NANO/NANO_20110327_2_1.jpg)

До появления реального силицена теоретики рассчитали его свойства, практически идентичные свойствам графена [27, 28].

К примеру, носители заряда обладают таким же, как у графена, линейным законом дисперсии. Носители тока в силиcene ведут себя как частицы, не имеющие массы. Правда, как показали расчеты, скорость движения «безмассовых» квазичастиц в силиcene на порядок меньше скорости Ферми, характерной для графена.

*Другие моноатомные материалы* [29]–[31]: сетки нитрида бора BN — «белого» графена — полупроводника с шириной запрещенной зоны  $\approx 5$  эВ, моноатомные слои молибденита  $\text{MoS}_2$ , соединений  $\text{NbSe}_2$ ,  $\text{CaCu}_2\text{O}_2$ ,  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2$ ,  $\text{Ti}_3\text{AlC}_2$ . На основе молибденита создан транзистор с уникальными свойствами [32].

Несомненно, работы по поиску новых моноатомных сочетаний и новых 2D-материалов открывают новый, конвергентный этап материаловедения [32, 33].

# КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ГРАФЕНА

**Фермионы Дирака.** Необычные свойства моноатомных материалов — следствие коллективного взаимодействия электронов в 2D-кристалле, порождающего новый вид квазичастиц, которые ведут себя как безмассовые переносчики тока.

Эти квазичастицы — фермионы Дирака проявляют себя как электроны, потерявшие массу, или как нейтроны, получившие заряд  $e$ . Фермионы похожи на известные ранее релятивистские частицы с нулевой массой покоя, но имеют «свою» эффективную скорость, для графена — скорость Ферми, в 300 раз меньшую скорости света  $c$ .

Такие частицы не вписываются в модель Шрёдингера; они управляются уравнением Дирака, которому в квантовой электродинамике подчиняются релятивистские фермионы, обладающие спином  $s = 1/2$ .

Симметрия и зарядовое сопряжение пар «электрон–дырка», присутствующие в графене, определяют хиральные признаки пар носителей тока. Специфика хиральности обусловлена парностью неэквивалентных подрешеток кристаллической структуры графена.

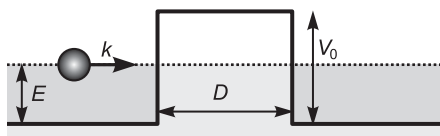
**Квантовая электродинамика как прикладная наука.** Подобного рода свойства графена позволяют «увидеть» релятивистские эффекты квантовой электродинамики (КЭД) в обычной лабораторной практике. Из этого следует, что КЭД обретает испытательный полигон в виде 2D-материалов, в первую очередь графена [15, 34], и становится прикладным разделом физики.

Неординарность такой лабораторной базы заключается в ее конвергенции с квантовой теорией поля,

позволяющей «увидеть» базовые константы квантовой физики и прояснить механизмы КЭД [19].

**Парадокс Клейна.** Примером использования графена для наглядного релятивистского моделирования служит теоретически предсказанный в 1929 г. парадокс Клейна. Эффект описан в [37], но экспериментально не наблюдался.

Парадокс Клейна возникает при рассмотрении задачи о туннелировании релятивистской частицы  $k$  через потенциальный барьер высотой  $V_0$  (рис. 2.1).



**Рис. 2.1.** Квазичастица с энергией  $E$  преодолевает потенциальный барьер  $V_0$ : при ширине барьера  $D$  и угле падения  $\varphi$  прохождение частицы определяется функциями и диаграммами прозрачности

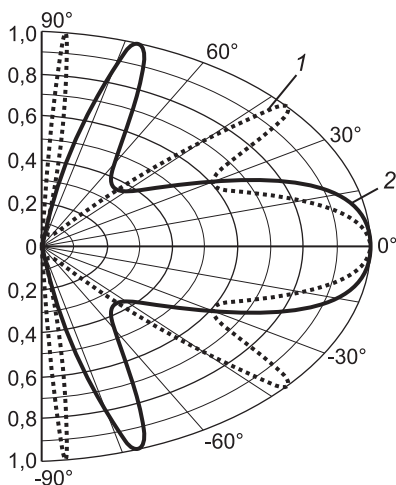
Весьма высокий, непреодолимый потенциальный барьер оказывается совершенно прозрачным для релятивистских электронов. Решение уравнения Дирака для графена [38] позволило определить коэффициент  $T$  прохождения как функцию угла  $\varphi$  падения частицы:

$$T = \frac{\cos^2 \varphi}{1 - \cos^2(q_x D) \sin^2 \varphi}, \quad (2.1)$$

$$q_x = \sqrt{(E - V_0)^2 / \hbar v_f^2 - k_y^2}. \quad (2.2)$$

Из построенной на основе (2.1) и (2.2) диаграммы прозрачности (рис. 2.2) следует, что коэффициент  $T$  — вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер при  $V > 2E$  может стремиться к единице. Максимальная прозрачность  $T$  наблюдается при  $\varphi = 0$ ; при иных углах существуют резонансы и отражения.

Вне зависимости от  $V$  любой  $p$ - $n$ -переход в графене прозрачен.



**Рис. 2.2.** Диаграмма прозрачности (коэффициента  $T$ ), вычисленная для барьера Клейна шириной  $D = 100$  нм. Принято: энергия электронов  $\mathcal{E}$  приравнена соответствующей энергии Ферми  $\mathcal{E}_f \approx 80$  мэВ; концентрация электронов  $n^* = 0,5 \cdot 10^{12}$  см $^{-2}$ ; концентрация дырок:  $P^* = 1 \cdot 10^{12}$  см $^{-2}$  (кривая 1,  $V_{01} = 200$  мэВ),  $P^* = 3 \cdot 10^{12}$  см $^{-2}$  (кривая 2,  $V_{01} = 285$  мэВ)

Общепринятое объяснение парадокса лежит в плоскости квантовой теории поля. Так, уравнение Дирака описывает не движение отдельной частицы, а эволюцию во времени квантового поля, в котором будут присутствовать и античастицы. Поэтому при наличии сильных полей будет происходить рождение пар, и вновь родившиеся частицы могут возникать и за барьером.

Парадокс Клейна в рамках квантовой теории поля был подвергнут компьютерному моделированию, в результате которого выяснилось, что на самом деле электрон полностью отражается от барьера, а в барьере создаются электрон-позитронные пары [39].

**Эффект дрожания электронов.** Следствием колебательного взаимодействия частиц и античастиц является эффект *Zitterbewegung* (*дрожащего движения, нем.*), предсказанный Шрёдингером в 1930 г. Экспериментально эффект дрожащего движения никогда не наблюдался

вследствие чрезвычайно высокой скорости таких взаимодействий. Но этот эффект, как и парадокс Клейна, удалось (1993 г. [40]) отождествить с уравнением Дирака, а дрожащее движение увидеть в современном микроскопе высокого разрешения, придя к пониманию сути минимума проводимости в графене, наблюдаемого даже при нулевой концентрации носителей тока.

Список феноменов, выходящих за рамки обычных представлений физики конденсированных сред и наблюдаемых только у графена, продолжает увеличиваться. Интерпретация этих феноменов возможна с помощью КЭД или, точнее, в рамках ее конвергенции с физикой конденсированных сред [34], поскольку транспортные свойства реальных графеновых структур оказались сложнее представлений квантовой электродинамики и некоторые основные вопросы теории графена до сих пор остаются без ответа [16].

Вместе с тем, модификация КЭД привела к прогнозированию, обнаружению в графене и пониманию механизмов полупевого эффекта Холла, квантового продуцирования частиц по Швингеру, взаимодействий адсорбатов на поверхности графена силами Казимира и т. д. [19].

**Прикладная электродинамика графена** положила начало новому этапу изучения фундаментальной природы элементарных частиц. Например, специфика электропроводности графена [43, 44] заключается в существовании минимальной удельной проводимости, амбиполярности и наличии квантового эффекта Холла. Эти феномены КЭД проявляются в обычных условиях.

**Квантовый эффект Холла. Классика.** Как известно, классический эффект Холла (1879 г.) заключается в возникновении поперечной разности потенциалов  $V_H$  при помещении проводника с постоянным током  $I$  в слабое магнитное поле  $B$  (рис. 2.3). Критерием малости поля является условие, что носители не будут двигаться по циклоиде.

Через брусок в слабом магнитном поле  $B$  под действием напряженности  $E$  течет ток  $I$ . Магнитное поле будет отклонять носители тока от их движения к одной

из граней бруска. Сила Лоренца приведет к накоплению отрицательного заряда возле одной из граней бруска и положительного возле противоположной.

Накопление заряда будет продолжаться до тех пор, пока возникшее поперечное поле зарядов  $E_1$  не компенсирует магнитную составляющую силы Лоренца:

$$eE_1 = evB, \quad (2.3)$$

откуда

$$E_1 = vB. \quad (2.4)$$

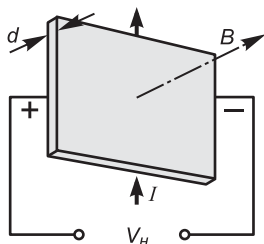


Рис. 2.3. Эффект Холла

Плотность поперечного тока составит

$$j = n^*ev, \quad (2.5)$$

откуда

$$v = \frac{j}{n^*e}. \quad (2.6)$$

Из (2.4) и (2.6) следует:

$$E_1 = \frac{jB}{n^*e} = R_H jB. \quad (2.7)$$

Коэффициент

$$R_H = \frac{1}{n^*e} \quad (2.8)$$

размерностью  $[\text{м}^3/\text{кул}]$  — постоянная Холла — не зависит от размеров образца. Знак  $R_H$  совпадает со знаком носителей тока.

Концентрация  $n^*$  и подвижность  $\mu$  определяют удельную проводимость  $\sigma$ :

$$\sigma = n^* \cdot e \cdot \mu. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) видно, что, измеряя  $R_H$  материалов, можно найти знак, концентрацию  $n^*$  и подвижность  $\mu$  носителей тока.

Дифференциальная форма закона Ома позволяет записать выражение для плотности поперечного тока в виде

$$j = \sigma_{xy} E_1. \quad (2.10)$$

Из (2.7) находим еще одно выражение для такой плотности:

$$j = \frac{n^* e}{B} E_1. \quad (2.11)$$

Сопоставив (2.10) и (2.11), можно найти удельную проводимость  $\sigma_{xy}$  [(Ом·м)<sup>-1</sup>]

$$\sigma_{xy} = \frac{n^* e}{B}. \quad (2.12)$$

Экспериментальные проверки формулы (2.12) и зависимостей  $R_H$  от индукции  $B$  привели к обнаружению квантового эффекта Холла.

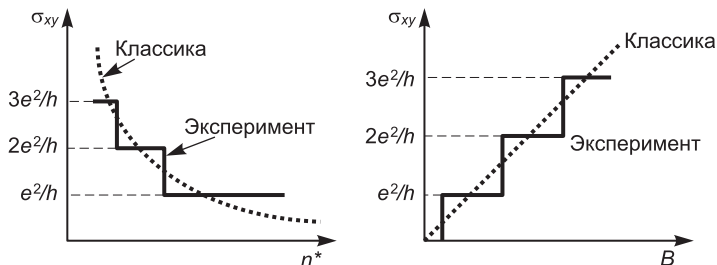
**Квантовый эффект Холла. Константа Клитцинга.** Квантовый эффект Холла (КЭХ) — это квантование поперечной проводимости двумерного электронного газа в сильных магнитных полях при низких температурах. Измерения при  $T \sim 5$  К показали (фон Клитцинг [45]), что холловская проводимость  $\sigma_{xy}$  меняется ступенчато с ростом  $B$  и концентрации  $n^*$  (рис. 2.4). Каждая ступенька соответствует приращению  $\sigma_{xy}$  на величину кванта проводимости

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{h}, \quad (2.13)$$

что соответствует кванту резистивности

$$R_k = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{h}{e^2} = 25\,812,807\,449 \text{ Ом}, \quad (2.14)$$

величине, называемой *константой Клитцинга*.



**Рис. 2.4.** Ступенчатые зависимости поперечной проводимости  $\sigma_{xy}$  от индукции  $B$  и концентрации  $n^*$

Точность определения ступенек и их соответствие кратным значениям  $N\sigma_0$  ( $N$  — целые числа) составляют 7–9 значащих цифр. Удовлетворительной теории, объясняющей такую точность, до сих пор не существует.

Фон Клитцинг за открытие квантового эффекта Холла получил в 1985 г. Нобелевскую премию.

**Квантовый эффект Холла в графене** наблюдается в обычных условиях: при комнатной температуре и магнитных полях 20 Т и выше (рис. 2.5) [35].

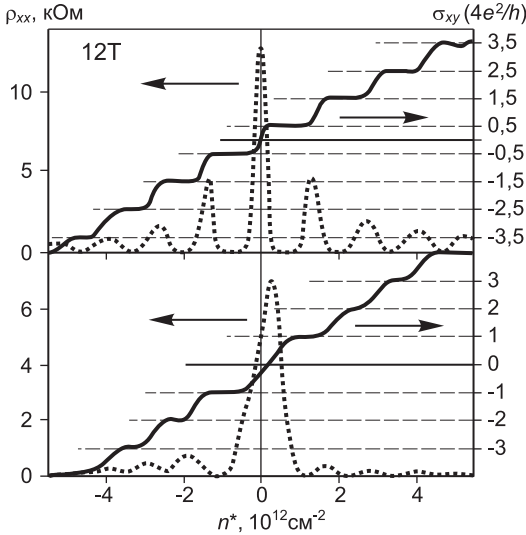
Измерения поперечного удельного сопротивления Холла

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{B}{n^*e} \quad (2.15)$$

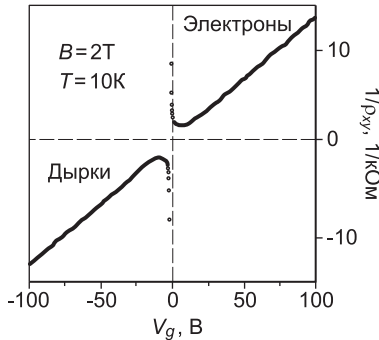
(см. рис. 2.5, 2.6) демонстрируют амбиполярность вольт-амперной характеристики графена.

**Амбиполярность** в графене — новое физическое явление. Оно проявляется в том, что электроны и дырки переносят ток вместе, являясь хиральными, имеют полуцелые спиновые показатели, разные по знакам, и располагаются в соседних, смежных долинах — между точками Дирака [47].

Механизм амбиполярной электропроводности обусловлен взаимным сопряжением электронов и дырок и связанными с этим сопряжением свойствами графена как полуметалла [15, 41].

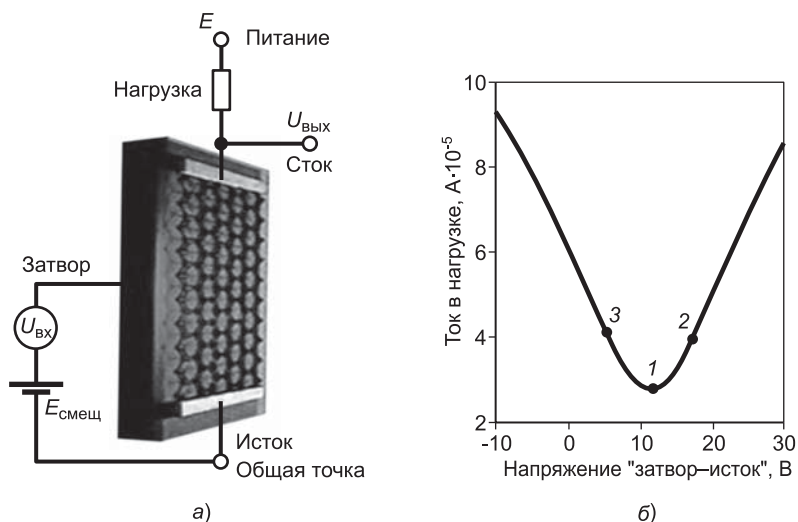


**Рис. 2.5.** Экспериментально полученные [35, 36] зависимости поперечной проводимости  $\sigma_{xy}$  (в единицах  $\sigma_{\min}$ ) и амбиполярной резистивности  $\rho_{xx}$  (в кОм·м) от концентрации (в единицах  $10^{12} \text{ см}^{-2}$ ) для однослойного (вверху) и двуслойного (внизу) графена. Максимумы амбиполярной резистивности соответствуют трапецевидным переходам между ступеньками  $\sigma_{xy}$



**Рис. 2.6.** Экспериментальное доказательство амбиполярности графена. Знак поперечной проводимости (удельного сопротивления Холла (кОм·м)) показывает тип носителей тока

Амбиполярность означает возможность управления типом носителей разного знака (путем переключения электроны  $\leftrightarrow$  дырки) и является замечательным свойством вольт-амперной характеристики транзисторного включения графена (рис. 2.7, б)



**Рис. 2.7.** Амбиполярность графена:

*а* — транзисторное включение графенового листа;

*б* — амбиполярная вольт-амперная характеристика.

Адаптировано из <http://www oleny.ru/images/news/AUPGU>

**Проводимость графена.** Руководствуясь дифференциальной формой закона Ома, удельную проводимость  $\sigma$  можно связать с плотностью тока  $j$  и напряженностью электрического поля  $E$ , приложенного к монослою графена:

$$j = \sigma \cdot E. \quad (2.16)$$

Величина, обратная  $\sigma$  и называемая удельным сопротивлением,

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (2.17)$$

имеет размерность [Ом · м].

Концентрацией и типом носителей  $n^*$  можно управлять, используя конденсаторное включение графена (рис. 2.8).

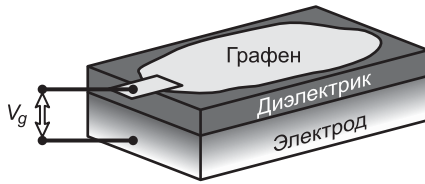


Рис. 2.8. Конденсаторное включение графена (изображение взято из [42])

Изменяя напряжение  $V_g$  на электроде-затворе (рис. 2.9), можно управлять концентрацией носителей тока в пределах

$$0 \leq n^* < (10^{13} - 10^{14}) \text{ см}^{-2}.$$

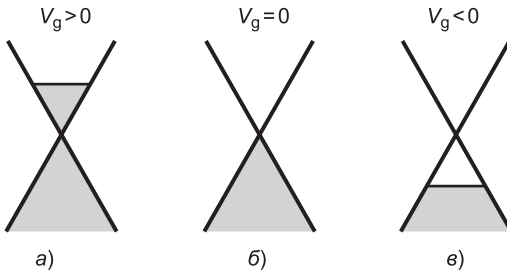


Рис. 2.9. Управление концентрацией и проводимостью (типом носителей заряда): *а* — электронная проводимость (частично заполнен верхний конус Дирака); *б* — нулевая концентрация носителей заряда (точка Дирака); *в* — дырочная проводимость (носители сосредоточены в нижнем конусе Дирака)

Специфика электропроводности графена [43, 46] проявляется, как было сказано выше, в существовании минимальной удельной проводимости.

Оказалось [43, 46], что независимо от концентрации носителей удельная проводимость никогда не падает

ниже значения

$$\sigma_{\min} = \frac{4e^2}{h}, \quad (2.18)$$

кратного кванту поперечной проводимости Холла  $\sigma_0 = \sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}$  и равного

$$\sigma_{\min} = 4\sigma_{xy}. \quad (2.19)$$

**Минимальная удельная проводимость**  $\sigma_{\min}$  является пределом, ниже которого в графене  $\sigma$  не может опуститься, даже при нулевой концентрации носителей заряда. Эта величина не зависит от дефектов и количества слоев в графене [43] (рис. 2.10).

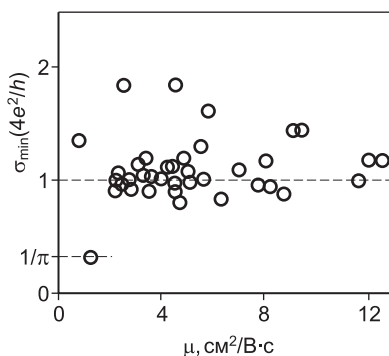
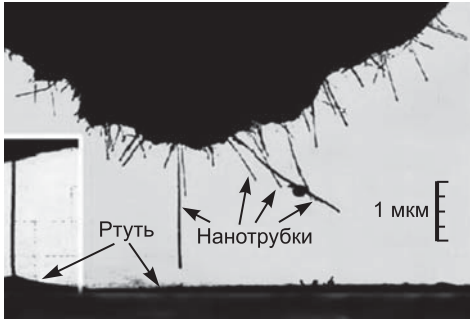


Рис. 2.10. Минимум удельной проводимости (эксперимент, [43])

**Проводимость нанорезистора.** Имея выражение для кванта  $\sigma_0$ , логично предположить, что проводимость нанорезистора не должна зависеть от его длины и площади его поперечного сечения, а транспорт тока не должен сопровождаться выделением тепла. И действительно, такой квантовой («баллистической») проводимостью обладают нанотрубки, ленты графена и других двумерных материалов.

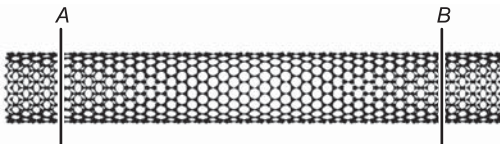
**Эксперимент.** Квантовая проводимость впервые наблюдалась в экспериментах с углеродными нанотрубками (УНТ), когда измеряли зависимость сопротивления

от их длины и диаметра, погружая УНТ в ртуть [48] (рис. 2.11).



**Рис. 2.11.** Электрод с выходящими из него углеродными нанотрубками нависает над поверхностью ртути, к которой приближается одна из нанотрубок [48]. Размеры нанотрубок: диаметр — от 1,4 до 50 нм, длина — от 1 до 5 мкм. Несмотря на такой большой разброс в размерах, сопротивление всех нанотрубок составляло около 12,9 кОм

*Эвристический прием вычисления баллистической проводимости  $R_R$  описан в [49]. Полагаем длину нанотрубки (рис. 2.12) меньшей длины свободного пробега электрона проводимости. Между сечениями  $A$  и  $B$  приложено напряжение  $U$ , а ток равен  $I$ .*



**Рис. 2.12.** Баллистическое прохождение электрона через сечения  $A$  и  $B$  нанотрубки

Так как энергия не рассеивается, изменение энергии  $\Delta E$  электрона между сечениями  $A$  и  $B$  составляет

$$\Delta E = eU. \tag{2.20}$$

Это изменение энергии электрона произошло за интервал времени  $\Delta t$ , равный времени пролета между

сечениями  $A$  и  $B$ . Из (2.20) следует, что

$$U = \frac{\Delta E}{e}. \quad (2.21)$$

Соотношение неопределенностей накладывает ограничения на изменения  $\Delta E$  и  $\Delta t$ :

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h. \quad (2.22)$$

Из (2.22) и (2.21) следует:

$$\Delta E = \frac{h}{\Delta t}, \quad (2.23)$$

$$U = \frac{h}{\Delta t \cdot e}. \quad (2.24)$$

Ток  $I$  между сечениями  $A$  и  $A$  определим в предположении, что в нанотрубке — одномерной квантовой структуре, подобной атому гелия, могут уживаться только два электрона, обладающие разными значениями спина. Поэтому

$$I = \frac{2e}{\Delta t}, \quad (2.25)$$

$$R_R = \frac{U}{I} = \frac{h}{2e^2} = \frac{R_k}{2}, \quad (2.26)$$

что соответствует величине  $R_R \approx 12,906$  кОм, близкой к значениям, полученным при эксперименте.

**Плотность тока в нанорезисторах.** Так как при баллистическом прохождении тока нагрев отсутствует, нанорезисторы (в частности, УНТ) способны пропускать токи огромной плотности — более  $10^7$  А/см<sup>2</sup>. Если бы у УНТ была обычная (не баллистическая) проводимость, то при токах аналогичной плотности их температура выросла бы до 20 000 К, что гораздо выше температуры сгорания УНТ (700 К).

Таким образом, при уменьшении элементов до наноразмеров, наносистемы перестают нагреваться!

**Константы мироздания.** Лабораторные опыты с графеном позволяют воочию наблюдать величины, завися-

щие только от фундаментальных констант. Таковыми являются:

- минимальная величина кванта проводимости

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{h},$$

- константа Клитцинга

$$R_k = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{h}{e^2} = 25\,812,807\,449 \text{ Ом.}$$

Значение баллистической проводимости нанорезистора  $\sigma_R = N \cdot \sigma_0$  тоже оказалось кратным  $\sigma_0$  при  $N = 2$ , т. е.

$$\sigma_R = 2\sigma_0, \tag{2.27}$$

$$R_R = \frac{1}{\sigma_R} \approx 12\,906 \text{ Ом.} \tag{2.28}$$

Таким образом, величины  $\sigma_0$ ,  $\sigma_R$  и  $R_R$  определяются через

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Константа Клитцинга связана с импедансом свободного пространства

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376 \text{ Ом} \tag{2.29}$$

следующим образом:

$$R_k = \frac{Z}{2\alpha}. \tag{2.30}$$

В знаменателе выражения (2.30) стоит величина еще одной константы мироздания — постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

**Постоянная  $\alpha$  как объект прикладной КЭД.** Перед нами (рис. 2.13) моноатомный слой графена на прозрачной подложке. Этот слой не только прозрачен и физически феноменален. В нем заключена тайна мироздания!



**Рис. 2.13.** Моноатомный слой графена на гибкой прозрачной подложке. Фото [50]

**Непрозрачность.** Как показал эксперимент [51], просвечивание графена «видит» константу мироздания. Несмотря на то что слой графена является самой тонкой материей во Вселенной, оказалось, что этот слой поглощает 2,3% проходящего света (парадоксально много!).

Причина и величина этой «непрозрачности» связаны с универсальной динамической проводимостью графена, которая обуславливает в определенном оптическом диапазоне постоянное безразмерное значение, зависящее только от фундаментальной константы, именуемой «Альфа», — постоянной тонкой структуры (ПТС):

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (2.31)$$

Альфа имеет огромное значение в квантовой электродинамике и теории элементарных частиц.

Величина поглощения монослоя графена, равная 2,3%, была теоретически предсказана в [52]. Подтвержденная экспериментально [51] связь непрозрачности с ПТС оказалась простым соотношением

$$2,3\% \approx \frac{\alpha}{\pi}. \quad (2.32)$$

Причина связи (2.32) состоит в том, что носители тока в графене ведут себя так, как если бы у них не было массы.

**Постоянная тонкой структуры (ПТС)** введена в 1916 г. Зоммерфельдом (1868–1951) для описания дуплетного расщепления энергетических уровней водородоподобного атома модели Бора. Такое расщепление называется тонкой структурой спектра, отсюда и название константы [53]. Позднее выяснилось, что оно вызвано релятивистским взаимодействием между орбитальным и спиновым моментами электрона.

ПТС — безразмерная величина, не зависящая от системы единиц.

В физике конденсированного состояния очень немного величин, которые зависят лишь от фундаментальных констант и не зависят от материальных параметров.

Это означает, что даже для высокоэнергичных фотонов видимого света постоянную тонкой структуры можно измерять через величину поглощения света мономолекулярным слоем графита.

Р. Фейнман называл ПТС «одной из величайших проклятых тайн физики»: «Альфа — магическое число, которое приходит к нам без какого-либо понимания его человеком».

**Взгляд во Вселенную.** Эксперименты с графеном могут доказать гипотезу о компактификации измерений и тем самым подтвердить теорию струн [34–36].

В настоящее время значение Альфы известно с точностью не хуже 15-го знака:

$$\alpha = \frac{1}{137,036009823754683675307501201348} \cdot \quad (2.33)$$

При других значениях ПТС было бы невозможным существование стабильной материи, жизнь не смогла бы возникнуть. Например, если бы величина  $\alpha$  возросла на 4%, то производство углерода внутри звезд было бы невозможно.

Если абсолютная величина  $\alpha$  увеличится на 0,1, то внутри звезд не смогут протекать процессы термоядерного синтеза.

Но... постоянны ли  $\alpha$  и  $c$ ?

**Константы  $\alpha$  и  $c$  медленно меняются!** В Западной Африке (Габон, Oklo) существует единственный в ми-

ре естественный ядерный реактор, который случайно образовался 2 млрд лет назад (по космическим меркам — вчера) в концентрированных урановых рудах глубоко под землей.

Исследования показали, что за 2 млрд лет, пока работал этот реактор, Альфа уменьшилась в восьмом знаке после запятой, а скорость света, соответственно, возросла.

По сравнению с известной в настоящее время точностью знания Альфы обнаруженное изменение — огромно. Это повышает шансы на признание теории струн, чреватое пересмотром моделей образования Вселенной.

**Графен и теория струн.** Окружающая нас действительность, согласно специальной теории относительности, является четырехмерной. В то же время теория струн предусматривает существование 26 или хотя бы 11 измерений.

Свойства графена не противоречат гипотезе о компактификации измерений, с помощью которой теорию струн можно вписать в наблюдаемый нами мир. Эта гипотеза предполагает, что остальные измерения существуют на исключительно малых масштабах, и мы просто их не наблюдаем. В процессе компактификации пространств образуется масса. Масса не появляется и не исчезает, а просто переходит в другие измерения (например, масса протона в несколько десятков раз больше массы составляющих его кварков).

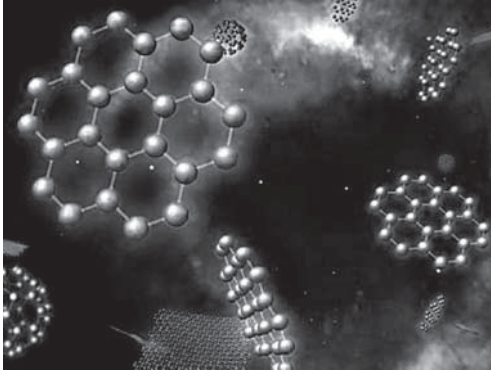
Если гипотеза о компактификации верна, то невесомые электроны в графене будут приобретать массу при сворачивании графена в трубку, поскольку смогут пролетать через ось трубки (т. е. при компактификации пространства 2D в 1D).

Эксперименты с графеном могут доказать одну из самых многообещающих теорий в современной физике — теорию струн.

Но насколько нов сам графен?

**Графен в межзвездных мирах.** С помощью космического телескопа Spitzer были обнаружены и идентифицированы [54] характерные признаки графена в двух

небольших галактиках, называемых Магеллановыми облаками, в материале, выбрасываемом умирающими звездами (рис. 2.14).

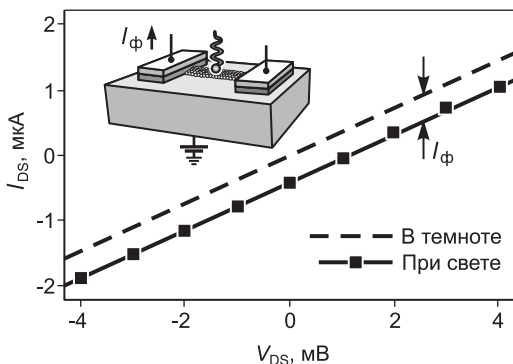


**Рис. 2.14.** В представлении художника НАСА, планетарная туманность Helix содержит графен и другие формы углерода, выделяемые облаками умирающей звезды. Изображение взято из <http://cdn.ph.upi.com/sv/i/UPI-27181313529041/2011/1/13135271131507/Unusual-form-of-carbon-seen-in-space>

**Графен и электромагнитные волны.** Взаимодействие 2D-материалов с электромагнитным излучением, являясь важнейшим аспектом прикладной КЭД, оказалось в фокусе внимания таких новых научных направлений, как фотоника, метаматериалы и плазмоника. Предваряя более подробное рассмотрение вопросов конвергенции с этими направлениями, охарактеризуем простые эксперименты с графеном.

**Амбиполярный фотодетектор.** Простейшая структура МДП-транзистора с графеновым каналом может служить основой для построения фотодетектора терагерцевого диапазона (рис. 2.15) [55].

Несмотря на невысокую эффективность (2%), изображенный на рис. 2.15 фотодетектор оказался работоспособным в диапазоне частот до 40 ГГц вследствие присущих графену транспортных свойств квазичастиц.



**Рис. 2.15.** Две вольт-амперные характеристики фотоприемника. Фототок (отклик на световой сигнал) — зазор между характеристиками вследствие воздействия лазерного луча на монослой графена (изогнутая (на цв. вкл. — красная) стрелка на верхнем рисунке слева). Изображение взято из [55]

**Плазмоны Дирака.** Плазменные колебания являются коллективными колебаниями свободного электронного газа. Поверхностные плазмоны в графене (плазмоны Дирака) сильно взаимодействуют с терагерцевыми и субтерагерцевыми колебаниями, приводя к образованию еще одной разновидности квазичастиц — поляритонов, которые ответственны за взаимодействие с терагерцевым излучением. Поляритоны возникают при взаимодействии световых фотонов с плазмонами и могут поддерживать терагерцевые колебания миллиметрового и ближнего ИК-диапазона волн ( $f = 0,3 - 400$  ТГц,  $\lambda = 1000$  мкм– $0,7$  мкм).

**Резонансное возбуждение** возникает в случае совпадения частоты света и собственной частоты колебаний плазмонов на поверхности графена. Резонансное возбуждение приводит к увеличению амплитуды колебаний и, соответственно, количества поглощенного света.

Собственная частота колебаний зависит от ширины графеновой наноленты. Варьируя эту ширину, можно изменять частоту плазмон-поляритонных колебаний и настраивать их в резонанс с частотой внешнего

излучения. При этом количество свободных носителей тока определяет силу связи между световой волной и плазмонами.

Плазмоны традиционно вспоминают в связи с излучением оптического диапазона. Однако графен уникален тем, что свободные носители заряда в нем движутся лишь в двух измерениях, поэтому плазмоны в этом материале могут существовать и при гораздо более низких частотах. Миллиметровое излучение имеет длины волн в диапазоне от 1 до 0,03 мм; а существующая техника позволяет сделать ширину наноленты не более 1 мкм, что много меньше длин волн миллиметрового диапазона волн и ИК терагерцевых колебаний.

Таким образом, графен по отношению к миллиметровому и терагерцевому диапазонам волн является метаматериалом (см. гл. 8) и средой для управления плазмонами [56].

**Возможные применения** плазмонов связаны с межсоединениями в технике терагерцевых чипов (в режиме 100 ТГц), в то время как обычные провода обладают большими потерями уже при 10 ГГц). Для литографии и микроскопии высокого разрешения плазмоны в графене перспективны из-за их чрезвычайно малых длин волн.

## СВОЙСТВА И ПАРАДОКСЫ ГРАФЕНА

**Семейство графена.** Графен оказался «прародителем» наноуглеродных структур. Двумерный (2D) лист графена представляет собой «строительный блок» для других материалов с  $sp^2$ -связями. Наиболее распространенная форма углерода — графит — может рассматриваться как стопка листов графена, относительно слабо связанных между собой силами Ван-дер-Ваальса. Широко известные углеродные наноструктуры — нанотрубки и фуллерены — можно рассматривать как свернутый в трубку лист графена или, соответственно, как замощение сферы решеткой графена. Таким образом, графен как ключевая квазидвумерная углеродная наноструктура с точки зрения классификации является основой трехмерного графита, квазиодномерных нанотрубок и квазинульмерных фуллеренов.

Из листа графена можно построить 1D- или 2D-ленты или уложить листы в 3D-структуру графита. В последнем случае для создания пластинки графита толщиной 1 мм потребуется 3 млн листов графена.

**Прародитель химических модификаций.** Три наиболее значимые из них — графан, флюорографен и оксид графена — радикально меняют свойства исходного 2D-материала. И вот каким образом.

**Графан** (в узлы графена добавлены атомы водорода) — диэлектрик, сохраняющий исходную гексагональную структуру. Накопитель водорода.

**Флюорографен** (в узлы графена добавлены атомы фтора) — полупроводник с шириной запрещенной зоны до 3 эВ и удельным сопротивлением свыше 1000 Ом·м. Термически устойчив до 400°C. Химически так же ста-

билен, как тефлон. Механически прочен (модуль Юнга 0,3 ТПа).

**Оксид графена** (комбинация атомов углерода, кислорода и водорода) — возможная основа НЭМС (содержит молекулярные «крючки»).

**Уникальные свойства графена** объясняются особенностями коллективного взаимодействия электронов в его кристаллической решетке. При таком взаимодействии электроны ведут себя как безмассовые переносчики тока.

Наноматериалы принято характеризовать отношением площади поверхности к массе. Для однослойного графена (самого тонкого во Вселенной материала) этот показатель составляет  $\approx 2000 \text{ м}^2/\text{г}$  [57].

**Гигантская прочность.** Графен — самый прочный материал, который когда-либо измерялся (в 100 раз прочнее стали, тверже алмаза). Прочность одного слоя соответствует модулю Юнга  $\sim 1,0$  ТПа. Коэффициент жесткости, равный силе, вызывающей единичное перемещение в характерной точке (чаще всего в точке приложения силы), для графена превышает такой же показатель для алмаза. Прочность на разрыв составляет  $\approx 42 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1}$  — это экспериментально подтвержденный теоретический предел [58].

**Эластичность.** Несмотря на невероятную прочность, графен обладает гибкостью и может подвергаться 20% -й деформации без нарушения кристаллической решетки [59]. Вместе с тем графен парадоксально сочетает способность сминаться в складки (как ткань) и хрупкость (как перенапряженный хрусталь). Этот парадокс пока слабо изучен [60].

**Теплопроводность монослоя** составляет величину  $\sim 5000 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$  [61, 62], что в 10 раз эффективнее меди и на три порядка выше, чем у композитов, содержащих графен. Обладая исключительно высокой теплопроводностью, графен может служить теплоотводом для интегральных схем, в которых разогрев уже давно является серьезной проблемой.

**Подвижность.** Важнейшая характеристика двумерного электронного газа — подвижность носителей заряда  $\mu$ , характеризует пригодность материала для современной электроники. Огромные значения  $\mu$  обусловлены нулевой массой носителей заряда — амбиполярных пар «электрон–дырка» в графене.

**Максимальная подвижность** носителей тока одного слоя графена при гелиевой температуре составляет

$$\mu \sim 10^6 - 10^7 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}. \quad (3.1)$$

При комнатной температуре в однослойном «подвешенном» графене подвижность равна  $200\,000 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  [63]. В случае размещения на поверхности  $\text{SiO}_2$  подвижность носителей заряда в графене составляет  $40\,000 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ , что в 27 раз больше соответствующего показателя для кремния ( $1500 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ).

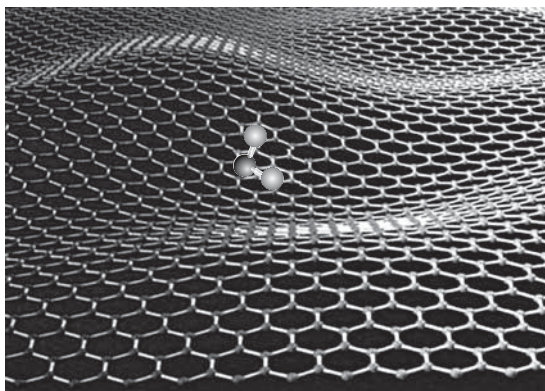
Рекордные значения подвижности и средней длины свободного (без столкновений) пробега носителей в графене свидетельствуют о том, что электроны при комнатной температуре могут перемещаться в графене на субмикронные расстояния без рассеяния — баллистически.

**Допустимая плотность тока** в графене на шесть порядков превышает этот показатель для меди, что объясняется баллистическим токопрохождением, почти не связанным с выделением тепла. Баллистическая проводимость не критична к материалу подложки.

Огромные значения подвижности, допустимой плотности тока, наличие амбиполярной и баллистической проводимости и специфика электропроводности делают графен многообещающим материалом для будущих наноэлектронных систем [15, 63].

**Атомарная чувствительность.** В 2007 г. команда Гейма и Новоселова достигла максимальной чувствительности сенсора на основе графена, способного обнаруживать единичную молекулу [64]. Экспериментально это было подтверждено на примере молекул двуокиси азота [65, 66], (рис. 3.1).

Графен чувствителен к материалам различной природы [16], таким как диэлектрики с высокой диэлектрической проницаемостью (high- $\kappa$ ), сверхпроводники, ферромагнетики, ДНК и т. д.



**Рис. 3.1.** Лист графена может обнаружить единичную молекулу ([http://www.rsc.org/images/GrapheneNO2-250\\_tcm18-95542.jpg](http://www.rsc.org/images/GrapheneNO2-250_tcm18-95542.jpg))  
(©Nat. Mater)

Сообщение [16] явилось началом дальнейших разработок графеновых датчиков для медицинских применений, радиационной защиты и систем обеспечения безопасности [67, 68].

**Мембранные свойства.** Неожиданным и беспрецедентным свойством моноатомного графена явилась его непроницаемость для газов, в том числе гелия [69].

Мембранные свойства технологически полученного пористого графена пока изучены слабо. Вместе с тем транспорт молекул и ионов (включая биологические) через графен со специальными порами уже продемонстрирован [70].

**Прозрачность монослоя** характеризуется коэффициентом оптического пропускания  $\sim 97,7\%$ . Оптическое поглощение ( $\sim 2,3\%$ ) самой тонкой материи во Вселенной оказалось связанным с базовыми физическими константами (см. гл. 2).

Несомненно, прозрачные и чувствительные слои графена перспективны для дисплеев, электронно-оптических систем, солнечных батарей. По мнению К. С. Новоселова [71], одним из первых применений графена «будет прозрачное проводящее покрытие, которое применяется в жидкокристаллических дисплеях, в солнечных батареях».

**Магнетизм монослоя.** Как показали эксперименты, электроны в графене находятся в поле с индукцией 300 Тл [80]. Этот огромный магнетизм был выявлен экспериментами по деформации решетки графена (см. далее рис. 4.8).

Приложение механического напряжения к листу графена создает гигантское псевдомагнитное поле, изменяющее длины связей между атомами и, следовательно, распределение электронов по квантованным орбитам — уровням Ландау.

**Уровни Ландау.** В классической физике электроны в магнитном поле движутся по циклотронным орбитам, имеющим форму окружности. В квантовой механике, однако, циклотронные орбиты квантуются, делясь на дискретные энергетические уровни (уровни Ландау). Количество электронов на каждом уровне зависит от силы магнитного поля — чем сильнее поле, тем на более высокие уровни «забираются» электроны и тем больше электронов на каждом уровне. Деформация графена, изменяя распределение электронов, создает гигантское внутреннее магнитное поле.

**Гигантское магнитное поле.** Наивысшее значение магнитного поля, полученного когда-либо в лаборатории, составляет 85 Тл. Превышение этой величины приводит к тому, что магниты разрушаются сами собой. В монослое привычного магнитного поля нет, но электроны все равно ведут себя так, как будто к ним приложено магнитное поле с невероятной индукцией в сотни тесла, что в десятки миллионов раз сильнее магнитного поля Земли.

**Магнетизм и эффект Фарадея.** Еще одним проявлением магнетизма монослоя является *гигантский эф-*

*фект* Фарадея. Как известно, эффект Фарадея (1845 г.) заключается в том, что при распространении линейно поляризованного света через оптически неактивное вещество, находящееся в магнитном поле, наблюдается вращение плоскости поляризации света.

Проходящее через изотропную среду линейно поляризованное излучение является суперпозицией двух право- и левополяризованных волн с противоположным направлением вращения.

Во внешнем магнитном поле показатели преломления для циркулярно право- и левополяризованного света становятся различными ( $n_+$  и  $n_-$ ).

Лево- и правополяризованные составляющие распространяются с разными фазовыми скоростями, приобретая разность хода, линейно зависящую от оптической длины пути  $l$ .

**Закон Верде** (M. Verdet; 1824–66): вещество, помещенное в магнитное поле, поворачивает плоскость поляризации света, распространяющегося по направлению поля, на угол

$$\theta = \nu l H, \quad (3.2)$$

где  $l$  — длина пути луча, м;

$H$  — напряженность магнитного поля, А/м;

$\nu$  — постоянная Верде (удельное магнитное вращение), рад/А, зависит от свойств вещества, длины волны излучения и температуры [81].

Гигантский эффект Фарадея заключается в величине угла поворота плоскости поляризации при прохождении электромагнитного излучения через один слой графена. Этот поворот при инфракрасном облучении составил  $\theta = 6^\circ$ , что на 1–2 порядка больше привычной нормы (рис. 3.2).

Причиной гигантского эффекта является циклотронный резонанс, заставляющий безмассовые фермионы двигаться по круговым орбитам в гигантском собственном магнитном поле с величиной магнитной индукции 7 Тл [111].

С помощью амбиполярного электрического поля графена можно менять частоту циклотронного резонанса

и переключать знак эффекта — амбиполярность. Такие оптические переключатели становятся сверхбыстродействующими и не требуют громоздких соленоидов — магнитов.

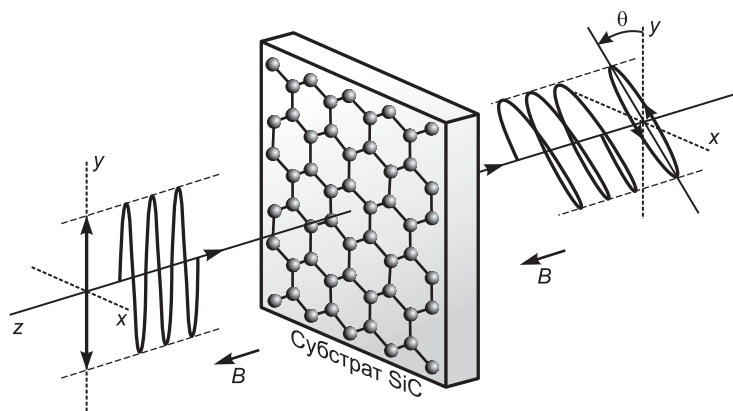


Рис. 3.2. Гигантский эффект Фарадея в графене

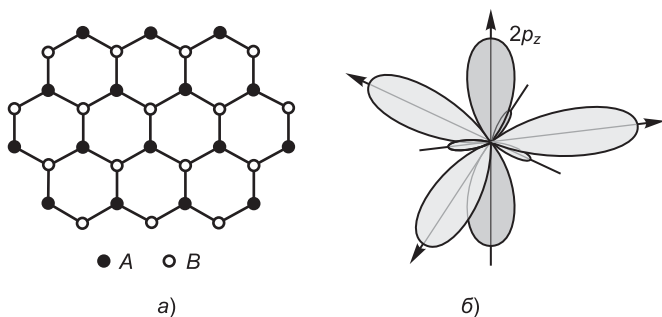
**Экстремальные поля.** Получение экстремально высоких магнитных полей обеспечивает новую основу физики конденсированных сред и открывает перспективы для важных практических приложений.

Какие еще сюрпризы графена ожидают нас?

# АТОМЫ В ГРАФЕНЕ

Как уже отмечалось, трехмерная структура графита имеет вид этажерки, составленной из 2D-слоев.

**Взаимодействие атомов в графене.** Каждый атом углерода в графене окружен тремя ближайшими соседями (рис. 4.1, см. также цв. вкл.) и обладает четырьмя валентными электронами. Три из них образуют  $sp^2$ -гибридизованные орбитали, расположенные в одной плоскости под углами  $120^\circ$  и формирующие ковалентные связи с соседними атомами (рис. 4.1, б). За низкоэнергетические электронные свойства графена отвечает четвертый электрон, представленный ориентированной перпендикулярно этой плоскости  $2p_z$ -орбиталью.



**Рис. 4.1.** Кристаллическая решетка графена: *а* — гексагональные «пчелиные соты» являются совокупностью двух треугольных подрешеток *A* и *B*; *б* — орбитали: три гибридизованные орбитали формируют ковалентные связи 2D-слоя; орбиталь  $2p_z$  перпендикулярна плоскости моноатомного слоя

**Неоднородности в гексагональных сетках** существенно изменяют свойства наноуглеродных структур. Например, узкий участок ленты (*ribbon*) графена («перешеек», рис. 4.2) превращает эту наноленту в полупроводник, формируя энергетический зазор — запрещенную зону. Ширина этого зазора тем больше, чем уже перешеек.

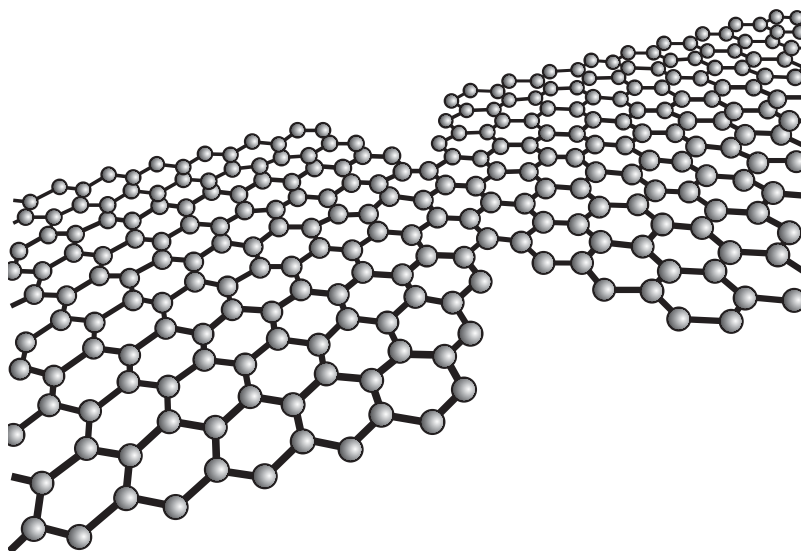


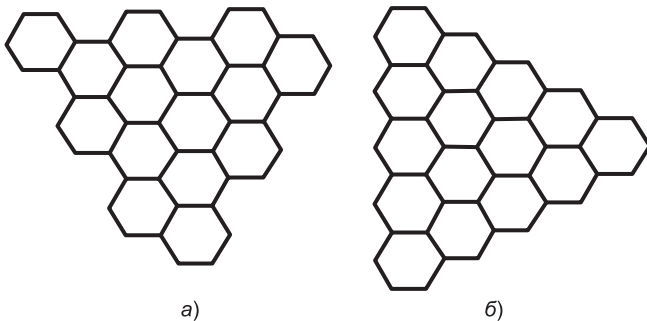
Рис. 4.2. Формирование энергетического зазора с помощью графеновой наноленты

**Графеновые наноленты** — узкие полоски графена с шириной порядка 10–100 нм. В отличие от более широких полосок наноленты обладают нелинейным законом дисперсии и полупроводниковыми свойствами из-за наличия запрещенной зоны, которая зависит от ширины ленты и расположения атомов на границах (см. рис. 4.2).

С помощью электронной литографии можно сузить графеновые участки вплоть до 20 нм. В этом случае из-за квантово-размерного эффекта ширина запрещенной зоны при ширине ленты 20 нм составляет всего 28 мэВ.

Зазор обратно пропорционален ширине наноленты, уменьшая которую можно увеличить зазор. Современная электронная литография при 20 нм находится на пределе разрешения, поэтому был предложен химический метод, позволяющий создать наноленты шириной менее 10 нм без использования литографии и травления [44].

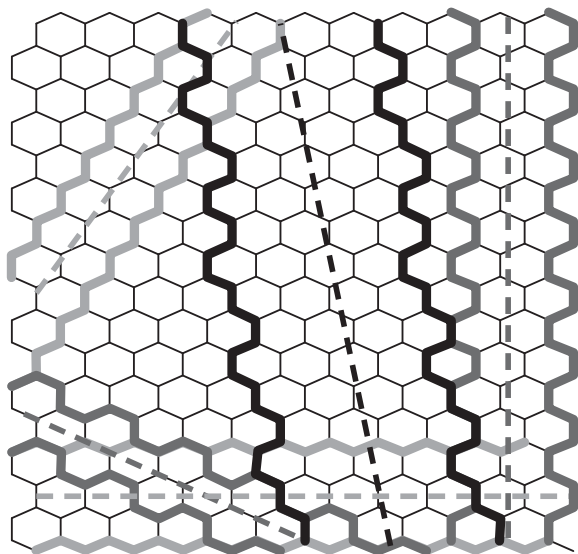
**Кромки гексагональных сеток.** Существуют две базовые разновидности кромок, определяющих квантово-размерные эффекты и свойства графеновых лент: кресло (рис. 4.3, а) и зигзаг (рис. 4.3, б).



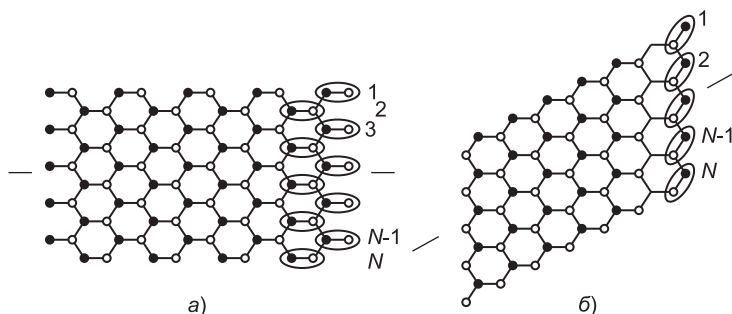
**Рис. 4.3.** Два базовых типа кромок графеновых лент: а — кромка типа «кресло»; б — кромка типа «зигзаг»

**Идеальные наноленты.** На рисунке 4.4 (см. также цв. вкл.) показано, как из бесконечного листа графена можно нарезать наноленты с разным расположением атомов на границах. Основной интерес при этом заключается в придании ленте различных, в том числе полупроводниковых, свойств.

Оказывается, что зигзаг-ленты (*zigzag*, англ., рис. 4.5, см. также цв. вкл.) не имеют запрещенной зоны, т. е. являются металлическими. Запрещенной зоной обладают наноленты типа «кресло» (*armchair*, англ.) в случае выполнения добавочного условия (см. ниже).



**Рис. 4.4.** Способы нарезки графеновой плоскости на наноленты: штриховые линии соответствуют центрам нанолент, красные границы соответствуют нехиральным нанолентам с границами типа «зигзаг», а зеленые — нехиральным типа «кресло»; синяя (хиральная) нанолента имеет смешанный тип границы



**Рис. 4.5.** Наноленты с границами в виде кресла (а) и зигзага (б)

**Условие существования запрещенной зоны.** На рисунке 4.5 (см. также цв. вкл.) показана лента типа «кресло». Обведены пары (АВ-димеры) атомов разных

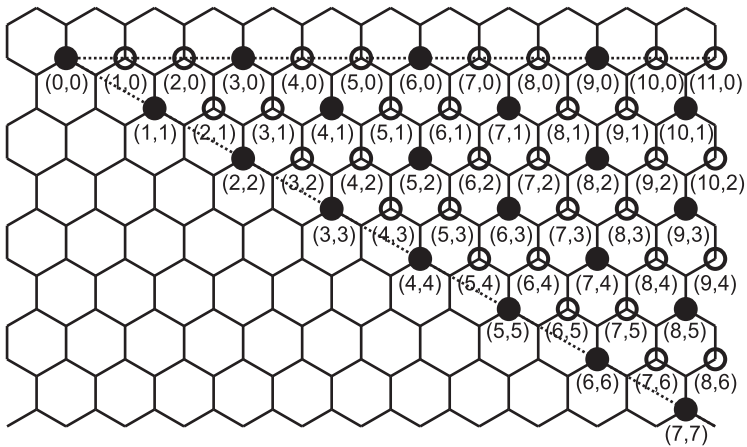
долин, расположенные на границе ленты и маркированные разными цветами.

Для существования запрещенной зоны число  $N$  таких димеров [73] должно удовлетворять условию:

$$N \neq (3M - 1),$$

где  $M$  — целое число.

**Маркированный образец с двумя типами кромок.** Каждый узел сетки такого нехирального образца маркирован показателями  $n, t$  (рис. 4.6).



**Рис. 4.6.** Нехиральный образец, обладающий двумя основными типами кромок: узлы маркированы индексами  $n, t$

Образец обладает двумя основными типами кромок. Атомы верхней и нижней горизонтальных границ расположены по типу зигзага. Атомы левой и правой вертикальных границ расположены по типу кресла.

В этом случае для тока, проходящего по горизонтальной оси образца, сквозь кресла, образец будет вести себя как полупроводник. При прохождении тока перпендикулярно оси ленты образец будет вести себя как металл.

Существует аналитическая модель [172], основанная на использовании уравнения Дирака для графена, с помощью которой можно оценить ширину запрещенных зон для идеальных (см. рис. 4.5) графеновых нанолент.

**Нехиральные наноленты и индексы  $n$ ,  $m$ .** Ленты нехиральны в двух случаях (см. рис. 4.6):

1) при  $(n, 0)$  — шестиугольники ориентированы параллельно оси ленты — зигзаг. В случае если  $m = 0$  и  $n$  кратно 3, лента является металлом;

2) при  $m = n$ , т. е.  $(n, m) = (n, n)$  шестиугольники ориентированы перпендикулярно оси ленты — кресло. Лента — полупроводник.

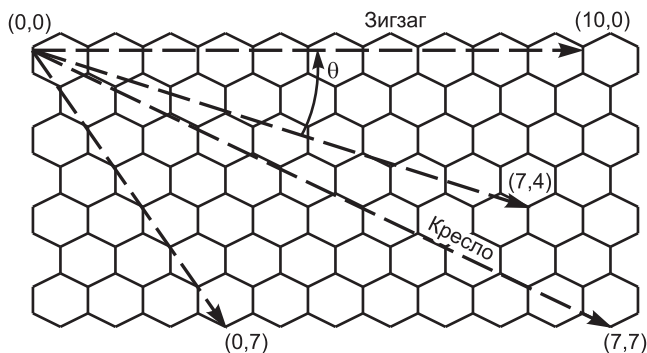
**Векторы, индексы и углы хиральности [74].** На рис. 4.7 показан вектор зигзага, проведенный горизонтально через узлы с хиральными индексами  $(n, 0)$ .

По отношению к этому вектору зигзага с  $\theta = 0$  отсчитывается угол  $\theta$  любого из других векторов, показанных на рис. 4.7 и называемых векторами свертки.

Вектор кресла (показан штрих-пунктиром) проходит через узлы с одинаковыми хиральными индексами  $(n, n)$ . Нетрудно видеть, что при этом  $\theta = 30^\circ$ .

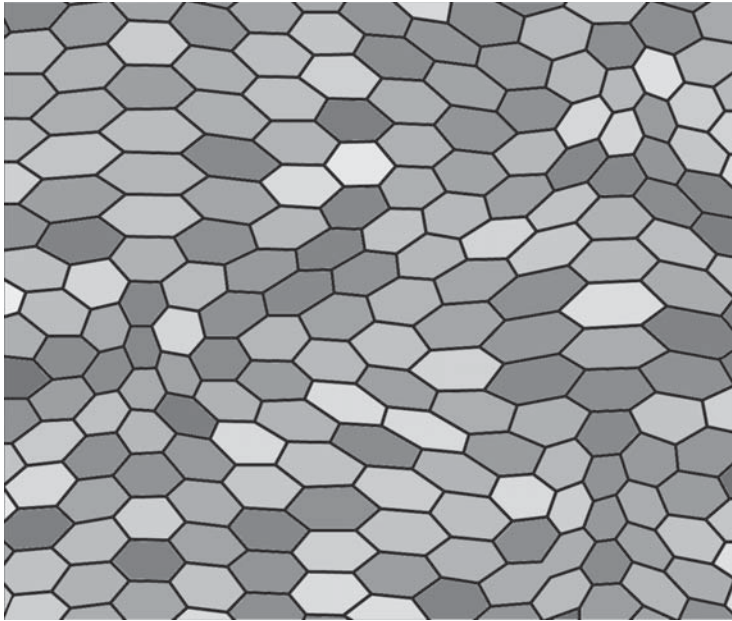
Хиральный вектор, расположенный между векторами зигзага и кресла, имеет индексы  $(n, m)$ , не равные друг другу и нулю, и угол  $0 < \theta < 30^\circ$ .

Наконец, вектор, проведенный через узлы с индексами  $(0, n)$ , имеет  $\theta = 60^\circ$ .



**Рис. 4.7.** Векторы свертки (хиральности):  $n, m$  — целые числа (хиральные индексы);  $\theta$  — хиральный угол между условной осью ленты и вектором зигзага (рисунок адаптирован из [74])

**Создание неоднородностей.** Квантово-размерные эффекты, создающие энергетические зазоры и другие феномены, возникают также при растяжении сетки\* (рис. 4.8), при внедрении 5- и 7-угольных ячеек (рис. 4.9), при химической модификации (графан, рис. 4.10, фторографен, оксид графена).



**Рис. 4.8.** Растягивание превращает графен в полупроводник

Появление пятиугольных и(или) семиугольных ячеек в гексагональной структуре резко меняет ее свойства. На рис. 4.9 эти «ячейки-гости» выстроились в линию. Подобного рода линейная неоднородность перспективна в качестве фильтра-отражателя для спинтронной селекции электронов нужной поляризации (см. гл. 11).

\* Графен может быть растянут на 20% без каких-либо последствий. Энергетический зазор открывается после приложения силы. Механизм открывания зазора имитирует влияние очень сильного магнитного поля на решетку. Зазор достаточен для использования в электронике.

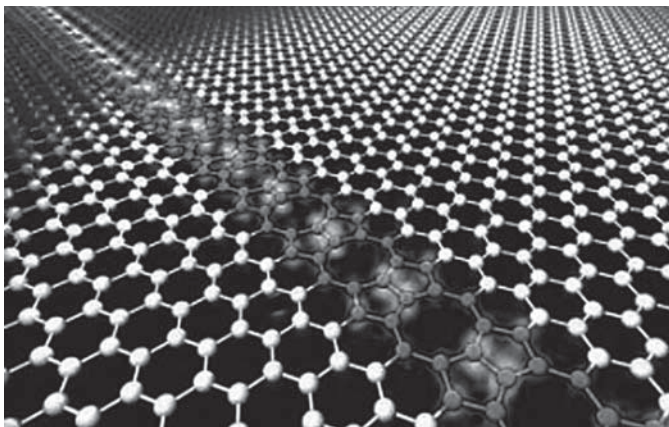


Рис. 4.9. Пяти- и семиугольные ячейки внедрены в гексагональную сетку

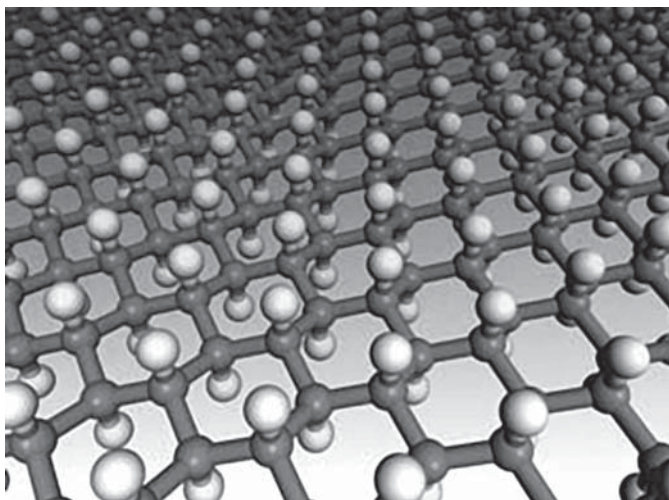
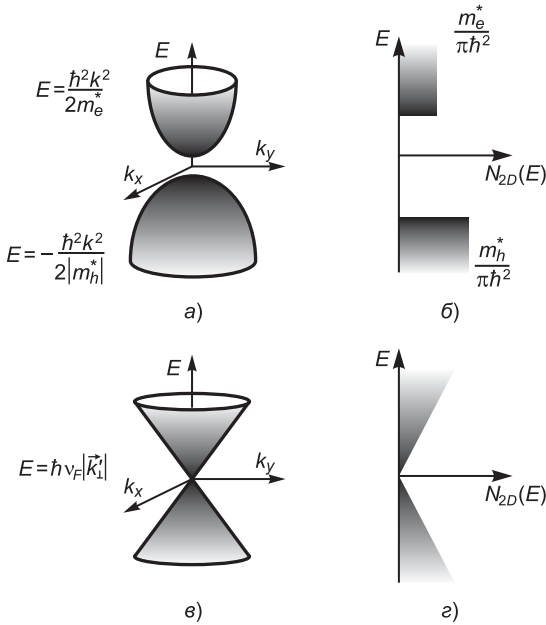


Рис. 4.10. Химическая модификация — графан: в узлы сетки графена добавлены атомы водорода. В отличие от прародителя графан оказался диэлектриком, сохраняющим исходную гексагональную структуру графена, отсюда возможность производства электронных устройств из единого материала — графена, модифицируемого химически

**Квазичастицы в новом ракурсе.** Необычность графена послужила отправной точкой для единообразного сравнения свойств фермионов различной физической природы.

На рис. 4.11 приводится сравнение зонной диаграммы графена (в 2D- и 3D-начертаниях) с соответствующими диаграммами обычных полупроводниковых структур.



**Рис. 4.11.** Зонные диаграммы полупроводниковых структур (а, б) и графена (в, г): а — параболическая форма зонной диаграммы полупроводника; б — зона валентных связей отделена от зоны проводимости энергетическим зазором; в — остроугольная форма зонной диаграммы графена; г — энергетический зазор отсутствует; электроны и дырки амбиполярны;  $N_{2D}$  — плотность носителей заряда (электроны, дырки);  $m_e^*$  — эффективная масса электронов;  $m_h^*$  — эффективная масса дырок

В полупроводниках носители заряда (электроны и дырки) взаимодействуют с периодическим полем кристаллической решетки, приводя к образованию квазичастиц (возбужденных состояний, ведущих себя как реальные

частицы). Энергия квазичастиц в твердом теле зависит от их момента и описывается их энергетическим состоянием, находящимся либо в заполненной валентной зоне, либо в относительно «пустой» зоне проводимости. Эти энергетические зоны разделены запрещенной зоной, в которой энергетические состояния отсутствуют.

Кристаллическая структура графена состоит из двух эквивалентных подрешеток, что приводит к образованию двух энергетических зон и двух «конических» точек на уровне нулевого заряда носителей  $K$  и  $K'$ , в которых валентная зона и зона проводимости соприкасаются. В результате носители заряда в графене ведут себя как фотоны, т. е. безмассовые квазичастицы с постоянной «эффективной» скоростью света (скоростью Ферми)  $v_F \approx 10^6$  м/с; при низких значениях энергии поведение квазичастиц описывается релятивистским уравнением Дирака. При этом электроны и дырки являются фермионами, т. е. частицами с полуцелым значением спина, и они заряжены. В настоящее время аналогов для таких безмассовых заряженных фермионов среди известных элементарных частиц нет.

Еще одной основой для сравнения могут являться конфигурации гамильтонианов для фермионов различной физической природы [16].

Носители в физике конденсированного состояния обычно описываются уравнением Шрёдингера для оператора  $\hat{p}$ . Операторы часто маркируются *циркумфлексом* — диакритическим знаком, называемым еще крышечкой или домиком.

Фермионы Шрёдингера, соответствующие рис. 4.11, *a* и *b*, имеют гамильтониан вида

$$\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m^*, \quad (4.1)$$

где  $m^*$  — эффективная масса квазичастицы;  $m_e^*$  — эффективная масса электронов,  $m_h^*$  — эффективная масса дырок;  $\hat{p}$  — оператор момента импульса квазичастицы.

Релятивистские частицы с нулевой массой, подчиняющиеся уравнению Дирака, имеют гамильтониан вида

$$\hat{H} = c\vec{\sigma}\hat{p}, \quad (4.2)$$

где  $c$  — скорость света;  $\vec{\sigma}$  — вектор с координатами

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (4.3)$$

определенными через матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Матрицы (4.4) введены Паули для описания спинового момента импульса элементарных частиц, т. е. квантового состояния, не связанного с перемещением частицы как целого. Спин измеряется в единицах  $\hbar$  и равен  $s = \hbar J$ , где  $J$  — целое или полуцелое спиновое квантовое число, которое обычно называют просто спином (в частности, у фермионов  $J = 1/2$ ).

Носители в графене — фермионы Дирака, соответствующие рис. 4.11,  $v$  и  $z$ , имеют точно такой же гамильтониан. 2D-матрицы Паули для псевдospина описывают две подрешетки гексагональной решетки графена. Подобно тому как реальный спин меняет направление своего вращения, псевдospин индицирует свою принадлежность к одной из подрешеток ( $A$  или  $B$ ) и, соответственно, типу долины.

Объединение двух листов графена в *двухслойный* материал приводит к формированию четырех энергетических зон, две из которых соприкасаются, благодаря чему такой материал по-прежнему не имеет запрещенной зоны. Но в отличие от однослойного графена носители заряда в двухслойном материале при приложении внешнего электрического поля могут иметь массу, что свидетельствует о возможности «открытия» запрещенной зоны и управления ее шириной.

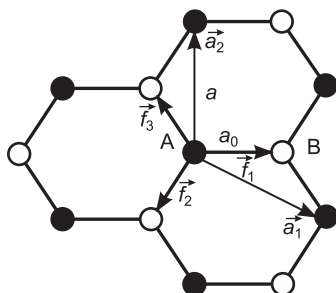
Двухслойный графен демонстрирует еще одну — массивную разновидность хиральных фермионов. Эта разновидность не имеет аналогов и описывается гамильтонианом, комбинирующим уравнения Дирака и Шрёдингера

для четырех подрешеток двуслойного графена:

$$\widehat{H} = \widehat{\sigma} \widehat{p}^2 / 2m^*. \quad (4.5)$$

**Кристаллическая решетка** графена представляет собой плоскость, состоящую из шестиугольных ячеек. Обратная решетка такого кристалла также гексагональна. В шестиугольных ячейках такой 2D-решетки чередуются атомы треугольных подрешеток  $A$  (маркированы черным цветом) и  $B$  (не маркированы). Два соседних атома из подрешеток  $A$  и  $B$  образуют элементарную  $AB$ -ячейку.

Рассмотрим три гексагональные ячейки графена (рис. 4.12, [75]).



**Рис. 4.12.** Гексагональная кристаллическая структура графена. Элементарная  $AB$ -ячейка помещена в центре рисунка; черным и белым маркированы узлы  $A$  и  $B$  подрешеток кристалла ( $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  — векторы трансляций)

В центре рисунка (точка  $A$ ) помещено начало координат  $(x, y = 0, 0)$ , Стрелки векторов от этого атома  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ , направленные к соседям одноименной подрешетки  $A$ , имеют координаты

$$\vec{a}_1 = a \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \vec{a}_2 = a(0, 1). \quad (4.6)$$

Каждый из таких атомов образует подрешетку из эквивалентных ему атомов при сдвиге с помощью векторов

трансляций:

$$\vec{x}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2, \quad (4.7a)$$

$$\vec{x}_{n+fn} = \vec{x}_n + \vec{f}_n, \quad (4.7б)$$

$$\vec{r}_A = m \vec{a}_1 + n \vec{a}_2, \quad (4.7в)$$

где  $n_1, n_2$  — любые целые числа.

Иными словами, свойства кристалла не зависят от точек наблюдения, расположенных в эквивалентных узлах решетки. Из рис. 4.12 видно, что векторы, соединяющие ближайшие (разноименные) узлы решетки и исходящие из точки  $A(0,0)$ , имеют координаты стрелок

$$\vec{f}_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} (1, 0), \quad \vec{f}_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (4.8a,б)$$

$$\vec{f}_3 = \frac{a}{\sqrt{3}} \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (4.8в)$$

Три атома подрешетки  $B$ , ближайшие к началу координат  $A$ , соответственно позиционированы согласно (4.6) как концы векторов  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ .

Расстояние между ближайшими (разноименными) атомами углерода в шестиугольниках ( $AB$ , рис. 4.12) равно

$$a_0 = 0,142 \text{ нм}. \quad (4.9)$$

Постоянную решетки  $a$  (на рис. 4.12 она совпадает с длиной вектора  $\vec{a}_2$ ) можно определить из простых геометрических соображений:

$$a = \sqrt{3} a_0 = 0,246 \text{ нм}. \quad (4.10)$$

**Интеграл перекрытия**, т. е. энергия перескока электрона из подрешетки  $A$  в ближайший атом другой подрешетки  $B$  составляет

$$\gamma_0 = 2,7 \text{ эВ}. \quad (4.11)$$

Другой интеграл перекрытия  $\gamma_1$  приближенно равен энергии перескока электрона из подрешетки  $A$  в атом той же подрешетки  $A$ . И хотя этот «ближайший сосед» расположен на расстоянии в  $\sqrt{3}$  раз большем, энергия перескока «к нему» много меньше и находится в интервале значений  $(0,02 - 0,2) \gamma_0$  [38, 22].

Приближенно полагают

$$\gamma_1 \approx 0.$$

Наличие сильной связи определяется перекрытием полей электронов, находящихся в  $2p_z$ -состояниях (именно  $2p_z$ -состояние отвечает в графите за межплоскостные связи, а в графене — за образование энергетических зон). При этом поля атомов подрешеток  $A$  и  $B$  не одинаковы — это видно из отличия энергий  $\gamma_1$  от  $\gamma_0$ .

После соответствующих выкладок с учетом энергий  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  в рамках модели сильных связей *Wallace P. R.* впервые получил [12, 76] выражения для энергетического спектра электронов и дырок в графене в зависимости от волнового вектора  $\vec{k}$ :

$$E_{\pm}(\vec{k}) = \pm\gamma_0 \sqrt{3 + f(\vec{k})} - \gamma_1 f(\vec{k}). \quad (4.12)$$

Функция  $f(\vec{k})$ , входящая в выражение (4.12), определяется постоянной решетки  $a = \sqrt{3}a_0$  и скалярными 2D-компонентами  $\vec{k}(k_x, k_y)$ :

$$f(\vec{k}) = 2\cos(\sqrt{3}k_y a_0) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_y a_0\right)\cos\left(\frac{3}{2}k_x a_0\right). \quad (4.13)$$

**Закон дисперсии.** Линеаризация выражений (4.11) и (4.12) в окрестности точки Дирака позволяет записать закон дисперсии для энергии вблизи этих точек:

$$E_{\pm} = \pm\hbar v_F k. \quad (4.14)$$

Зависимость  $E_{\pm}(\vec{k})$ , соответствующая (4.12) и (4.13), показана на рис. 4.13, где знак «+» соответствует электронам, а «-» — дыркам. Поскольку  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$  не равны друг другу, эта зависимость несимметрична относительно нулевой плоскости  $E_k = 0$ , соответствующей уровню Ферми.

В правую часть диаграммы на рис. 4.13 (см. также цв. вкл.) вынесена одна пара конусов Дирака (из шести пар). В каждой такой паре валентная зона и зона проводимости смыкаются. Смыкание конусов в точках Дирака обуславливает огромную проводимость графенового листа. Долины в интервалах  $k_x, k_y$   $[0, 3]$  и  $[0, -3]$  являются изоспиновыми для хиральных электронов и дырок со

спинами  $+1/2$  и  $-1/2$  соответственно;  $E_k = E_{\pm}/\gamma_0$ ;  $k$  — модуль волнового вектора  $\vec{k}(k_x, k_y)$ .

Верхняя и нижняя части диаграммы несимметричны (так как  $\gamma_1 \neq \gamma_0$ ) и имеют разные знаки: плюс  $E_k$  — энергия выше уровня нулевой поверхности, соответствующей уровню Ферми (электроны), минус  $E_k$  — энергия ниже уровня такой поверхности (дырки).

Из рис. 4.13 видно, что вблизи точек соприкосновения валентной зоны и зоны проводимости ( $K$  и  $K'$ ) зависимость  $E_{\pm}(\vec{k})$  линейна. Как показано ниже, непрерывный линейный спектр энергии  $\pm E$  является собственным значением волновых функций подрешеток  $A$  и  $B$ , определяемых решением уравнения Дирака.

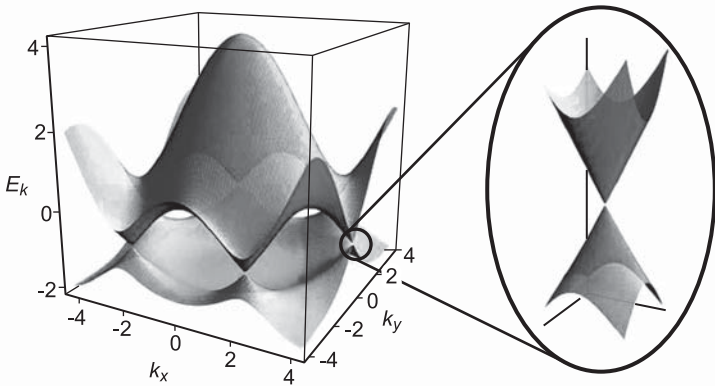


Рис. 4.13. Диаграмма дисперсии графена

В выражении (4.14)  $k$  — модуль волнового вектора  $\vec{k}$  с компонентами  $(k_x, k_y)$ , отсчитанного от точки Дирака;  $\hbar$  — постоянная Планка.

Коэффициентом пропорциональности в (4.14) является скорость Ферми  $v_F$ , играющая роль «эффективной» скорости света:

$$v_F = \frac{3\gamma_0 a_0}{2\hbar} = \frac{\sqrt{3}\gamma_0 a}{2\hbar}, \quad (4.15)$$

где  $a$  — постоянная гексагональной решетки.

Используя систему СИ и подставив  $\gamma_0 \approx 2,7 \text{ эВ}$ ,  $a = 2,461 \text{ \AA}$ ,  $\hbar = 0,659 \cdot 10^{-15} \text{ эВ}\cdot\text{с}$ , получим  $v_F \approx 10^6 \text{ м/с}$ .

Это «эффективное» значение, в 300 раз меньшее скорости света в вакууме, подтверждено экспериментально.

Отметим, что линейный закон дисперсии не является уникальной особенностью гексагональной 2D-решетки углерода, а может существовать в других типах кристаллических структур (например, при их деформациях).

Энергия зон в окрестностях двух конусов

$$E_{\pm} = E_k \gamma_0 \text{ [эВ]} \quad (4.16)$$

линейно зависит от модуля волнового вектора

$$p = k \cdot a \text{ [м]}, \quad (4.17)$$

начало которого помещено в одну из вершин конусов ( $K$  или  $K'$ ).

$$E_{\pm} = \pm \hbar v_{FP}. \quad (4.18)$$

**Скорость Ферми.** Коэффициент пропорциональности в (4.18) — скорость Ферми, играющая роль «эффективной» скорости света  $c$ :

$$v_F = 3\gamma_0 a / 2\hbar = 10^6 \text{ м/с} \approx c/300.$$

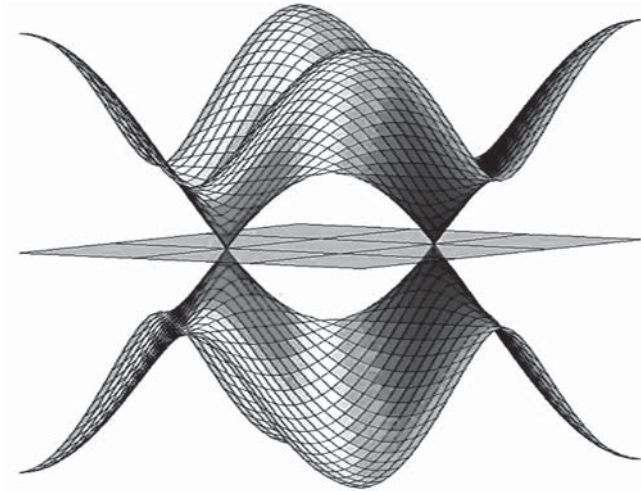
Суперпозицию волновых функций двух долин ( $K$  и  $K'$ ) отображают в виде спинора — вектора с четырьмя комплексными компонентами

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A^K \\ \psi_B^K \\ \psi_A^{K'} \\ \psi_B^{K'} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Дырки имеют отрицательную энергию (безмассовые античастицы).

Взаимосвязанные (амбиполярные) пары электрон-дырка — квазичастицы, подобные фотонам и нейтрино.

**Двухдолинный полуметалл.** На рис. 4.14 (см. также цв. вкл.) [76, 77] изображена область зоны Бриллюэна, расположенная между точками  $K$  и  $K'$ . Две долины — красная ( $K'$ ) и синяя ( $K$ ) — соответствуют разным поляризациям носителей, имеющих полуцелые спиновые показатели ( $\pm 1/2$ ).



**Рис. 4.14.** Две долины — красная ( $K'$ ) и синяя ( $K$ ) (см. цв. вкл.). В точках Дирака графен является металлом, но при наличии дефектов проявляет полупроводниковые свойства [39]

**Спин и псевдоспин носителей тока.** Две подрешетки Бравэ, составляющие гексагональную решетку графена, обуславливают двухкомпонентное описание вклада подрешеток в поведение квазичастиц — носителей тока в графене.

Такое двухкомпонентное описание аналогично спинорному представлению волновых функций в квантовой электродинамике Дирака. При этом индекс «спина в графене», называемого псевдоспином, указывает на принадлежность к определенной подрешетке и индицирует знак хиральности, т. е. проекции вектора носителя на направление тока — положительного для электронов и отрицательного для дырок.

## ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Операторы квантовой физики.** Эти операторы построены на основе соответствия классическим величинам [78].

Операторы часто маркируются *циркумфлексом* — диакритическим знаком, называемым еще крышечкой или домиком. Общеприняты следующие операторы.

*Оператор импульса*

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (5.1)$$

где  $\nabla$  — векторный оператор *набла*. Для трехмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (5.2)$$

*Оператор кинетической энергии*

$$\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad (5.3)$$

где  $\Delta$  — скалярный оператор Лапласа (лапласиан). В декартовых координатах;

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.3a)$$

*Оператор потенциальной энергии*

$$\hat{U} = U(x, y, z, t). \quad (5.4)$$

*Оператор Гамильтона*

$$\hat{H} = \hat{E} + \hat{U}. \quad (5.5)$$

Векторный оператор спина фермионов  $\vec{s}$  по модулю равен  $1/2$ . Такую же величину имеют проекции

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2} \sigma_x, \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2} \sigma_y, \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2} \sigma_z, \quad (5.6)$$

выраженные через матрицы Паули

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 = \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 = \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7), \text{ повторяет (4.4)}$$

**Дуализм.** Базовая концепция корпускулярно-волнового дуализма олицетворяется соотношениями Эйнштейна — де Бройля:

$$E = \hbar\omega, \quad (5.8a)$$

$$p = \hbar k \quad (5.8б)$$

и связывает характеристики частицы  $E$ ,  $p$  (энергию и импульс) с волновыми характеристиками  $\omega$ ,  $k$  (круговой частотой и *волновым числом* — пространственной частотой).

**Волновая функция** также олицетворяет концепцию дуализма и описывает поведение свободной частицы (без спина или с нулевым спином).

В простейшем случае частица движется в направлении  $x$  и имеет вид плоской волны:

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) описывает положение частицы в зависимости от текущего времени  $t$  и текущей координаты  $x$ . Но, чтобы описать изменения состояния частицы, выражения (5.9) недостаточно, необходимо волновое уравнение.

**Волновое уравнение Шрёдингера** получается из простых физических соображений.

**Частица во времени.** Для такого описания поведения частицы необходима производная  $\Psi$  по времени  $t$ .

Из (5.9)

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -i\omega \Psi(x, t). \quad (5.10)$$

Вместо  $\omega$  подставим его выражение, следующее из (5.8а)

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -i \frac{E}{\hbar} \Psi(x, t),$$

откуда

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = E \Psi(x, t). \quad (5.11)$$

Квадрату  $p^2$  в известном выражении  $E = \frac{p^2}{2m}$  в соответствии с определением импульса  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  даем релятивистское истолкование через квадрат волнового числа:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (5.12)$$

Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi(x, t). \quad (5.13)$$

**Пространственная волна.** Пространственное поведение  $\Psi$  описывается ее производной по  $x$ . В однокоординатном (1D) случае вторая производная  $\Psi$  по координате  $x$  описывает пространственную волну и зависит от квадрата волнового числа:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x, t). \quad (5.14)$$

В (5.14) заменим  $k^2 \Psi$  левой частью (5.13) и получим уравнение Шрёдингера для волновой функции  $\Psi(x, t)$  в пространстве одной координаты  $x$  при отсутствии внешнего поля:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (5.15)$$

Уравнение Шрёдингера можно записать и иначе — через гамильтониан  $H$ , описывающий полную энергию

системы:

$$H\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (5.16)$$

В случае трехкоординатного пространства гамильтониан  $H$  можно определить через операторы проекций импульса на три оси декартовых координат. Каждый такой оператор действует на волновую функцию как пространственная производная:

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m}, \quad (5.17)$$

$$p_j \Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x_j}. \quad (5.18)$$

**От классики к релятивизму.** Известные из классической механики соотношения между кинетической энергией, импульсом и скоростью частицы приведены ниже:

$$E = \frac{m}{2} v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad p = mv \rightarrow p = \sqrt{2mE}. \quad (5.19)$$

Возведя в квадрат релятивистское соотношение Эйнштейна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5.20)$$

и используя (5.19), после преобразований

$$m^2 c^4 = E^2 \left[ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = E^2 - p^2 c^2$$

получим:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (5.21)$$

Соотношение (5.21) нам потребуется в дальнейшем.

**Лоренц-инвариантность.** Распространим (5.21) на трехкоординатное (3D) декартово пространство:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2}. \quad (5.22)$$

Из (5.16) и (5.22), полагая  $H = E$ , запишем:

$$\sqrt{(mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2} \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}. \quad (5.23)$$

Это — основа для преобразования (5.23) в уравнение Дирака. Такого рода конструирование вызвано тем, что в выражении (5.23) не просматривается лоренц-инвариантности, т. е. равноправия времени и пространственных координат — признака специальной теории относительности. Конструируя уравнение Дирака, попутно можно получить уравнение Клейна–Гордона.

**Уравнение Клейна–Гордона.** Для записи этого уравнения используется операторная форма релятивистского соотношения (5.21). Две эквивалентные друг другу записи уравнения Клейна–Гордона приведены ниже:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi - m^2 c^4 \Psi, \quad (5.24)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (ct)^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi. \quad (5.25)$$

Уравнение Клейна–Гордона не способно интерпретировать  $\Psi$  как амплитуду вероятности, поскольку в этом случае плотность вероятности не будет положительной величиной. Чтобы решить задачу интерпретации  $\Psi$ , следует сконструировать уравнение иначе и получить уравнение Дирака. С этой целью рассмотрим

**Гипотетический гамильтониан (ГГ)** следующего вида:

$$\hat{H} = \alpha_0 \cdot mc^2 + \alpha \cdot c\hat{p}, \quad (5.26)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  — коэффициенты, подлежащие определению.

С учетом связи  $E$  и  $p$  (5.19), на квадрат оператора  $p$ , а значит, и на коэффициенты  $\alpha$  налагаются ограничения. Квадраты коэффициентов  $\alpha$  должны быть равны единице и быть взаимно антикоммутиативны.

Таким образом, коэффициенты  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  не могут быть числами. Однако они могут быть матрицами, причем размерности не менее 4, а волновая функция при этом должна быть четырехкомпонентным объектом — биспинором.

В таком случае уравнение Дирака получит вид, идентичный уравнению Шрёдингера (но с гамильтонианом Дирака).

**Модификация** гипотетического гамильтониана (ГГ). Запишем ГГ (5.26) в более общем виде:

$$H = mc^2\alpha_0 + c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j, \quad (5.27)$$

где  $p_j$  — операторы проекций импульса, а индексы  $j = 1, 2, 3$  обозначают декартовы координаты. Каждый такой оператор в соответствии с (5.18) действует на волновую функцию как пространственная производная. Для удобства дальнейшей работы еще раз запишем (5.18) и (5.23):

$$p_j \psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x_j}, \quad (5.28), \text{ повторяет (5.18)}$$

$$\sqrt{(mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2} \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}. \quad (5.23)$$

**Конструирование уравнения Дирака.** Возведение в квадрат левой и правой частей (5.23) приводит к уравнению Лоренц-ковариантного вида.

Дирак предположил, что поскольку правая часть (5.23) содержит первую производную по времени, и левая часть должна иметь только производные первого порядка по пространственным координатам (операторы импульса в первой степени).

Тогда, полагая, что коэффициенты перед производными, какую бы природу они ни имели, — постоянные (вследствие однородности пространства), Дирак рекон-

струировал (5.23) к виду:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (5.27a),$$

модификация (5.27)

или иначе

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \left( c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \alpha_0 mc^2 \right) \Psi. \quad (5.29)$$

Несмотря на то что мы пока не знаем, что подразумевается под коэффициентами в скобках, соотношение (5.29) уже имеет вид уравнения Дирака (для свободной частицы, т. е. в отсутствие внешнего поля).

**Конструирование коэффициентов** уравнения Дирака. Если верно предположение Дирака, то скобка правой части (5.29), возведенная в квадрат, должна дать

$$(mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2, \quad (5.30)$$

поэтому запишем:

$$\left( mc^2 \alpha_0 + c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \right)^2 = (mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2. \quad (5.31)$$

Раскрывая скобки в левой части (5.31), получаем условия для коэффициентов  $\alpha$ .

**Условия для коэффициентов  $\alpha$ :**

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad \text{для всех } i, j = 0, 1, 2, 3 \quad \text{при } i \neq j, \quad (5.32)$$

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \text{для всех } i = 0, 1, 2, 3. \quad (5.33)$$

Такие соотношения не могут выполняться для обычных чисел (ведь числа коммутируют, а  $\alpha$  — нет).

Разумно предположить, что  $\alpha$  — это некие линейные операторы или матрицы (тогда единица и нуль в правых частях (5.32), (5.33) станут операторами или матрицами).

Оказалось возможным найти набор  $\alpha$ , удовлетворяющий (5.32) и (5.33).

**Античастицы.** Уравнение Дирака, как и уравнение Клейна–Гордона, имеет решения с отрицательными энергиями. Данное обстоятельство явилось причиной для предсказания античастиц, что позже и было подтверждено экспериментально (открыт *позитрон*).

Наличие античастиц есть следствие релятивистского соотношения между энергией и импульсом.

Уравнения Клейна — Гордона и Дирака следует рассматривать как уравнения для полевых операторных функций, действующих на вектор состояния системы квантовых полей, удовлетворяющих уравнению Шрёдингера.

**Общее уравнение Дирака (1928).** Распространим (5.29) на трехкоординатное декартово пространство:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \left( c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \alpha_0 m c^2 \right) \Psi. \quad (5.29a)$$

Эта похожая на (5.29) запись означает:

- представление ((5.28), повторяет (5.18)) в виде трехкомпонентного (по  $x, y, z$ ) оператора импульса;
- представление  $\Psi$  в виде четырехкомпонентной комплексной волновой функции (биспинора);
- представление  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  как линейных операторов (*альфа-матриц* Дирака), которые действуют на волновую функцию  $\Psi$ . Каждая пара таких операторов антикоммутирует, а квадрат каждого оператора равен единице. Вариант записи условий (5.32), (5.33) показан ниже:

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i, \quad \text{где } i \neq j, \quad (5.32a)$$

$$\alpha_i^2 = 1. \quad (5.33a)$$

В этих выражениях индексы  $i, j$  меняются от 1 до 3.

Таким образом, уравнение Дирака является Лоренц-инвариантным уравнением движения для биспинорного классического поля электрона и других фермионов со спином  $1/2$ .

Линейные операторы, введенные выше, имеют размерность  $4 \times 4$  и носят название матриц Дирака.

**Альфа-матрицы Дирака** выражаются через матрицы Паули следующим образом:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

где  $\sigma_j$  при  $j = 1, 2, 3$  являются  $2 \times 2$  матрицами Паули;  $I$  — единичная матрица (см. далее (6.2)).

# ФЕРМИОНЫ И МАТРИЦЫ

**Матрицы Паули.** Определения

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 = \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 = \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.1)$$

дополним перечислением основных свойств матриц Паули.

*Квадраты:*

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (6.2)$$

*След и детерминант матрицы:*

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \det(\sigma_i) = -1. \quad (6.3)$$

**Эрмитовость.** Матрицы Паули эрмитовы. Эрмитова матрица  $A$ , будучи транспонирована, равна своей комплексно-сопряженной матрице  $A^*$ :

$$A^T = A^*, \quad \text{т. е. } a_{ij} = a_{ji}^*$$

или

$$(A^*)^T = A^\dagger = A, \quad (6.4)$$

где  $\dagger$  — оператор эрмитова сопряжения.

*Единичная и  $i$ -матрицы:*

$$\begin{aligned}I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & i &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ -i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & i^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.\end{aligned}\quad (6.5)$$

**Комплексные и комплексно-сопряженные величины как матрицы.**

Если

$$A = a + ib = aI + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$A^* = a - ib = aI + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

то

$$AA^* = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I. \quad (6.7)$$

Справедливость преобразований (6.5–6.7) доказывается перемножением матриц.

**Комплексное число и матрицы Паули.**

**Задача 6.1.** Доказать, что

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 + ix_2. \quad (6.8)$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= x_1 + ix_2 \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_1 + ix_2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

**Задача 6.2.** Записать в виде матриц Паули и в виде числа выражение  $\begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a - ib \\ a + ib & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= a\sigma_1 + b\sigma_2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

**Перемножение матриц.** Перемножение двух  $2 \times 2$  матриц:  $BA \neq AB$

$$\begin{aligned} C = BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Матрица-строка  $B$  (левая) умножается на  $2 \times 2$  матрицу  $A$  (правую):

$$(b_{11} \quad b_{12}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \quad b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}). \quad (6.12)$$

**Применение матриц Паули.**

**Задача 6.3.** Записать в виде матриц Паули и в виде числа выражение  $\begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a + ib \\ a - ib & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= a\sigma_1 - b\sigma_2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

**Задача 6.4.** Записать в виде матриц Паули выражение  $\begin{pmatrix} m & Q^* \\ Q & -m \end{pmatrix}$ .

*Решение.*

$$\begin{pmatrix} m & Q^* \\ Q & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & a - ib \\ a + ib & -m \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a\sigma_1 + b\sigma_2 + m\sigma_3. \quad (6.14)$$

**Задача 6.5.** Найти  $i\sigma_1$ .

*Решение.*

В результате перемножения матриц находим

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

**Задача 6.6.** Самостоятельно доказать или опровергнуть утверждение:

$$\sigma_1 i \neq i \sigma_1.$$

### Особенности матриц

1. Произведение матриц неперестановочно (некоммутативно). Оно определяет преобразования, результат которых зависит от их последовательности. Неперестановочность базируется на жизненном опыте. Секвенция «Выучить предмет, потом сдать экзамен» при перестановке изменяет результат.

2. С матрицами можно обращаться так же, как с числами, за исключением следующих различий:

- сумма, разность и произведение матриц существуют не всегда;
- произведение квадратных матриц чаще всего не коммутативно;
- нулевая и единичная матрицы играют в матричном исчислении такую же роль, как числа 0 и 1 при аналогичных действиях с числами соответственно;
- при транспонировании произведения матриц нужно не только транспонировать каждую матрицу, но, кроме того, необходимо сменить порядок следования матриц-сомножителей на противоположный.

**Матрица квадрата модуля (нормы) вектора.**

**Задача 6.7.** Представить комплексно-сопряженные двумерные векторы  $\sigma$ ,  $\sigma^*$  и их произведение  $\sigma \cdot \sigma^*$  в матричном виде.

*Решение.* Двумерные векторы представим в виде комплексных чисел:

$$\sigma = \sigma_x + i\sigma_y, \quad \sigma^* = \sigma_x - i\sigma_y.$$

Преобразуем эти комплексные числа в матрицы:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x + i\sigma_y = \sigma_x I + \sigma_y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & -\sigma_y \\ \sigma_y & \sigma_x \end{pmatrix}, \\ \sigma^* &= \sigma_x - i\sigma_y = \sigma_x I + \sigma_y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y \\ -\sigma_y & \sigma_x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Матрицы перемножаем:

$$\sigma\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{pmatrix} = I(\sigma_x^2 + \sigma_y^2). \quad (6.17)$$

**Квантовый парадокс.** Как извлечь квадратный корень, не извлекая его?

**Задача 6.8.** Возвести в квадрат матрицу задачи 6.4.

*Решение.* Умножая матрицу задачи 6.4 саму на себя, получим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m & Q^* \\ Q & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & Q^* \\ Q & -m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m^2 + a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & m^2 + a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \\ &= I(m^2 + a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Отсюда видно, что выражение

$$\begin{pmatrix} m & Q^* \\ Q & -m \end{pmatrix}$$

является модулем (нормой)  $r$  вектора  $\vec{Q}(a_x, a_y, m)$ , полученным без операции извлечения корня

$$r = \sqrt{m^2 + a^2 + b^2}. \quad (6.19)$$

**У квантовых парадоксов есть авторы:**



**Рис. 6.1.** (Слева направо): Нильс Бор (1885–1958) — один из основоположников современной квантовой физики; Поль Дирак (1902–1984) — ввел относительность в волновое уравнение; Вольфганг Паули (1900–1958) — матрицы Паули, нейтрино.

Niels Bohr: What are you working on Mr. Dirac? Paul Dirac: I 'm trying to take the square root of something

**Скалярное произведение векторов  $d = (\vec{a} \cdot \vec{b})$ .** Имеем

$$d = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (6.20)$$

Свойства скалярного произведения векторов:

- коммутативность:  $a \cdot b = b \cdot a$ ;
- дистрибутивность:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;
- сочетательность (линейность) относительно скалярного множителя:  $k \cdot (a \cdot b) = (k \cdot a) \cdot b = a \cdot (k \cdot b)$ ;
- скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля (нормы вектора):  $a \cdot a = |a|^2$ .

**Матрица сопряженных набла-векторов.**

**Задача 6.9.** Представить скалярное произведение двумерных векторов  $\vec{\sigma}$  и  $\vec{\nabla}$  в виде  $2 \times 2$  матрицы — комбинации матриц Паули.

*Решение.* Скалярное произведение двух произвольных векторов определяется общим правилом и сводится к перемножению одноименных координат:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

(компонент набла-вектора) и двухкоординатного вектора Паули:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} &= \nabla_x \sigma_1 + \nabla_y \sigma_2 = \sigma_1 \nabla_x + \sigma_2 \nabla_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_x + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \nabla_y = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_x - i \nabla_y \\ \nabla_x + i \nabla_y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

**Повороты векторов.** Опишем поворот вектора против часовой стрелки на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 6.2). Поворот против часовой стрелки принято считать положительным поворотом (угол  $\varphi$  имеет знак плюс).

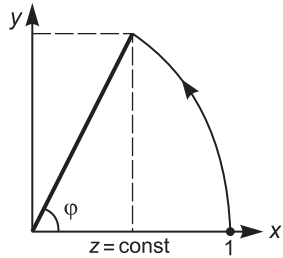


Рис. 6.2. Поворот вектора вокруг оси  $Oz$

**Преобразование поворота.** При повороте точки  $x, y, z$  преобразуются в точки  $x', y', z'$  согласно выражениям в линейном и матричном виде:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \\ y' &= x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Матрица, находящаяся в центре выражения (6.22),

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

называется *матрицей поворота*, осуществляющей преобразование координат вектора  $(x, y, z)$  в координаты

$(x'y'z')$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

### Составление матриц поворота.

**Задача 6.10.** Составить матрицу  $R_z(-\varphi)$ .

*Решение.* В матрице  $R_z(\varphi)$  произведем замену  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Исходя из четности  $\cos$  и нечетности  $\sin$ , запишем преобразование в виде:

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

**Задача 6.11.** Написать выражения для линейного преобразования матрицы поворота вокруг оси  $Ox$  в положительном направлении.

*Решение.* Произведя замену  $x \rightarrow y$  и  $y \rightarrow z$  в соответствующих выражениях для поворота вокруг оси  $Oz$ , получим:

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \rightarrow y' = y \cos \varphi - z \cdot \sin \varphi, \\ y' &= x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \rightarrow z' = y \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

При  $x' = x$

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Аналогичным образом матрица (6.26) преобразуется в матрицу  $R_x(-\varphi)$ :

$$R_x(-\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

$R$ -матрицы, которыми мы научились пользоваться, имеют размерность  $3 \times 3$ , так как описывают повороты в трехмерном пространстве. Рассмотрим возможность

иного описания точно таких же поворотов. Такую возможность предоставляют *матрицы поворота  $U$ -типа* на основе  $(2 \times 2)$  матриц Паули.

### Повороты в трехмерном пространстве (Паули)

$U$ -матрицы используют половинные углы, в эффективности которых нам предстоит убедиться.

Оказывается, что матрица поворота  $U_x(\varphi/2)$  относительно половинного угла  $\varphi/2$ , равная

$$U_x(\varphi/2) = I \cos \varphi/2 + i\sigma_x \sin \varphi/2, \quad (6.28)$$

изображает точно такой же поворот, как матрица  $R_x(-\varphi)$  относительно угла  $-\varphi$ .

Эквивалентность  $U_x(\varphi/2)$  и  $R_x(-\varphi)$  не является простым совпадением; она возникла благодаря действию единичной и  $\sigma_x$ -матриц и доказывается путем перемножения матриц. Аналогично, выражение

$$U_y(\varphi/2) = I \cos \varphi/2 + i\sigma_y \sin \varphi/2 \quad (6.29)$$

изображает поворот, эквивалентный  $R_y(-\varphi)$ , а выражение

$$U_z(\varphi/2) = I \cos \varphi/2 + i\sigma_z \sin \varphi/2 \quad (6.30)$$

изображает поворот, эквивалентный  $R_z(-\varphi)$ .

### Преобразование

$$U_0(\varphi/2) = I \cos \varphi/2 + i\sigma_0 \sin \varphi/2 = I e^{i\varphi/2} \quad (6.31)$$

не описывает каких-либо поворотов, порождая тождества

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что использование половинных углов и матриц Паули позволяет описать любое число трехмерных поворотов в терминах двумерного комплексного евклидова пространства.

### Изменение знака $\varphi$ в $U$ -матрицах поворота

**Задача 6.12.** Имея матрицу  $U_x(\varphi/2)$ , найти матрицу  $U_x(-\varphi/2)$ .

*Решение.*

Если  $U_x(\varphi/2) = I \cos \varphi/2 + i\sigma_x \sin \varphi/2$ , то

$$U_x(-\varphi/2) = I \cos(-\varphi/2) + i\sigma_x \sin(-\varphi/2).$$

Придадим  $U_x(\varphi/2)$  и  $U_x(-\varphi/2)$  матричный вид:

$$\begin{aligned} U_x\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \frac{\varphi}{2} \\ i \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -i \sin \frac{\varphi}{2} \\ i \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \\ U_x\left(-\frac{\varphi}{2}\right) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \sin \frac{\varphi}{2} \\ -i \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & i \sin \frac{\varphi}{2} \\ -i \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Отсюда

$$U_x\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = U_x^*\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{6.33}$$

Таким образом, сопряженная матрица  $U^*$  изменила знак угла поворота.

**Любое число поворотов Паули.** Допустим, что в трехмерном пространстве выполнены два последовательных поворота на произвольные углы из набора  $\alpha, \beta, \gamma$  вокруг двух разных координатных осей.

В двумерном комплексном пространстве эти повороты будут изображаться произведением каких-либо двух матриц из трех:

$$U_x(\alpha), \quad U_y(\beta), \quad U_z(\gamma).$$

Перемножая эти матрицы попарно, убедимся в том, что получится выражение вида

$$q = aI + ib\sigma_x + ic\sigma_y + id\sigma_z. \tag{6.34}$$

Это выражение описывает повороты в трехмерном пространстве в виде *кватерниона* — обобщенного четы-

рехмерного комплексного числа (с одной действительной и тремя мнимыми частями).

**Кватернион** (от лат. *quaterni, по четыре*) использует три мнимые единицы вместо одной. Кватернионные мнимые единицы  $i, j, k$  являются порождением матриц Паули.

**Задачи 6.13, 6.14.** Самостоятельно найти матрицы, соответствующие мнимым кватернионным  $j, k$ .

*Напоминание.* В задаче 6.5 была получена матрица для  $i\sigma_1$ . Необходимо найти остальные мнимые единицы.

*Решения задач 6.5, 6.13, 6.14:*

$$\begin{aligned} i\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ i\sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ i\sigma_z &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

**Векторный кватернион**  $p$  — это мнимая часть  $q$  в выражениях типа (6.34) при  $r = 1$ , т. е.

$$p = ix\sigma_x + iy\sigma_y + iz\sigma_z = iP, \quad (6.36)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} x & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

**Упразднение половинных углов.** С помощью  $P$  возможно так преобразовать  $U$ -матрицы, что половинные углы будут упразднены.

Можно доказать, что при поворотах  $P \rightarrow P'$  матрица (6.37) преобразуется так:

$$P' = UPU^*. \quad (6.38)$$

Матрице  $P'$  соответствует вектор  $p'$ :

$$p' = upi^*, \quad (6.39)$$

где  $u$  — один из трех кватернионов (о них ниже).

**Три векторных кватерниона** непосредственно получаются из  $U$ -матриц половинных углов (6.28), (6.29),

(6.30):

$$u_x(\varphi/2) = \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2, \quad (6.40)$$

$$u_y(\varphi/2) = \cos \varphi/2 + j \sin \varphi/2, \quad (6.41)$$

$$u_z(\varphi/2) = \cos \varphi/2 + k \sin \varphi/2. \quad (6.42)$$

Вычислим один из трех векторов путем преобразования  $p$  в

$$p' = x'i + y'j + z'k. \quad (6.43)$$

Имеем

$$p' = u_x(\varphi/2)pu_x^*(\varphi/2). \quad (6.44)$$

Подставим (6.40) в (6.43):

$$p' = (\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2)(xi + yj + zk)(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) = \dots$$

(перемножаем две левые скобки)

$$\begin{aligned} p' &= xi(\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2)(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) + \\ &+ y(\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2)j(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) + \\ &+ z(\cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2)k(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) = \dots \end{aligned}$$

**Работа половинных углов.** Продолжаем вычисления:

$$\begin{aligned} p' &= xi(\cos^2 \varphi/2 + \sin^2 \varphi/2) + \\ &+ y(j \cos \varphi/2 + k \sin \varphi/2)(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) + \\ &+ z(k \cos \varphi/2 - j \sin \varphi/2)(\cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2) = \\ &= xi + yj \cos^2 \varphi/2 + yk \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 + \\ &+ yk \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 - yj \sin^2 \varphi/2 + zk \cos^2 \varphi/2 - \\ &- zj \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 - zj \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 - zk \sin^2 \varphi/2 = \\ &= xi + yj(\cos^2 \varphi/2 - \sin^2 \varphi/2) + 2yk \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 + \\ &+ zk(\cos^2 \varphi/2 - \sin^2 \varphi/2) - 2zj \sin \varphi/2 \cos \varphi/2. \end{aligned}$$

**Преобразования кватернионов.** Полученный выше результат

$$p' = xi + (y \cos \varphi - z \sin \varphi)j + (y \sin \varphi - z \cos \varphi)k \quad (6.45)$$

упразднил половинные углы и продемонстрировал преобразование

$$x' = x, \quad y' = y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad z' = y \sin \varphi + z \cos \varphi \quad (6.46)$$

поворота вектора  $p \rightarrow p'$  в трехмерном пространстве вокруг оси  $Ox$  против часовой стрелки, изображаемый матрицей  $R_x(\varphi)$ .

Аналогично поворот вектора-кватерниона

$$p' = u_y(\varphi/2) p u_y^*(\varphi/2) \quad (6.47)$$

соответствует матрице  $R_y(\varphi)$ .

Преобразование поворота вектора-кватерниона

$$p' = u_z(\varphi/2) p u_z^*(\varphi/2) \quad (6.48)$$

соответствует матрице  $R_z(\varphi)$ .

**Алгебраические свойства мнимых единиц** (табл. 6.1) следуют из соотношений для матриц Паули.

Таблица 6.1

Соотношения для матриц Паули	Соотношения для мнимых единиц
Квадраты: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_0 = I$	Квадраты: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
Эрмитовость: $\sigma_x^\dagger = \sigma_x, \quad \sigma_y^\dagger = \sigma_y, \quad \sigma_z^\dagger = \sigma_z$	Комплексное сопряжение: $i^* = -i, \quad j^* = -j, \quad k^* = -k$
Парные произведения: 1. $\sigma_x \cdot \sigma_y = i\sigma_z,$ $\sigma_y \cdot \sigma_z = i\sigma_x,$ $\sigma_z \cdot \sigma_x = i\sigma_y.$ 2. $\sigma_x \cdot \sigma_y = -\sigma_y \cdot \sigma_x,$ $\sigma_y \cdot \sigma_z = -\sigma_z \cdot \sigma_y,$ $\sigma_z \cdot \sigma_x = -\sigma_x \cdot \sigma_z$	Парные произведения: 1. $ij = k,$ $jk = i,$ $ki = j.$ 2. $ji = -ij = -k,$ $kj = -jk = -i,$ $ik = -ki = -j$

Считая  $i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z$  мнимыми единицами, обозначим их  $i, j, k$ . Тогда выражение (6.34) примет вид

$$q = a + bi + cj + dk. \quad (6.49)$$

## УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И ЕГО РЕШЕНИЕ

**Как обращаться с уравнением Дирака?** Поскольку гамильтониан Дирака действует на биспинор

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x, t) \\ \Psi_2(x, t) \\ \Psi_3(x, t) \\ \Psi_4(x, t) \end{pmatrix},$$

уравнение Дирака можно превратить в систему четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

**Возможности упрощений** при решении уравнения Дирака возникают в случае следующих априорных предположений:

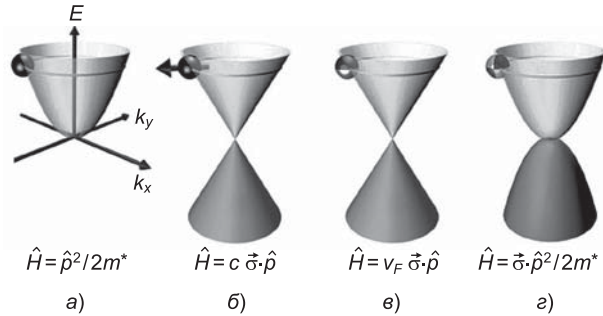
1. Масса квазичастиц — носителей тока равна нулю. Ситуация, когда *априори*  $m = 0$ , реализуема в моноатомных двумерных материалах или при оптической связи.

2. В 2D-случаях, когда импульс  $p$  заведомо не имеет координаты  $z$ , волновая функция становится двухкомпонентным спинором, находящимся под управлением  $2 \times 2$  матриц Паули.

3. В ряде важных случаев можно считать фиксированной и определенной заранее скорость, играющую роль скорости света (скорость Ферми или величину, аналогичную скорости Ферми).

Таковы возможности полигона квантовой электродинамики — графена, его производных, других 2D-структур.

**Зоопарк квазичастиц.** Так назвал А. К. Гейм [16] множество фермионов и ультрарелятивистских частиц (рис. 7.1, см. также цв.вкл.).



**Рис. 7.1.** Квазичастицы (по Гейму, [16]): *а* — носители заряда, описываемые уравнением Шрёдингера ( $\hat{p}$  — оператор импульса,  $m^*$  — эффективная масса, которая отличается от массы свободного электрона); *б* — релятивистские частицы с нулевой массой покоя управляются уравнением Дирака ( $c$  — скорость света,  $\vec{\sigma}$  — вектор Паули); *в* — безмассовые фермионы Дирака в графене, описываются 2D-аналогом уравнения Дирака ( $v_F \approx 3 \cdot 10^6$  м/с — скорость Ферми, играющая роль скорости света);  $\vec{\sigma}$  — 2D-матрицы псевдоспина, описывают взаимодействие двух подрешеток гексагональной сетки графена; *г* — фермионы двухслойного графена — новый вид квазичастиц, не имеющих аналогов

**Гамильтониан графена.** В соответствии с выражением [27], приведенным на рис. 7.1, *в*, запишем выражение для одного конуса гамильтониана графена в виде:

$$\hat{H} = v_F \vec{\sigma} \cdot \hat{p}, \quad (7.1)$$

где  $\vec{\sigma}$  — трехкомпонентный матричный вектор

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (7.2)$$

Поскольку

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (5.1, \text{повторно})$$

гамильтониан (7.1) может быть представлен в эквивалентном виде:

$$\hat{H} = -i\hbar v_F \vec{\sigma} \vec{\nabla}. \quad (7.3)$$

Скалярное произведение вектора  $\vec{\nabla}$  с компонентами

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

и двухкоординатного вектора Паули коммутативно и в 2D, т. е. в  $(x, y)$ -пространстве, и в соответствии с (6.20) имеет вид:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} &= \nabla_x \sigma_1 + \nabla_y \sigma_2 = \sigma_1 \nabla_x + \sigma_2 \nabla_y = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \nabla_y = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_x - i \nabla_y \\ \nabla_x + i \nabla_y & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Матрицы Паули описывают вклад двух подрешеток в формирование двухкомпонентной волновой функции квазичастиц — носителей тока в графене.

Гамильтониан (7.1), (7.3) полностью эквивалентен гамильтониану нейтрино и отличается от последнего лишь заменой  $c \rightarrow v_F$ .

Аналогия спина нейтрино и псевдоспина квазичастиц графена проявляется в двузначности (хиральности) проекции псевдоспина на направление движения носителей. Для электронов хиральность положительна, для дырок отрицательна.

Квазичастицы свободны в том смысле, что отсутствует воздействие в виде внешнего потенциала, поэтому оператор полной энергии  $\hat{H}$  является оператором кинетической энергии, а освободившийся таким образом символ  $E$  получает смысл переменной, а не оператора.

Априори считаем, что:

- масса квазичастицы равна нулю;
- заранее определена скорость Ферми;
- волновая функция — простейший двухкомпонентный спинор, а произведение  $E\Psi$  имеет вид

$$E\Psi = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Из (7.3) и (7.4) следует, что:

$$-i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \nabla_x - i \nabla_y \\ \nabla_x + i \nabla_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = E\Psi. \quad (7.5)$$

**Множественность матричного преобразования (7.5).** Поворот  $(x, y)$  на угол  $\varphi$  (рис. 7.2) не должен влиять на взаимодействие волновых функций спинора (7.4)

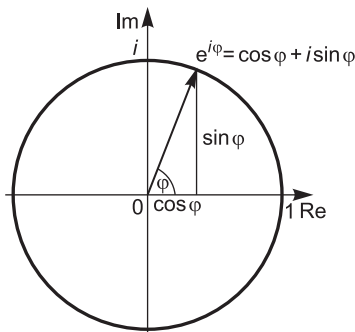


Рис. 7.2. Повороты и варианты записи (7.6)

Более общий вид уравнения (7.5) предусматривает все варианты рукотворных поворотов, т. е. знаков в диагонали матрицы  $H$ :

$$H_{\pm} = -i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & e^{\pm i\varphi}(i\partial_x \pm \partial_y) \\ e^{\mp i\varphi}(-i\partial_x \pm \partial_y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Для удобства самостоятельной проработки настоящей главы остановимся на варианте (7.7) [94] записи гамильтониана из множества (7.6):

$$H_+ = -i\hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & i\partial_x + \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

**Система двух уравнений.** С учетом (7.7) волновому уравнению (7.5) придадим вид системы:

$$-i\hbar v_F \left( i \frac{\partial \Psi_B}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_B}{\partial y} \right) = E \Psi_A, \quad (7.8)$$

$$-i\hbar v_F \left( -i \frac{\partial \Psi_A}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_A}{\partial y} \right) = E \Psi_B. \quad (7.9)$$

Для удобства решения введем обозначения и преобразуем (7.8), (7.9).

**Преобразование уравнений.** Обозначим:

$$Q = -\frac{i\hbar v_F}{E}.$$

Тогда

$$Q^2 = i^2 \left(-\frac{i\hbar v_F}{E}\right)^2 = -\left(\frac{i\hbar v_F}{E}\right)^2,$$

$$\frac{1}{Q^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2 v_F^2}. \quad (7.10)$$

Система примет вид:

$$\Psi_B = Q\Psi_A (-i\nabla_x + \nabla_y) = Q\Psi_A \nabla^*, \quad (7.11)$$

$$\Psi_A = Q\Psi_B (+i\nabla_x + \nabla_y) = Q\Psi_B \nabla. \quad (7.12)$$

**Решение системы уравнений.** Подставим выражение (7.11) для  $\Psi_B$  в (7.12):

$$\Psi_A = Q\Psi_B \nabla = QQ\Psi_A \nabla^* \nabla = Q^2 \nabla^2 \Psi_A. \quad (7.13)$$

После ряда подстановок получим стационарное волновое уравнение для  $\Psi_A$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial y^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2 v_F^2} \Psi_A. \quad (7.14)$$

Решение уравнения (7.14) — плоская волна

$$\Psi_A = M e^{i(kr)} = M e^{i(k_x \cdot x + i k_y \cdot y)}, \quad (7.15)$$

зависящая от расположения радиуса-вектора частицы  $\vec{r}(x, y)$  и волнового числа — модуля  $k$  волнового вектора  $\vec{k}$ , соответствующего импульсу частицы

$$\vec{p}(p_x, p_y) = \hbar \cdot \vec{k}(k_x, k_y). \quad (7.16)$$

Собственное значение энергии находится дифференцированием (7.15) для плоской волны и сложением вторых

частных производных. Имеем:

$$\frac{\partial \Psi_A}{\partial x} = ik_x \Psi_A, \quad (7.17a)$$

$$\frac{\partial \Psi_A}{\partial y} = ik_y \Psi_A, \quad (7.17b)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial x^2} = -k_x^2 \Psi_A, \quad (7.18a)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial y^2} = -k_y^2 \Psi_A, \quad (7.18b)$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_A}{\partial y^2} = \Delta \Psi_A = -k^2 \Psi_A. \quad (7.19)$$

Подставим этот лапласиан в волновое уравнение (7.14), записанное для  $\Psi_A$ .

Такая подстановка позволяет определить энергетический спектр, имеющий столь же линейный вид, как образующие конусов Дирака.

**Непрерывный линейный спектр.** Из (7.14) и (7.19) следует, что

$$k^2 = \frac{E^2}{\hbar^2 v_F^2}, \quad (7.20)$$

откуда

$$E^2 = \hbar^2 \cdot v_F^2 \cdot k^2, \quad (7.21)$$

$$E = \pm \hbar v_F k = \pm \hbar v_F \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (7.22)$$

Постоянная  $M$  определяется из условия

$$\Psi \Psi^* = \frac{1}{2}, \quad (7.23)$$

соответствующего значению функции распределения Ферми–Дирака в точке  $x = y = 0$  взаимного касания конусов Дирака в плоскости Ферми (см. рис. 4.13) — на

уровне нулевого значения энергии. Поэтому

$$\Psi_A = M e^{ik} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kr)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(k_x \cdot x + ik_y \cdot y)}. \quad (7.24)$$

Для нахождения  $\Psi_B$  подставим (7.24) в (7.9). С учетом (7.17а, б) получим

$$-i\hbar v_F (-i^2 k_x \Psi_A + ik_y \Psi_A) = E \Psi_B, \quad (7.25)$$

откуда

$$\Psi_B = \frac{-i\hbar v_F}{E} \Psi_A (k_x + ik_y). \quad (7.26)$$

Обозначив  $k_x + ik_y = k e^{i\theta}$  при  $\theta = \text{arctg} \frac{k_y}{k_x}$ , перепишем (7.26) в виде:

$$\Psi_B = \frac{-i\hbar v_F}{E} k e^{i\theta} \Psi_A. \quad (7.27)$$

**Волновая функция для К-долины** формируется из функций (7.24) и (7.26) подрешеток А и В. Суперпозиция подрешеток отображается в виде спинора

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{k\hbar v_F}{E} e^{i\theta} \end{pmatrix} e^{i(k_x \cdot x + ik_y \cdot y)}. \quad (7.28)$$

## МЕТАМАТЕРИАЛЫ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

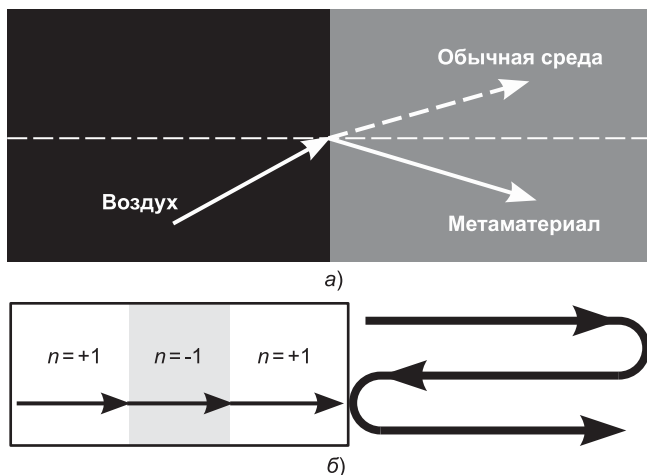
**Метаматериалы** представляют собой новый класс веществ с удивительными, парадоксальными свойствами. Эти свойства (отрицательное преломление света, замедление и искривление его траектории, плазмонно-поляритонные резонансы, обратный эффект Доплера и т. д.) проявляются при взаимодействии вещества с полями (т. е. электромагнитными волнами).

Такого рода взаимодействия реализуются, если структура вещества обладает пространственной периодичностью с периодом, много меньшим длины волны поля, воздействующего на вещество.

Характеристики метаматериалов определяются не их химическими свойствами, а структурой (почти всегда специально созданной). Отрицательный коэффициент преломления среды проявляется в «неправильном» направлении (рис. 8.1, *а*), обратном ходе и замысловатой траектории волны (рис. 8.1, *б*).

Научной основой техники метаматериалов является электродинамика, основанная на учении Максвелла. Несмотря на полуторавековой срок триумфального существования этого учения, метаматериальная сфера взаимодействия полей и сред, ставшая теперь особенно актуальной, содержит множество неразгаданных тайн, парадоксальных явлений и инновационного смысла.

Свет, который, как известно, является электромагнитной волной, состоит из электрической и магнитной составляющих. Специфика света заключается лишь в том частотном диапазоне, в котором фотоны воспринимаются глазом.



**Рис. 8.1.** Волна проходит через среду с  $n = -1$ :  
*a* — «неправильное» направление;  
*б* — обратный ход и замысловатая траектория волны

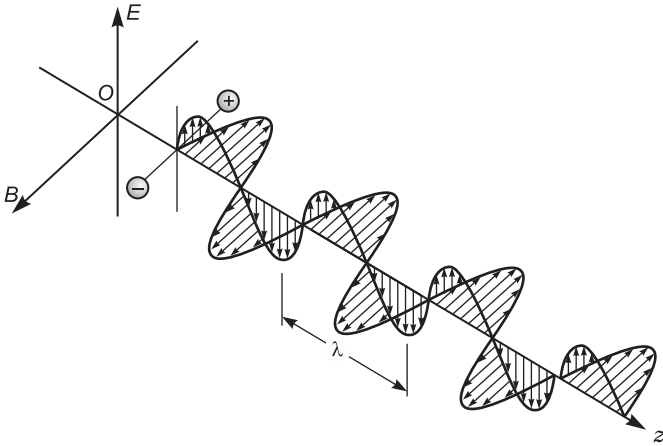
**Электромагнитная волна** в результате взаимодействия со средой претерпевает трансформационные изменения: изменение скорости, фазовые сдвиги, преломление, ослабление вследствие непрозрачности и поглощения по закону Бугера (см. ниже) и т. д.

Векторы электрического и магнитного полей находятся в одинаковой фазе и перпендикулярны волновому вектору, т. е. направлению распространения волны (по оси  $Z$ , рис. 8.2). Фазовая скорость  $v$  распространения волны в среде отличается от фазовой скорости света  $c = 2,99792458 \cdot 10^8$  м/с в вакууме в  $n$  раз:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (8.1)$$

**Показатель преломления.** Коэффициент  $n$ , называемый показателем преломления среды относительно вакуума, зависит от свойств среды и определяется как корень из произведения магнитной и диэлектрических проницаемостей среды:

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (8.2)$$



**Рис. 8.2.** Электромагнитная волна: векторы электрического поля  $\vec{E}$  (ось  $Oy$ ), магнитного поля  $\vec{H}$  (ось  $Ox$ ,  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ) и волновой вектор  $\vec{k}$  (ось  $Oz$ ) взаимно ортогональны. Волна распространяется по направлению волнового вектора  $\vec{k}$  (оси  $Oz$ )

В вакууме

$$n = 1, \quad v = c, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0, \quad (8.3)$$

где  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  — диэлектрическая постоянная, или диэлектрическая проницаемость вакуума  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  — магнитная постоянная, или магнитная проницаемость вакуума.

Из (8.1) и (8.2) следует, что

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (8.4)$$

Взаимные связи фазовой скорости  $c$  волны в вакууме с частотой колебаний  $f$ , длиной волны  $\lambda$ , волновым числом  $k$ , круговой частотой  $\omega$  и показателем преломления  $n$  определяются как

$$c = f\lambda = \omega k, \quad \omega = 2\pi f, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad n = \frac{ck}{\omega}. \quad (8.5)$$

Вектор напряженности электромагнитной волны  $\vec{E}(z, t)$ , распространяющейся вдоль положительного на-

правления оси  $Oz$ , можно описать уравнением

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}), \quad (8.6)$$

где  $\vec{E}_0$  — векторная форма записи напряженности электрического поля в плоскости  $xy$ ; такая запись позволяет при необходимости отобразить поляризацию, модуляцию и другие подобные процессы.

Для частоты  $\omega$  длина волны  $\lambda$  зависит от материала среды, т. е. от  $n$ :

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{ck}{\omega}, \quad (8.7)$$

отличаясь в  $n$  раз от длины  $\lambda_0$ , которая была бы при распространении той же волны в вакууме.

Интенсивность усредненной по времени незатухающей волны пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I(z) \propto |\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}|^2. \quad (8.8)$$

В этом случае интенсивность  $I(z) \propto |\vec{E}_0|^2$  не зависит от координаты  $z$  и постоянна:

$$I(z) = I_0. \quad (8.9)$$

**Затухание (абсорбция)** учитывается введением экспоненциальной функции, преобразующей выражение (8.6) к виду

$$\vec{E}(z, t) = e^{-\alpha z/2} \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}), \quad (8.10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поглощения (абсорбции). Интенсивность (8.8), пропорциональная квадрату амплитуды, при этом будет равна

$$I(z) = |\vec{E}_0|^2 e^{-\alpha z}, \quad (8.11)$$

то есть

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}. \quad (8.12)$$

Экспоненциальное ослабление волны при ее поглощении (8.12) выражает закон абсорбции.

**Закон абсорбции** справедлив для любых поглощающих сред. Этот закон иногда называют законом Бугера (1729).

Коэффициент такого поглощения  $\alpha$  обычно (при не слишком больших значениях  $I(z)$ ) не зависит от интенсивности, но всегда зависит от длины волны. Этот коэф-

коэффициент может быть и отрицательным (значение  $\alpha < 0$  соответствует усилению света, например, в лазерах).

**Мнимые значения.** Учет затухания волны приводит к появлению мнимых значений волнового числа, коэффициента отражения, проводимости и диэлектрической проницаемости и заставляет модифицировать соответствующие зависимости. Примем

$$\dot{k} = k' + ik'', \quad (8.13)$$

$$\dot{n} = n' + in'', \quad (8.14)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma' + i\sigma'', \quad (8.15)$$

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''. \quad (8.16)$$

Выражение для комплексного волнового числа  $\dot{k}$  получим, заменив  $k$  в формулах (8.6) и (8.8) его комплексным выражением (8.13). При этом

$$\text{Im}(\dot{k}) = k'' = \frac{\alpha}{2}, \quad (8.17)$$

$$\text{Re}(\dot{k}) = k' = k. \quad (8.18)$$

Комплексный показатель преломления можно получить, заменив  $k$  в формуле (8.5) его комплексным выражением (8.13):

$$\dot{n} = \frac{ck}{\omega} + i \frac{c\alpha}{2\omega}. \quad (8.19)$$

Действительная часть (8.19)

$$\text{Re}(\dot{n}) = \frac{ck}{\omega} \quad (8.5a)$$

повторяет (8.5) — это знакомый нам коэффициент преломления (иногда называемый *индексом рефракции*).

Мнимая часть

$$\text{Im}(\dot{n}) = \frac{c\alpha}{2\omega} \quad (8.20)$$

называется коэффициентом экстинкции (от лат. *extinctio* — гашение).

Безразмерный коэффициент экстинкции напрямую связан с коэффициентом поглощения

$$a = \frac{2\omega \cdot \text{Im}(\dot{n})}{c}, \quad (8.20a)$$

пропорциональным мнимой части волнового числа

$$a = 2 \cdot \text{Im}(\dot{k}). \quad (8.17a)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\dot{\epsilon}$  может быть получена из выражения:

$$\dot{n} = c\sqrt{\mu\dot{\epsilon}}, \quad (8.21)$$

откуда

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{n}^2}{\mu c^2}. \quad (8.22)$$

Подстановкой (8.19) получаем:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\left(\frac{ck}{\omega} + i\frac{c\alpha}{2\omega}\right)^2}{\mu c^2} = \frac{\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{c\alpha}{2\omega}\right)^2 + i2\frac{c\alpha}{2\omega}\frac{ck}{\omega}}{\mu c^2}, \quad (8.23)$$

откуда

$$\epsilon' = \frac{k^2 - \alpha^2/4}{\mu\omega^2}, \quad (8.24)$$

$$\epsilon'' = \frac{\alpha k}{\mu\omega^2}. \quad (8.25)$$

Нормировав эти выражения с помощью соотношения

$$\epsilon_0 c^2 \mu_0 = 1, \quad (8.26)$$

найдем

$$\text{Re}\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = \frac{c^2}{(\omega)^2} \cdot \frac{\mu_0}{\mu} \cdot (k^2 - \alpha^2/4), \quad (8.27)$$

$$\text{Im}\left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\epsilon''}{\epsilon_0} = \frac{c^2}{(\omega)^2} \cdot \frac{\mu_0}{\mu} \cdot (\alpha k). \quad (8.28)$$

**Двузначность записи уравнения волны.** На основании (8.8) можно записать тождество:

$$\text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}) = \text{Re}(\vec{E}_0^* e^{-i(kz - \omega t)}). \quad (8.29)$$

В левой и правой частях (8.29) находятся два комплексно-сопряженных выражения, которые часто взаимозаменяемы. Их различие не имеет значения для неза-

тухающей волны, но становится актуальным в некоторых иных случаях [81]. Например, есть два определения комплексного показателя преломления (с положительной или с отрицательной мнимой частью), выводимые на основании частей тождества (8.29).

Аналогичная ситуация складывается при определении комплексной диэлектрической проницаемости, в чем можно убедиться, рассмотрев нижеследующие примеры.

Простой пример. Представим электромагнитную волну комплексными функциями, записанными в двух вариантах.

*Вариант 1:*

$$\dot{H} = H_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{E} = E_0 e^{i\omega t}. \quad (8.30)$$

*Вариант 2:*

$$\dot{H} = H_0 e^{-i\omega t}, \quad \dot{E} = E_0 e^{-i\omega t}. \quad (8.31)$$

Закон Ома  $j = \sigma \dot{E}$  и закон Ампера (первое уравнение Максвелла)  $\nabla \dot{H} = j + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t}$  дадут два результата для комплексной диэлектрической проницаемости  $\dot{\varepsilon}$ :

$$1) \quad j = \sigma \dot{E} = \sigma E_0 e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} = i\omega \varepsilon E_0,$$

$$\nabla \dot{H} = j + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} = i\omega E_0 (\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}),$$

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}; \quad (8.32)$$

$$2) \quad j = \sigma \dot{E} = \sigma E_0 e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon E_0,$$

$$\nabla \dot{H} = j + \frac{\partial \dot{D}}{\partial t} = -i\omega E_0 (\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}),$$

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (8.33)$$

Таким образом, для рассмотренных двух вариантов выражения (8.32) и (8.33) получились комплексно-сопряженными, а мнимая часть  $\text{Im}(\dot{\varepsilon})$  — двузначной.

Присущая несовершенным диэлектрикам, полупроводникам и полуметаллам комплексность диэлектрической проницаемости является причиной появления зависящей

от частоты проводимости, которая, согласно (8.25, 8.33), имеет вид:

$$\sigma = \omega \cdot \text{Im}(\varepsilon) = \frac{\alpha k}{\omega \cdot \mu}. \quad (8.34)$$

**Знаки проницаемостей.** Из уравнения распространения электромагнитных волн в изотропной среде, соответствующего рис. 8.2,

$$k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2 = 0 \quad (8.35)$$

видно, что одновременная смена знаков у диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей среды никак не отразится на соотношении (8.35), полученном на основе теории электромагнитного поля. Несмотря на то что общее знакомство с этой теорией предполагает интуитивное восприятие соотношений, подобных (8.35), изучение метаматериалов требует дополнительного понимания основ электродинамики.

Ведь во времена Фарадея и Максвелла никто не полагал отрицательными или мнимыми волновую функцию и коэффициент преломления волны, диэлектрическую и/или магнитную проницаемости, никто не подозревал о возможности создания невидимых покрытий, замедления или остановки света. . .

**Гипотеза В. Г. Веселаго.** История метаматериалов, реализовавших перечисленные выше парадоксы, начинается с работы советского физика Виктора Георгиевича Веселаго (род. 1929 г.). Вот что он написал в [82]:

*«Электродинамические свойства веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей существенно отличаются от свойств обычных веществ. Эти отличия объясняются тем, что в таких веществах фазовая скорость волн направлена противоположно групповой. Это приводит к необычному закону преломления при падении волны из вакуума на среду с  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$  и к тому, что линзы из такого вещества «меняются местами»: выпуклая становится рассеивающей, а вогнутая — собирающей. Волна, распространяющаяся в среде с  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$ , при отражении или поглощении*

*каким-либо препятствием не давит на него, а, наоборот, притягивает его к источнику света. Примером вещества с  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$  могут служить проводящие ферромагнетики, а также смесь из газовой плазмы и монополей Дирака. Интересным свойством такой смеси является то, что она сжимается под действием падающего на нее излучения».*

**Монополь Дирака**, упомянутый в [82], — это гипотетическая частица с ненулевым магнитным зарядом. Только в 2009 г. было показано, что такой магнит с единственным полюсом может существовать в конденсате Бозе–Эйнштейна [83]. Этот конденсат, полученный в 1995 г., оказался метаматериалом и обсуждается ниже.

Как видно из рис. 8.2, распространение электромагнитной волны, в том числе света, выглядит как попеременное возмущение то электрического, то магнитного поля — они поочередно «толкают» друг друга вперед. Собственные электрические и магнитные поля атомов вещества с положительным показателем преломления (воды, стекла, любого другого материала) взаимодействуют с электромагнитной волной, замедляя ее продвижение.

Веселаго предположил, что существуют материалы, в которых собственные возмущения электрического и магнитного полей будут двигаться навстречу световым волнам, обращая их вспять (групповая скорость возмущения противоположна фазовой скорости волны). Именно так должно проявиться явление отрицательного преломления. Первое экспериментальное подтверждение гипотеза Веселаго нашла только в 1999 г. [84].

Феномен искривления траектории света открыл перспективу создания суперлинз, преодолевающих дифракционный предел разрешения оптических инструментов (предел Релея) [85].

Интенсивное развитие трансформационной оптики открыло как возможности расчета градиентов и типов метаматериалов для проводки лучей по заданным путям, так и перспективу создания таких устройств, как плащи- или покрытия-невидимки.

Гипотеза Веселаго обрела облик реальности, поскольку было осознано, что определенным образом устроенная структура вещества способна радикально изменить его свойства не только в оптическом, но и в любом диапазоне электромагнитных волн [86–89].

Следует, однако, отметить, что ряд предсказанных В. Г. Веселаго феноменов не нашли подтверждения в оптическом диапазоне волн. К таковым можно отнести реверсивный эффект Допплера, обратное излучение Черенкова, отрицательное давление электромагнитного излучения [88].

Интерес к метаматериалам не только в оптическом диапазоне, но и в других участках спектра электромагнитных колебаний определяется универсальностью электродинамики, основанной на уравнениях Максвелла и обещающей конвертировать новизну «метатематики» в инновационную практику текущего века. Например, известные многомодовые колебания в тонких пленках [90, 91] оказались полезными при конструировании плазмон-поляритонных резонансных структур (см. ниже, в гл. 9), формирующих отрицательные проницаемости [92].

Присущие метаматериалам (и, конечно, графену) плазмон-поляритонные резонансы открывают, как будет обсуждено ниже, новые возможности реализации высокоэффективных фотодетекторов, солнечных батарей, волноводов терагерцевого и инфракрасного диапазонов волн. Эти возможности во многом определяются свойствами графена — природного метаматериала для терагерцевого диапазона волн.

**«Метаявления» в природе.** Электродинамическая общность метафеноменов стимулирует интерес к любым, в том числе природным, явлениям такого рода. Вот примеры.

**Мираж в пустыне.** Солнце раскаляет пустыню и нагревает воздух над песком. У нагретого воздуха меньше плотность и меньше показатель преломления.

Чем дальше от земли, тем воздух холоднее и показатель преломления больше — образуется градиент пока-

зателя преломления. При этом солнечный свет может искривиться настолько, что наблюдатель видит на песке отражение неба, водоем или оазис.

**Солнце как линза.** Вокруг видимого диска Солнца в 1919 г. астрономы обнаружили зону высокого показателя преломления, искривляющего свет от далеких звезд.

**Метаявления в неординарных средах.** Неординарными мы будем полагать среды, полученные искусственным путем в условиях, резко отличающихся от привычных. Примерами могут являться обсуждаемые ниже феномены: конденсат Бозе–Эйнштейна и среда с электромагнитно-индуцированной прозрачностью.

**Конденсат Бозе–Эйнштейна** (*BEC — Bose-Einstein Condensate*, англ.) — квантовое состояние вещества (например, холодного газа из частиц типа бозонов), которое может быть достигнуто при температуре порядка (10–100) нанокельвинов (1 нанокельвин =  $10^{-9}$  К), когда атомы вещества заморожены. Среда с веществом в этом состоянии может значительно уменьшить скорость света (до десятков м/с или см/с) или даже остановить свет.

**История BEC.** Возможность его создания была предсказана в 1926 г. Эйнштейном как результат обобщения работы Бозе по статистической механике для частиц, начиная от безмассовых фотонов до атомов рубидия, натрия и др.

Охлаждение атомов-бозонов до очень низких температур заставит их перейти (сконденсироваться) в наименьшее возможное квантовое состояние. При этом, как предположил Эйнштейн, возникает новая форма материи — вещество, останавливающее свет!

В 1995 г. при помощи лазерного охлаждения были «заморожены» 2000 атомов рубидия-87 до 20 нанокельвинов. Тем самым было подтверждено существование конденсата (Нобелевская премия по физике, 2011 г.).

До 2000 г. наименьшая официально зарегистрированная сниженная скорость света была чуть больше 60 км/ч — сквозь натрий при температуре  $-272^\circ\text{C}$ .

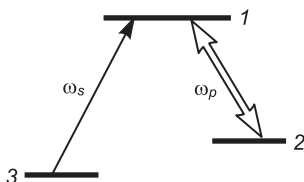
В 2000 г. удалось полностью остановить свет, направив его на *ВЕС* рубидия.

В 2010 г. получен *ВЕС* фотонов.

«Медленный» свет — это не только *ВЕС*! Способность пропускать лазерный луч определенной длины волны через непрозрачную среду и замедлять свет присуща взаимодействиям лазерного луча не только с *ВЕС*, но и с другими средами, например с рукотворными оптическими микрорезонаторами [93], электронным газом атомов и т. д. Причиной такого взаимодействия является явление электромагнитно-индуцированной прозрачности (*Electromagnetically induced transparency — EIT*, англ.).

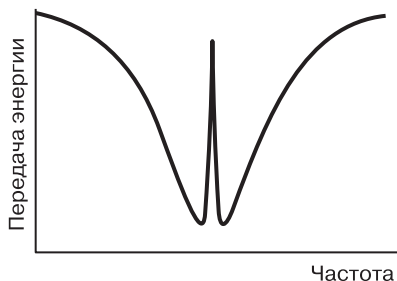
**Электромагнитно-индуцированная прозрачность (EIT).** Для возникновения EIT в атомной системе мощное поле накачки  $\omega_p$  настраивается на разность атомных уровней энергии перехода (1–2), и создает «окно прозрачности» для поля сигнала  $\omega_s$ , настроенного на переход (1–3) (рис. 8.3), [93].

Деструктивная интерференция между двумя путями поглощения при распространении полей приводит к появлению узкого пика возрастания передачи внутри широкой полосы поглощения (см. рис. 8.3).



**Рис. 8.3.** Схема трехуровневой атомной структуры с EIT. EIT в обычной атомной системе: частота  $\omega_p$  сильного поля накачки настроена на энергию атомного перехода (1–2) и создает «окно прозрачности» для поля сигнала  $\omega_s$ , настроенного на другой, (3–1), переход

Показатель преломления материала быстро меняется в узком частотном диапазоне вблизи резонанса (рис. 8.4). Возрастающая при этом дисперсия приводит к сверхмедленному распространению света [93].



**Рис. 8.4.** Вид узкого резонансного пика передачи сигнала в широкой полосе поглощения

**Неординарные вопросы.** Знакомство с удивительными свойствами метаматериалов требует ответа на неординарные вопросы:

- Почему диэлектрическая и магнитная проницаемости стали не только отрицательными, но и мнимыми?
- Что означает диэлектрическая проницаемость проводников?
- Что означает поляризация волны?
- Что означает отрицательный показатель преломления среды?
- Как и почему движется волна в этом случае?

и так далее. . .

Ответы на подобного рода вопросы мы будем искать, еще раз просмотрев основы электродинамики, имея в виду метаматериалы.

Учение об электромагнитных явлениях — электродинамика (для макрообъектов) и квантовая электродинамика (для всех объектов, включая микрочастицы), пожалуй, является самой точной наукой из числа наук о взаимодействиях между частицами и полями.

На ее счету не только объяснение всех макроскопических и микроскопических электромагнитных явлений от излучения радиоволн гигантскими антеннами до излучения  $\gamma$ -квантов атомными ядрами, но и предсказание существования радикально нового состояния материи в форме антивещества, а также количественных оценок

очень тонких эффектов типа взаимодействия электрона с его собственным электромагнитным полем.

**Поля и частицы.** На современном уровне понимания все фундаментальные частицы являются квантовыми возбуждениями («квантами») различных полей. Например, фотон — это квант электромагнитного поля, а электрон — квант спинорного поля.

Полевой подход, восходящий к Фарадею и Максвеллу, позволил описать движение частиц, в том числе и релятивистских, при помощи квантовых уравнений Шрёдингера, Клейна–Гордона, Дирака. Согласно принципу относительности Эйнштейна, механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, т. е. описываются одинаковыми уравнениями. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца: их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  в них преобразуются по определенным правилам.

Полевой подход предопределил развитие теории гравитации (включая ОТО) и стал основой современной физики фундаментальных частиц, в том числе ее стандартной модели.

**Спинорное поле** описывается функцией, являющейся в каждой точке пространства спинором, и состоит из двух компонент, определенным образом преобразующихся друг через друга при повороте системы координат. Такова волновая функция электрона, представляющая пару спиноров (биспинор уравнения Дирака). Спинорные поля образуют частицы со спином  $1/2$  — электроны, мюоны, нейтрино, гипотетические кварки — персонажи квантовой теории поля. Квантами спинорного поля являются спинорные частицы.

**Уравнения Максвелла (1873)** — система дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах. В эти уравнения входят:

$\vec{E}$  — напряженность электрического поля,  
 $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля,  
 $\vec{D}$  — индукция электрического поля,  
 $\vec{B}$  — индукция магнитного поля,  
 $\vec{J}$  — плотность тока,  
 $\rho$  — плотность заряда.

Уравнения Максвелла в векторной записи представляют собой систему из четырех уравнений, сводящуюся в компонентном представлении к восьми (два векторных уравнения содержат по три компоненты каждое плюс два скалярных) линейным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка для 12 компонент четырех векторных функций ( $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ ):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8.36)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.37)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (8.38)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (8.39)$$

**Материальные уравнения.** Приведенные выше уравнения Максвелла не составляют полной системы уравнений электромагнитного поля, поскольку они не содержат свойств среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Соотношения, связывающие величины

$$(\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{J})$$

и учитывающие индивидуальные свойства среды, называются *материальными уравнениями*.

Материальные уравнения описывают свойства среды: ее поляризуемость, намагниченность, проводимость. Внешние электрические и магнитные поля вызывают поляризацию и намагничивание вещества, которые описываются соответственно вектором поляризации  $\vec{P}$  и вектором намагниченности  $\vec{M}$ . В линейном приближении

эти векторы пропорциональны напряженностям:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (8.40)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (8.41)$$

где введены безразмерные константы  $\chi_e$  — диэлектрическая восприимчивость вещества и  $\chi_m$  — магнитная восприимчивость вещества.

Результирующее поле в среде оказывается суммой внешних полей и полей, вызванных связанными зарядами и токами:

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (8.42)$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_a \vec{H}. \quad (8.43)$$

**Проницаемости среды.** Безразмерная величина

$$\varepsilon = (1 + \chi_e) \quad (8.44)$$

называется *относительной диэлектрической проницаемостью*.

Безразмерная величина

$$\mu = (1 + \chi_m) \quad (8.45)$$

называется *относительной магнитной проницаемостью*.

Вошедшие в выражения (8.44) и (8.45) величины

$$\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0, \quad \mu_a = \mu \mu_0 \quad (8.46)$$

с размерностями [Ф/м] и [Гн/м] называются *абсолютной диэлектрической проницаемостью* и *абсолютной магнитной проницаемостью* соответственно.

Дополнив выражения (8.42) и (8.43) законом Ома для удельной проводимости среды  $\sigma$  [1/(Ом·м)] и вектора плотности тока  $\vec{j}$ , запишем систему материальных уравнений в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (8.42a)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (8.43a)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (8.47)$$

Входящий в систему материальных уравнений закон Ома (8.47) можно считать справедливым для любых сред (не только проводящих). В соответствии с двузначностью

(8.30), (8.31) используем оператор дифференцирования в виде

$$\pm i\omega = \frac{\partial}{\partial t} \quad (8.48)$$

и преобразуем (8.47):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \pm \frac{\sigma}{i\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.49)$$

Записав первое уравнение Максвелла (8.36) в виде

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

и учтя (8.48), получим:

$$\text{rot} \vec{H} = \pm \frac{\sigma}{i\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left( \varepsilon_a \pm \frac{\sigma}{i\omega} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.50)$$

**Комплексная диэлектрическая проницаемость.** В скобках (8.50) стоит комплексная величина

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a \pm \frac{\sigma}{i\omega} = \varepsilon_a \pm i \frac{\sigma}{\omega}, \quad (8.51)$$

мнимая часть которой определяет тангенс  $\delta$  диэлектрических потерь

$$\text{tg} \delta = \frac{\sigma}{\varepsilon_a \omega} \quad (8.52)$$

угла  $\delta$ , характеризующего отличие материала как от диэлектрика (с  $\vec{J} = 0$ ,  $\sigma = 0$ ), так и от проводника (с  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ).

**Комплексная магнитная проницаемость.** В общем случае переменного и неоднородного внешнего поля магнитная проницаемость комплексна:

$$\dot{\mu} = \mu' + i\mu''. \quad (8.53)$$

Мнимая часть  $i\mu''$  описывает поглощение (т. е. потери) электромагнитной энергии в веществе.

**Возможность отрицательного преломления.** Зависимости проницаемостей среды от частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\vec{k}$  и их дисперсии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}, \frac{\partial \mu}{\partial \omega}$$

обуславливают парадоксальную возможность отрицательного коэффициента преломления, наблюдаемого в метаматериалах (см. ниже).

**Теорема Пойнтинга.** Если умножить третье уравнение Максвелла (закон Фарадея, (8.38)) скалярно на  $\vec{H}$ , а четвертое (закон Ампера — Максвелла (8.39)) на  $-\vec{E}$  и сложить результаты, можно получить теорему Пойнтинга:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_H) = -\vec{E} \cdot \vec{J}, \quad (8.54)$$

где

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (8.55)$$

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, \quad (8.56)$$

$$w_H = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}. \quad (8.57)$$

**Вектор Пойнтинга**  $\vec{S}$  является вектором плотности потока энергии, который определяет количество электромагнитной энергии, переносимой через единицу площади в единицу времени. Интеграл вектора Пойнтинга по сечению распространяющейся волны определяет ее мощность. Величины  $w_E$  и  $w_H$  определяют объемные плотности энергии электрического и магнитного полей.

**Закон сохранения энергии.** При отсутствии токов и связанных с ними потерь теорема Пойнтинга является уравнением непрерывности для энергии электромагнитного поля. Проинтегрировав его по некоторому замкнутому объему, можно получить закон сохранения энергии для электромагнитного поля:

$$\oint_s \vec{S} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_v (w_E + w_h) dv = 0. \quad (8.58)$$

Это уравнение показывает, что при отсутствии внутренних потерь изменение энергии электромагнитного поля в объеме происходит только за счет мощности электромагнитного излучения, переносимого через границу этого объема.

**Сила Лоренца.** Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  определяют силу Лоренца  $\vec{F}$ , действующую на пробный заряд  $q$ , движущийся со

скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (8.59)$$

Из (8.59) видно, что электрическая составляющая силы  $\vec{F}$  направлена по электрическому полю (если  $q > 0$ ), а магнитная — перпендикулярно скорости заряда и магнитной индукции.

**Векторные операторы поля.** Уравнения Максвелла (8.36)–(8.39) и материальные уравнения (8.42), (8.43), (8.47) записаны в терминах векторного анализа — раздела математики, распространяющего методы математического анализа на векторы в двух или более измерениях. Объектами приложения векторного анализа являются:

- векторные поля — отображение одного векторного пространства в другое;
- скалярные поля — функции на векторном пространстве.

Наиболее часто применяются векторные операторы:

- ротор и дивергенция — для векторных полей;
- градиент и лапласиан — для скалярных полей.

**Операторы набла и лапласиан.** Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом  $\nabla$  (набла). Для трехмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах оператор набла определяется формулой (5.2).

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: введенный ранее, в гл. 5, лапласиан (формула 5.3a) и операторы grad (градиент), div (дивергенция), rot (ротор) (табл. 8.1).

Основные преимущества векторных методов перед традиционными координатными:

- компактность (векторное уравнение объединяет несколько координатных);
- инвариантность (независимость от системы координат);
- обратимость (всегда возможен обратный переход);
- наглядность (простое физическое истолкование).

## Операторы поля

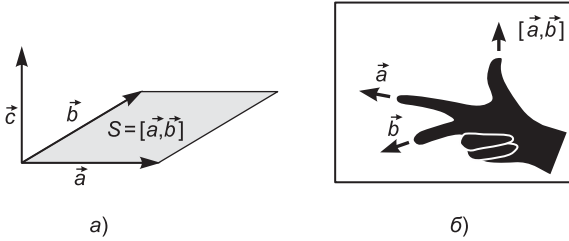
Оператор поля (ОП)	Во что ОП преобразует переменную	Что определяет ОП
$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$	Вектор $\rightarrow$ вектор	Характеризует вихревую составляющую векторного поля
$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	Вектор $\rightarrow$ скаляр	Характеризует расходимость, источники и стоки векторного поля
$\operatorname{grad}(f) = \vec{\nabla} f$	Скаляр $\rightarrow$ вектор	Определяет направление и скорость скорейшего возрастания скалярного поля

**Векторное произведение** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ставит в соответствие этим двум векторам новый вектор  $\vec{c}$ . *Векторным произведением* называется вектор  $\vec{c}$ , обозначаемый как  $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$  (или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ ,  $[\vec{a}\vec{b}]$ ), модуль которого равен площади  $S$  параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  отложены из одной точки и их направление совпадает с поступательным движением правого винта (по правилу правой руки (рис. 8.5)).

Векторное произведение удобно представлять в виде детерминанта квадратной матрицы третьего порядка, первая строка которой есть орты  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , во второй строке находятся евклидовы координаты вектора  $\vec{a}$ , а в третьей — координаты вектора  $\vec{b}$ :

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

Если разложить этот детерминант по элементам первой строки, то получим определение векторного произведе-



**Рис. 8.5.** Векторное произведение:  $a$  — модуль векторного произведения равен площади  $S$  параллелограмма;  $b$  — правило правой руки: номера второго и третьего пальцев правой руки указывают на последовательность  $\vec{a}, \vec{b}$  в векторном произведении, большой палец направлен перпендикулярно ладони и указывает направление вектора  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ . Векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  не перестановочны, т. е. их векторное произведение антикоммумутативно

ния в координатах:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

**Правая тройка векторов.** Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку векторов.

**Волновые уравнения.** Уравнения Максвелла являются дифференциальными уравнениями первого порядка по координатам и времени. Однако во второй паре в каждое уравнение входят обе неизвестные векторные функции  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . При отсутствии зарядов и токов можно перейти к уравнениям второго порядка, каждое из которых зависит только от одного, электрического или магнитного, поля [95].

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (8.62)$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (8.63)$$

Выражения (8.62), (8.63), формально похожие на дифференциальные соотношения гл. 5, относятся к

категории волновых уравнений. Любая функция, удовлетворяющая таким уравнениям, представляет собой электромагнитную волну (см. рис. 8.2).

**Правые и левые среды.** Для сред, у которых обе проницаемости среды одновременно положительны, три вектора электромагнитного поля — электрический  $\vec{E}$ , магнитный  $\vec{H}$  и волновой  $\vec{k}$  — образуют систему так называемых правых векторов.

Среды, у которых  $\varepsilon$ ,  $\mu$  — одновременно отрицательны, называют «левыми». У таких сред электрический  $\vec{E}$ , магнитный  $\vec{H}$  и волновой вектор  $\vec{k}$  образуют систему левых векторов.

В англоязычной литературе описанные материалы называют *right-* и *left-handed materials*, или сокращенно *RHM* (*правые*) и *LHM* (*левые*) соответственно.

**Перенос энергии** волной определяется вектором Пойнтинга:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (8.55)$$

Для *правой среды*  $\vec{S}$  направлен вдоль волнового вектора  $\vec{k}$ , т. е. параллельно *фазовой* скорости волны.

В *левой среде*, в которой одновременно  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu < 0$ , а  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют систему левых векторов, вектор  $\vec{S}$  направлен вдоль групповой скорости волны, т. е. антипараллелен и фазовой скорости, и направлению  $\vec{k}$ .

Объемная плотность энергии электромагнитного поля, равная (в линейной изотропной среде) сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей

$$w = w_E + w_H, \quad (8.64)$$

согласно (8.56) (8.57), зависит от проницаемостей сред:

$$w = w_E + w_H = \varepsilon \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \mu \frac{\mu_0 H^2}{2} \text{ [Дж/м}^3\text{]}. \quad (8.65)$$

Если  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu < 0$ , то, согласно (8.65), энергия волны будет отрицательной.

**Дисперсия левой среды.** Этот парадокс и существование отрицательного коэффициента преломления объяс-

няются зависимостями  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial \omega}$ , т. е. наличием у левой среды частотной дисперсии.

**Монополь Дирака и симметрия электродинамики.** Современная форма уравнений Максвелла имеет вид четырех векторных соотношений. Такую форму этим уравнениям придали Герц и Хевисайд. Эта форма отображает не только неразрывную связь электрических и магнитных явлений, но и их симметрию (над векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  производятся одинаковые математические операции).

Однако симметрия уравнений в целом получается неполной из-за того, что в одну их группу входят плотность электрического заряда  $\rho$  и плотность тока  $j$ , а в другую не входят аналогичные им плотность магнитного заряда и плотность магнитного тока. Ведь физики никогда не наблюдали магнитные заряды и никому не удавалось получить отдельно северный или южный магнитный полюс. Так что уравнения Максвелла правильно отражают ситуацию, существующую в природе, и, казалось бы, ни в каком усовершенствовании не нуждаются.

Однако отмеченная выше несимметрия уравнений все же вызывает некоторую неудовлетворенность. Эту неудовлетворенность можно сформулировать так: в связи с симметрией электрических и магнитных явлений было бы естественнее, если бы уравнения Максвелла, оставаясь правильными, выглядели вполне симметрично, т. е. содержали бы плотность магнитного заряда и плотность магнитного тока. Другими словами, хочется думать, что в природе существуют магнитные заряды (и, следовательно, магнитные токи), которые, однако, обладают такими свойствами, что их пока никто не смог обнаружить ни в одном из множества сделанных опытов.

Теоретически такую возможность впервые обосновал в 1931 г. Поль Дирак, который показал, что наряду с общепринятой несимметричной (но проверенной многими экспериментами) квантовой электродинамикой может

быть построена непротиворечивая с ней симметричная квантовая электродинамика, учитывающая существование магнитных зарядов. Гипотетический магнитный заряд, введенный Дираком, принято называть *монополю Дирака*.

С тех пор прошло более 80 лет, а проблема существования монополя Дирака все еще не решена: не доказано ни его наличие, ни его отсутствие. Поэтому проблема монополя остается актуальной до сих пор, и для ее разрешения ставятся все новые и новые эксперименты.



**Поляритоны.** Плазмоны в графене — коллективные колебания газа безмассовых квазичастиц — взаимодействуют с терагерцевыми и субтерагерцевыми фотонами. В таком взаимодействии с участием фононов решетки возникают сложные квазичастицы — *поляритоны*, которые поддерживают терагерцевые колебания миллиметрового и ближнего ИК-диапазонов волн ( $f = 0,3\text{--}400$  ТГц,  $\lambda = 1000\text{ м--}0,7$  мкм).

В случае совпадения частоты внешнего облучения и собственной частоты колебаний плазмонов возникает поверхностный плазмон-поляритонный (Surface Plasmon Polariton, SPP) резонанс графенового монослоя. Признаком резонансного возбуждения является поглощение света и рост амплитуды собственных SPP-колебаний [97, 98].

**Оптическая проводимость.** Под этим термином понимают электрическую проводимость в присутствии переменного электрического поля. Слово «оптическая» при этом понимается в расширительном смысле и характеризует диапазон частот, не ограниченный видимой областью спектра.

Переменное электрическое поле, воздействуя на свободные электроны — газ проводимости, изменяет свойства проводящей среды (диэлектрическую постоянную, коэффициент рефракции, волновое число и т. д.).

**Электронный газ** традиционно описывается теорией, предложенной Друде (P. Drude) в 1900 г. Благодаря простоте и наглядности модель Друде можно использовать для оценки многих кинетических явлений (статической и высокочастотной проводимости, эффекта Холла, электронной теплопроводности и других явлений в металлах и полупроводниках, где носители заряда подчиняются классической статистике).

Модель Друде объясняет и плазменные явления, в частности феномен оптической проводимости сред.

**Модель Друде.** Согласно теории Друде, металл состоит из свободных электронов (электронный газ) и тяжелых положительных ионов, которые можно считать неподвижными. В отсутствие внешних полей электроны

движутся прямолинейно с постоянной скоростью; это движение прерывается их столкновениями с ионами и между собой. В промежутках между столкновениями взаимодействие электронов с ионами и друг с другом не учитывается. Столкновения — это мгновенные события, внезапно изменяющие скорость электрона. Вероятность такого изменения скорости в течение промежутка времени  $dt$  равна  $dt/\tau$ , где  $\tau$  — время релаксации, имеющее смысл времени свободного пробега электрона.

**Допущения.** Пусть, например, электрон с эффективной массой  $m^*$  при  $t = 0$  испытывает соударение и приобретает скорость  $\vec{v}_0$  и момент  $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ . Двигаясь хаотически до соударения, вероятность которого составляет  $\frac{\Delta t}{\tau}$  ( $\Delta t < \tau$ ), электрон при  $t = \Delta t$  приобретает скорость  $\vec{v}$  и момент  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Согласно второму закону Ньютона, изменение момента электрона

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

в течение интервала времени  $\Delta t < \tau$  произошло в результате воздействия силы  $\vec{F}$ , так что

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \quad (9.1)$$

Источником силы  $\vec{F}$  явилось электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , действующее на заряд  $q = -e$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (9.2)$$

**Уравнение движения частиц газа.** Объединив (9.1) и (9.2), получим:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t = q\vec{E}\Delta t. \quad (9.3)$$

Среднее значение момента  $\langle\vec{p}\rangle = m^*\langle\vec{v}\rangle$  в интервале релаксации  $\tau$  (при  $\Delta t = \tau$ ) составит:

$$\langle\vec{p}\rangle = q\vec{E}\tau. \quad (9.4)$$

Закон Ома для плотности тока, содержащего в единице объема  $n^*$  зарядов, можно записать в виде:

$$\vec{J} = n^* \cdot q \cdot \langle \vec{v} \rangle. \quad (9.5)$$

Если носителями тока являются электроны, закон Ома запишется в виде:

$$\vec{J} = -e \cdot n^* \cdot \frac{\vec{p}}{m}. \quad (9.6)$$

Из (9.5) и (9.6) получим формулировку закона Ома в классической модели Друде для электронов:

$$\vec{J} = \left( \frac{n^* e^2 \tau}{m^*} \right) \vec{E}. \quad (9.7)$$

Вернемся к рассмотрению текущего временного промежутка  $\Delta t \leq \tau$ . Вероятность того, что начальное значение момента не будет отличаться от  $\vec{p}_0$ , равна

$$\vec{p}_0 \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right). \quad (9.8)$$

Составив приращение (9.3) с учетом (9.8)

$$\vec{p} - \vec{p}_0 \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right) = e \vec{E} \Delta t, \quad (9.9)$$

получим уравнение движения электронов газа:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = -e \vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}. \quad (9.10)$$

**Решение дифференциального уравнения (9.10) ищем в виде:**

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (9.11)$$

Подстановка (9.11) в (9.10)

$$-i\omega \vec{p}(\omega) = -e \vec{E}(\omega) - \frac{\vec{p}(\omega)}{\tau}$$

позволяет после преобразований получить

$$\vec{p}(\omega) \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right) = -e \vec{E}(\omega)$$

и далее:

$$\vec{p}(\omega) = -\frac{e\vec{E}(\omega)}{\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)} = -\frac{e\vec{E}(\omega)\tau}{1 - i\omega\tau}. \quad (9.12)$$

**Комплексная оптическая проводимость.** Подставив (9.12) в (9.6), будем иметь:

$$\vec{J}(\omega) = -en^* \frac{\vec{p}}{m} = \frac{n^* e^2}{m} \vec{E}(\omega) \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}, \quad (9.13)$$

откуда получается выражение для оптической проводимости в виде комплексной функции

$$\dot{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad (9.14)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{n^* e^2}{m} \tau, \quad (9.15)$$

$$\operatorname{Re}(\sigma) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (9.16)$$

$$\operatorname{Im}(\sigma) = -\frac{\sigma_0 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (9.17)$$

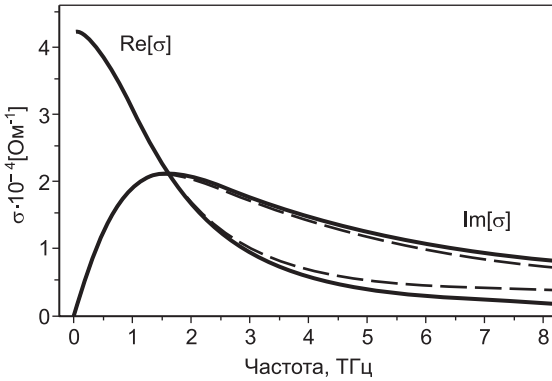
**Частотные характеристики** компонентов оптической проводимости графена [99, 100] изображены на рис. 9.3.

**Комплексная диэлектрическая функция** в рамках модели Друде получается на основании соотношения (8.33), вытекающего из представления волны в виде (8.31) с заменой обозначения  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_L$ :

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_L + i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (8.33a)$$

Подстановкой в (8.33a)  $\dot{\sigma}(\omega)$  вместо  $\sigma$  получаем выражение для комплексной диэлектрической функции

$$\dot{\varepsilon} = \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_0 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) + i \left( \frac{\sigma_0}{\omega (1 + \omega^2 \tau^2)} \right). \quad (9.18)$$



**Рис. 9.3.** Комплексная проводимость графенового листа: частотные характеристики действительной и мнимой частей (сплошные линии — для внутризонных компонентов модели Друде  $\hat{\sigma}(\omega)$ ). Вклад межзональной составляющей проводимости  $\hat{\sigma}_i(\omega)$  показан штриховыми линиями. Температура  $T = 300$  К, электростатическое смещение на графен не подано. Интервал между соударениями принят равным  $\tau = 10^{-13}$  с. Подробнее см. формулы (9.35)–(9.38). Рисунок адаптирован из [100]

**Частотные диапазоны.**

*Низкие частоты,  $\omega\tau \ll 1$ .* Для сред с  $\sigma_0 \neq 0$  в этом диапазоне доминирует

$$\text{Im } \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)}, \tag{9.19}$$

так что

$$\dot{\varepsilon} = i \frac{\sigma_0}{\omega}. \tag{9.20}$$

*Высокие частоты,  $\omega\tau \gg 1$ .* В этом диапазоне доминирует

$$\text{Re } \varepsilon = \varepsilon_L - \frac{\sigma_0\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \tag{9.21}$$

так что

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_L - \frac{\sigma_0\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \varepsilon_L - \frac{n^*e^2}{m} \tau \frac{\tau}{\omega^2\tau^2} = \\ &= \varepsilon_L \left( 1 - \frac{n^*e^2}{\varepsilon_L m \omega^2} \right) = \varepsilon_L \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \end{aligned} \tag{9.22}$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{n^* e^2}{\varepsilon_L m} \quad (9.23)$$

обозначает квадрат так называемой плазменной частоты  $\omega_p$ , оценивающей объемный показатель материала:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{\varepsilon_L m}}. \quad (9.24)$$

**Плазменная частота** (объемная) соответствует энергии плазмона  $E_p$ :

$$E_p = \hbar \omega_p = \hbar e \sqrt{\frac{n^*}{\varepsilon_L m}}. \quad (9.25)$$

**Поверхностная плазменная частота** составляет [101, 102]

$$\omega_{SP} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_m}}. \quad (9.25a)$$

Здесь  $\varepsilon_m$  относится к проводящей среде — металлу, графену (см. далее формулы (9.30), (9.31)).

Выражения (9.24) и (9.25), полученные из модели Друде, не учитывают затухания (абсорбции) волны в материале (см. гл. 8).

Учет затухания нам понадобится при рассмотрении поверхностных плазмон-поляритонных (*Surface Plasmon Polariton — SPP*) колебаний плотности электронной плазмы на границе раздела двух сред.

**Плазмон-поляритонная волна.** *SPP*-колебания проявляются в виде волны, распространяющейся в приповерхностном слое ангстремной толщины  $d \ll \lambda$ , являющемся своеобразным волноводом (рис. 9.4).

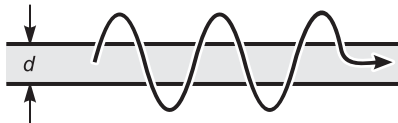


Рис. 9.4. Распространение *SPP*-волны

Волна распространяется по осям  $x$ ,  $z$  (рис. 9.5, см. также цв. вкл.) вдоль поверхности проводящего слоя

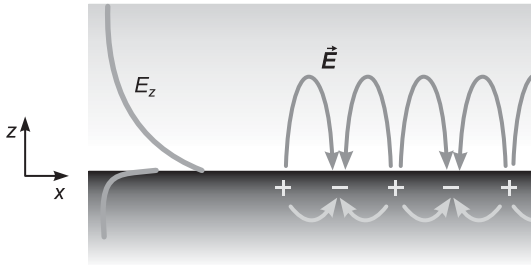


Рис. 9.5. Поверхностные колебания на границе металл — диэлектрик [103]

(металла или графена), имея продольный волновой вектор вида (8.13)

$$\dot{k}_x = k'_x + ik''_x \quad (8.13)$$

и поперечный волновой вектор:

$$\dot{k}_{z,m} = k'_{z,m} + ik''_{z,m}. \quad (9.26)$$

Распространение этой волны вдоль оси  $x$  подчиняется уравнениям

$$\vec{E}_m(x, z, t) = \vec{E}_{m,0} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}, \quad (9.27)$$

$$\vec{E}_d(x, z, t) = \vec{E}_{d,0} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}, \quad (9.28)$$

где индексы  $m$  и  $d$  относятся к слоям металла (графена) и диэлектрика соответственно.

Уравнения (9.27) и (9.28) отличаются от (8.6) наличием продольной и поперечной составляющих, отображающих распространение волны вдоль границы двух сред.

**Волновое уравнение.** Подстановка (9.27) и (9.28) в уравнения Максвелла и учет граничных условий позволяют найти [103] волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{E}_{d,m} = \mu_0 \mu_{d,m} \varepsilon_0 \varepsilon_{d,m} \frac{\partial^2 \vec{E}_{d,m}}{\partial t^2}. \quad (9.29)$$

**Волновые числа плазмона.** Решение волнового уравнения позволяет выразить в терминах (8.13) волновые

числа плазмона: продольное

$$\dot{k}_x = k'_x + ik''_x = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d} \right)^{1/2} \quad (9.30)$$

и поперечное

$$\dot{k}_{z,m} = k'_{z,m} + ik''_{z,m} = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_d} \right)^{1/2}. \quad (9.31)$$

Эти две волны взаимосвязаны таким образом, что продольное волновое число является действительным, а поперечное — мнимым. Взаимосвязь волн образует сопряженную моду Друде.

**Сопряженная мода Друде.** Сравним (9.30) и (9.31) с традиционной формой волнового числа, которая, согласно (8.2) и (8.5), при  $\mu = 1$  составляет

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}. \quad (9.32)$$

Отличие заключается в замене  $\varepsilon$  в (9.32) подкоренными выражениями  $\varepsilon(\omega)$ , составленными из компонентов комплексных диэлектрических проницаемостей вида (8.16):

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''. \quad (8.16)$$

Мнимость  $\dot{k}_{z,m}$  предопределяет, согласно (9.26), (9.31), следующее соотношение между компонентами  $\varepsilon(\omega)$  в (9.31):

$$\varepsilon_m + \varepsilon_d < 0. \quad (9.33)$$

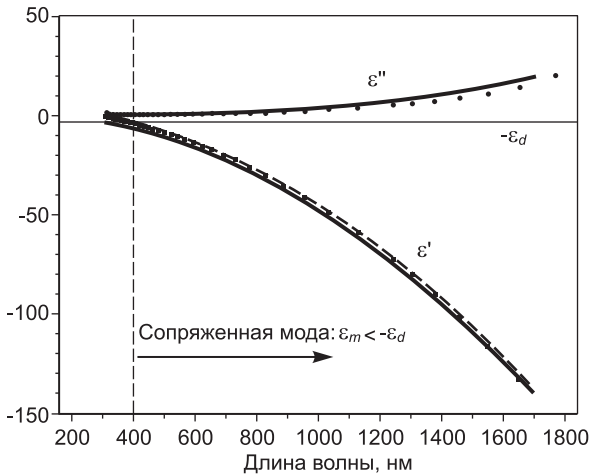
Вместе с тем число  $k_x$  в (9.30) не имеет мнимой части, поэтому

$$k''_x = 0, \quad k_x = k'_x, \quad \varepsilon_m < -\varepsilon_d. \quad (9.34)$$

Условия (9.33) и (9.34) можно иллюстрировать графиками рис. 9.6, где для  $\varepsilon_m$  принята форма (8.16), при которой

$$\dot{\varepsilon}_m = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad (8.16a)$$

а  $\varepsilon_d$  в (9.30) и (9.31) не имеет мнимой части.



**Рис. 9.6.** Компоненты условий (9.33), (9.34) существования сопряженной моды Друде [103]

**Внутризонные и межзонные проводимости.** Классическая модель Друде не учитывает перескоков носителей тока между энергетическими зонами. Межзонная (*interband*) проводимость  $\dot{\sigma}_i$ , обусловленная такими перескоками, суммируется с рассмотренной выше внутризонной (*intraband*) проводимостью  $\dot{\sigma}$ , образуя тотальную оптическую проводимость:

$$\dot{\sigma}_{\text{total}}(\omega) = \dot{\sigma}(\omega) + \dot{\sigma}_i(\omega). \quad (9.35)$$

Взаимодействие проводимостей изучалось [104, 105] с помощью формализма Кубо (без учета краевых эффектов в ленте графена). Результаты имели вид: для внутризонной проводимости Друде

$$\dot{\sigma}(\omega) = \frac{2e^2}{\pi\hbar} \frac{k_B T}{\hbar} \ln \left[ 2 \cosh \left[ \frac{\mu_c}{2k_B T} \right] \right] \frac{i}{\omega + i\tau^{-1}}, \quad (9.36)$$

для межзонной проводимости

$$\dot{\sigma}_i(\omega) = \frac{e^2}{4\hbar} \left( H \left( \frac{\omega}{2} \right) + i \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty d \in \frac{H(\varepsilon) - H(\omega/2)}{\omega^2 - 4\varepsilon^2} \right), \quad (9.37)$$

где  $\tau = 10^{-15}$  с — время релаксации;  $T$  — температура;  $\mu_c$  — химический потенциал;  $H(\varepsilon)$  — функция, определен-

ная как

$$\dot{H}(\varepsilon) = \frac{\sinh(\hbar\varepsilon)/k_B T}{\cosh(\mu_c/k_B T) + \cosh(\hbar\varepsilon/k_B T)}. \quad (9.38)$$

Из (9.36)–(9.38) и соответствующего рис. 9.3 видно, что в интересующем нас диапазоне ( $< 5$  ТГц) доминирует внутризонная компонента. Ход частотных зависимостей оказывается одинаковым для  $\dot{\sigma}(\omega)$  и  $\dot{\sigma}_i(\omega)$  (при обозначенных выше условиях и при отсутствии электростатического смещения, когда  $\mu_c = 0$  эВ). Поэтому обычно считают [104, 105] проводимость графена практически внутризонной.

**Управление проводимостью.** Изменяя напряжение на управляющем электроде (затворе), можно в достаточно широких пределах изменять оптическую проводимость графенового листа (рис. 9.7).

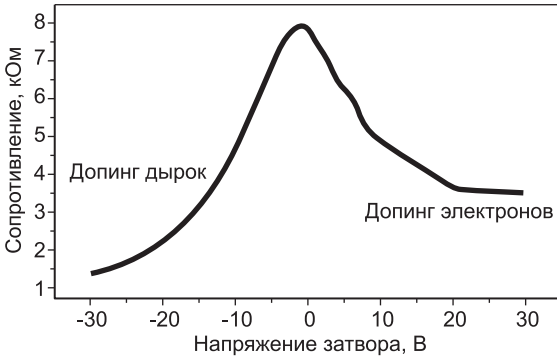


Рис. 9.7. Амбиполярное управление проводимостью графена [106]

**SP-затухание (*SP Damping Rate*).** Неустранимым является рассеяние на акустических фонах, что приводит к затуханию плазменных волн [107, 108].

**Длина распространения плазмона (Decay length)** определяется как дистанция, преодолевая которую SPP затухает в  $e$  раз. Заменив в (9.27) волновое число  $k_x$

на комплексную функцию  $\hat{k}_x$ , в соответствии с (8.13), (8.17), для амплитуды  $E(x)$  найдем:

$$E(x) = E_0 \exp(-k_x'' x), \quad (9.39)$$

где  $E_0 = \text{mod } \vec{E}_{m,0}$ ;  $E(x) = \text{mod } \vec{E}_m(x)$ .

Интенсивность волны уменьшается пропорционально квадрату напряженности электрического поля и при  $x = L$  падает в  $e$  раз. Таким образом,

$$L = \frac{1}{2k_2''}. \quad (9.40)$$

Из (9.39) и (9.40) видно, что за диссипативный процесс в плазмоне отвечает мнимая компонента  $k_2''$  SPP волнового вектора.

**Управление резонансной частотой.** Использование амбиполярного затвора дает возможность в широких пределах изменять концентрацию  $n^*$  свободных носителей заряда 2D-поверхности графена и тем самым, согласно (9.25) и (9.25а), управлять величинами  $\omega_p$  и  $\omega_{SP}$ .

**Изучение оптической проводимости графена** с учетом дополнительных факторов (многослойности графена, межзонных переходов носителей, температуры, толщины структуры, положения уровня Ферми) потребовало привлечения метода, носящего англоязычное название *Random-phase approximation (RPA)* [109–111].

Учет перечисленных выше факторов дополняет (и, конечно, усложняет) выражения (9.14)–(9.17) для оптической проводимости.

**Экспериментальное наблюдение плазмонов.** Для такого наблюдения [112, 113] был использован сканирующий микроскоп ближнего поля (*s-SNOM*) с модифицированным АФМ-наконечником для преобразования света в наноразмерное пятно и фиксации плазмонов (рис. 9.8).

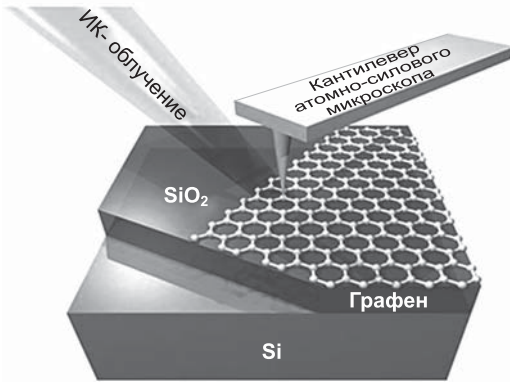


Рис. 9.8. Наблюдение графеновых плазмонов

Освещая поверхность графена инфракрасным лазером и используя сверхчувствительный зонд атомно-силового микроскопа, исследователи возбудили плазмоны, чтобы измерить плазмонные волны. Стоячие волны позволили увидеть амплитуду, длину волны и затухание плазмонных колебаний.

Спектроскопия графеновых слоев [114] и наблюдение [115] поверхностных волнообразных возбуждений «моря» электронов проводимости подтвердили наличие плазмонов, длина волны которых на полтора-два порядка меньше длины волны возбуждающего «насоса» (см. рис. 9.2). Сокращение длины волны происходит из-за уменьшения «эффективной» скорости света до величины порядка скорости Ферми.

Плазмонные волны позволяют преодолеть дифракционный предел Рэлея, предопределяя грядущее развитие плазмонной микроскопии и нанолитографии.

**Поверхностная модификация графена.** Компланарные массивы нанодисков — это упорядоченные графеновые «пятна», своеобразные рукотворные метаатомы, позволяющие управлять резонансными показателями метаматериала.

Нанодиски графена могут быть изготовлены [116] путем комбинирования процессов литографии и реак-

тивного ионного травления с использованием кислорода и масок из полистирола.

**Массив нанодисков.** На рис. 9.9 показан массив нанодисков [117], позволяющий регулировать частоту резонанса путем варьирования геометрических размеров поверхностного узора.

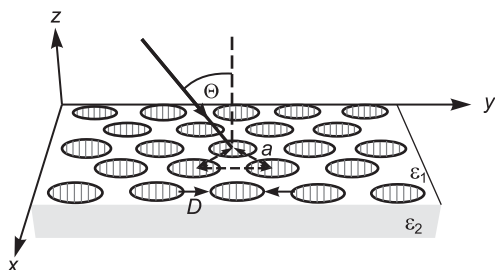


Рис. 9.9. Нанодиски графена

На рис. 9.10 (см. также цв. вкл.) показаны результаты [116, 117] экспериментов с массивом графеновых нанодисков.

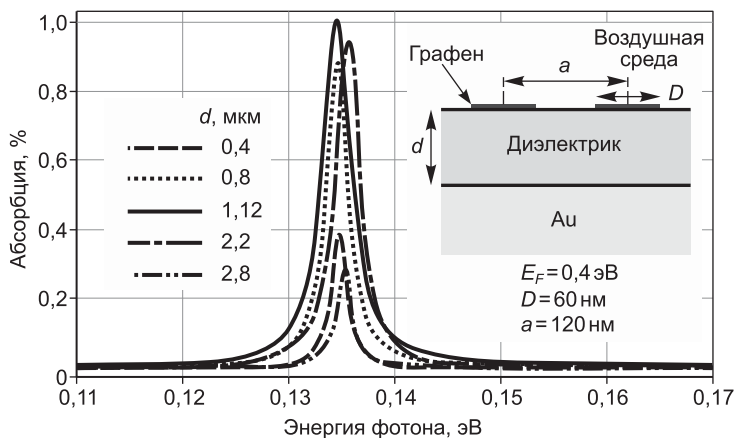


Рис. 9.10. Результаты исследования массива графеновых нанодисков

Изменяя диаметр пятна графена  $D$ , расстояние между пятнами (шаг массива  $a$ ), толщину диэлектрика  $d$ , можно получить резонансные кривые — зависимость абсорбции от энергии фотона  $E$ .

**Пересчет**  $E \iff f$ . Взаимный пересчет частоты и энергии фотона  $E$  осуществляется через константу Планка  $h = 4,21 \cdot 10^{-15}$  эВ·с:

$$E[\text{эВ}] = h \cdot f = 4,21 \cdot 10^{-15} [\text{эВ} \cdot \text{с}] \cdot f [\text{Гц}]. \quad (9.41)$$

Как видно из рис. 9.9 и 9.10, на массиве графеновых нанодисков можно создать узкополосный, практически 100% -й поглотитель электромагнитного излучения.

Изменяя форму дисков и вводя затвор в качестве еще одного органа регулировки, удалось [118] построить фотоприемники на 10 Гбит/с для оптических линий связи с увеличенной в 20 раз эффективностью фотоэлектронного преобразования.

**Вариант подложки**, позволивший добиться в окрестности частоты  $\omega$  значения  $\varepsilon(\omega) < 0$  путем создания периодической волнистости (рис. 9.11), также привел к реализации полного резонансного поглощения фотонов поверхностными плазмон-поляритонами (*surface-plasmon polaritons — SPPs*) [119].

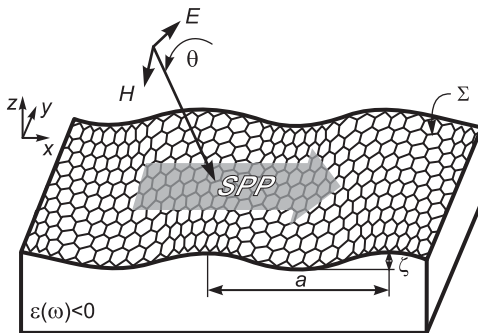


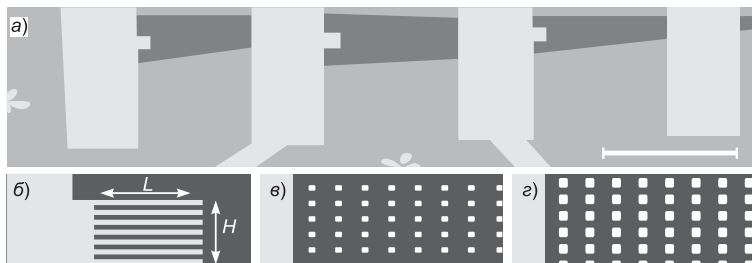
Рис. 9.11. Плазмон-поляритонные резонансы на подложке с волнистостью поверхности

При такой модификации резонансная частота определяется метаматериалом подложки, т. е. зависит от периода  $a$  ее волнистости.

**Нанесение полосок металла.** Границы металл — графен ( $p$ – $n$ -переходы — гребенки «пальчиков») также стимулируют плазмонное усиление и позволяют достичь практически полного поглощения электромагнитных колебаний [120, 121].

**Абсолютно черное тело** — плазмонно-активированная наноструктура графена, может поглощать до 99% падающего на нее света [120].

Величина эффекта зависит от  $\lambda$ , что доказывает его плазмонное происхождение. 20-кратное увеличение усиления наблюдалось (121) для  $\lambda = 514$  нм на «пальчиковой» структуре из металлических полосок шириной 110 нм (титан–золото), нанесенных на поверхность графена электронно-лучевой литографией (рис. 9.12).



**Рис. 9.12.** Нанесенные полоски металла, стимулируя плазмонное усиление, позволяют достичь практически полного поглощения электромагнитных колебаний

**Плазмонная солнечная батарея.** При нанесении на поверхность графена полосок в виде золотой «расчески» графеновая пленка становится непрозрачной 60%-й ловушкой видимого света, преобразующей солнечную энергию в электрическую.

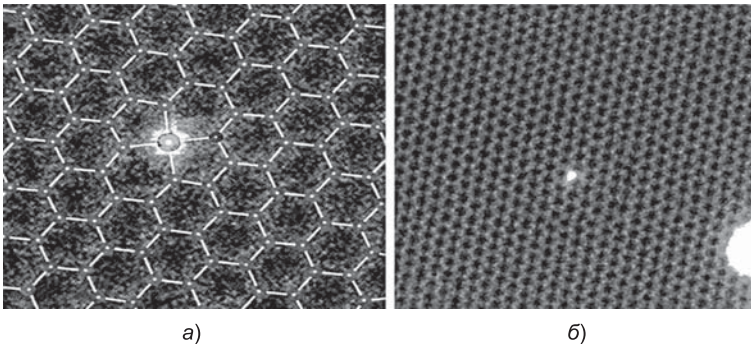
Лучше всего такая ловушка поглощает свет с  $\lambda = 514$  нм — это пик солнечного излучения.

Контуры границ металлических полосок и графена —  $p$ - $n$ -переходы. Встреча с фотонами образует на этих контурах добавочные поверхностные плазмоны.

Золотая «расческа» и графен способны дополнять друг друга и позволяют строить высокоэффективные плазмонные графеновые солнечные панели.

**Химическая модификация графена.** В гексагональной 2D-решетке графена атомы углерода могут быть замещены атомами фтора. При этом конфигурация решетки остается неизменной [122]. Это означает модификацию активной зоны графена флюорографеном — полупроводником с шириной запрещенной зоны 3 эВ и удельным сопротивлением более 1000 Ом·м.

Внедрение не только фтора, но и других одиночных атомов (кремния, водорода и т. д.) также образует нанополоски, которые стимулируют терагерцевые плазменные колебания (рис. 9.13, см. также цв. вкл.), демонстрирующие эффективность субангстремной визуализации.



**Рис. 9.13.** В гексогональной решетке однослойного графена одиночный атом углерода замещен атомом кремния (а) и атомом водорода (б). Annular dark-field (ADF) imaging [122]

**Технология субангстремной визуализации.** Применение просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) при понижении ускоряющего напряжения до  $U = 80$  кВ и использовании специально созданного монохроматора

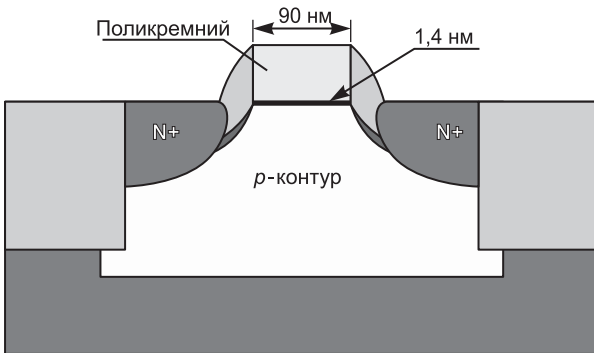
позволили увидеть каждый конкретный атом решетки графена [123]. Этот результат был недостижим ранее, поскольку ПЭМ всегда работали с высокоэнергетическими электронными пучками, разрушающими наноматериалы.

В то же время низкоэнергетические пучки порождают сферические и хроматические аберрации, уменьшающие пространственную разрешающую способность изображений. Новейшие ПЭМ, оснащаемые корректорами сферических аберраций, не дают должного разрешения из-за хроматических аберраций.

Специально созданный монохроматор, уменьшив хроматические аберрации, обеспечил субангстремное разрешение ПЭМ.

## ГРАФЕНОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

**Наномир в электронном чипе.** Современный кремниевый чип (рис. 10.1) аккумулирует важнейшие достижения технической цивилизации. Огромные диаметры пластин (200 и 300 мм), сверхмалые проектные нормы (0,18, 0,09, 0,045 мкм) и возможность интеграции 1 млрд компонентов в чипе обеспечили постиндустриальный технологический уровень, открывший невиданные ранее возможности для производств, науки, массового использования электроники в жизни людей [124].



**Рис. 10.1.** Структура современного МОП-транзистора: при минимальных топологических размерах в 90 нм реализуются активные зоны *n*-каналов толщиной 1,4 нм

Стоимость массового производства сверхбольших интегральных схем (СВИС) составляет 4 долл. на 1 см<sup>2</sup> площади чипа при любой сложности СВИС. Каждый квадратный миллиметр чипа стоит 0,04 долл.

**СБИС-экономика** создает новую, во многом уникальную ситуацию: реальность сверхсложных интеллектуальных систем (суперЭВМ, в том числе для использования в «облачных» вычислениях, персональных суперЭВМ массового применения) — с одной стороны, и массового применения однокристалльных «систем на кристалле» (SoC) для беспроводной техники «умных» вещей, систем идентификации, обеспечения безопасности, экологического контроля и т. д., — с другой.

**Эволюция.** Вышеперечисленное обеспечит эволюционное развитие кремниевой электроники в период Шестого технологического уклада. Получат развитие и станут общеупотребительными Fabless — индустрия проектирования и аутсорсинг как составные части цикла электронного приборостроения и производства SoC.

Персональные суперкомпьютеры станут массовыми, а облачные вычислительные сети — общедоступными. Встроенные беспроводные чипы и системы на кристалле обусловят новую архитектуру межприборных соединений в авиационных и ракетно-космических устройствах, комплексах логистики, обеспечения безопасности, экологического контроля и мониторинга техно- и экосистем. «Умные» вещи станут повседневными.

**Миллиметры и терагерцы.** Миллиметровый диапазон длин волн соответствует спектру частот 30 (10 мм) — 300 ГГц (1 мм). Этот гигагерцевый КВЧ (EHF) участок спектра (табл. 10.1) освоен мало. Первые графеновые транзисторы оказались работоспособными в этом участке спектра, положив начало прорыва в миллиметровый диапазон.

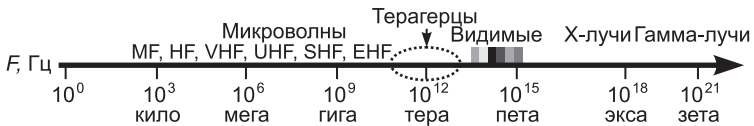
Терагерцевый (инфракрасный, ИК) диапазон, расположенный между микроволнами и видимым участком спектра (см. табл. 10.1, рис. 10.2), оказался частотной областью, в которой графен проявляет свойства метаматериала (см. гл. 8 и 9).

Поэтому можно говорить о прорыве графена в терагерцы (иногда этот диапазон называют Т-диапазоном, конвергентным с плазмоницей).

Таблица 10.1

## Миллиметровый и терагерцевый (ИК) диапазоны

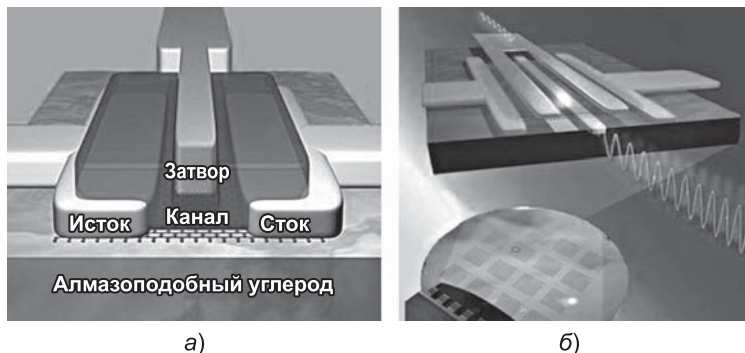
Диапазон частот (длин волн)	Обозначение по ISO 20473	Русская терминология
30 (10 мм) — 300 ГГц (1 мм)	Extra High Frequency (EHF)	Крайне ВЧ (КВЧ)
1 (300 мкм) — 10 ТГц (30 мкм)	Far Infrared (FIR)	Дальний ИК
10 (30 мкм) — 100 ТГц (3 мкм)	Mid Infrared (MIR)	Средний ИК
100 (3 мкм) — 385 ТГц (0,78 мкм)	Near Infrared (NIR)	Ближний ИК



**Рис. 10.2.** Спектр электромагнитных колебаний: пунктиром отмечен терагерцевый (ИК) диапазон, граничащий с миллиметровым (слева) и с видимым (справа) диапазонами

**Графеновые транзисторы** — база миллиметрового прорыва. Перспектива такого прорыва базируется на использовании рекордно высокой подвижности носителей заряда в графене. При осаждении графена из паровой фазы на подслой меди и перенесении подслоя на диэлектрическую подложку из алмазоподобного углерода (рис. 10.3) удалось получить транзисторы с предельной частотой  $f_T \approx 155$  ГГц [125].

Совершенствование таких транзисторов требует как уменьшения контактного сопротивления между электродами и каналом, так и уменьшения длины  $L$  канала, поскольку  $f_T \sim 1/L$ .



**Рис. 10.3.** Графеновые транзисторы: *а* — транзистор с каналом длиной  $L = 40$  нм имеет  $f_T = 155$  ГГц [57]; *б* — графеновый СВЧ-транзистор с  $f_T = 100$  ГГц. DARPA по программе SERA Перспектива: 1-ТГц эпитаксия графена на двухдюймовой пластине Si. Изображения взяты из <http://cache.gizmodo.com/assets/images/4/2011/11/1001ff04a77fad5948c8ff36729760e.jpg> <http://gizmodo.com/5466095/ibms-100ghz-graphene-transistor-might-replace-silicon-someday>

Существенно, что  $f_T$  почти не изменяется при охлаждении от 300 К до 4,2 К. Это важно для использования ВЧ-транзисторов на космических аппаратах.

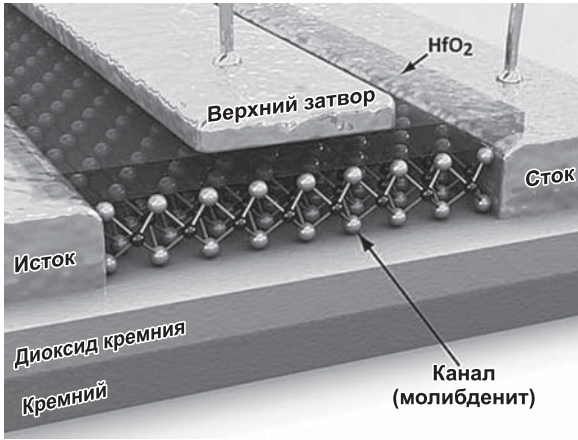
Первые разработки графеновых СВЧ-транзисторов (см. рис. 10.3, [127]) открывают дорогу в миллиметровый диапазон волн.

**Моноатомная альтернатива.** Сверхтонкий (0,65 нм) монослой молибденита ( $\text{MoS}_2$ ) является полупроводником с шириной запрещенной зоны 1,8 эВ.

Транзистор на  $\text{MoS}_2$  (рис. 10.4) имеет ток покоя, меньший в 100 000 раз по сравнению с кремниевым прототипом, и может рассматриваться как реальный конкурент графену в сфере микромощных СВЧ-чипов для связной и вычислительной техники [128, 129].

Есть основания ожидать появления транзисторов на основе силицена, а также химических модификаций графена.

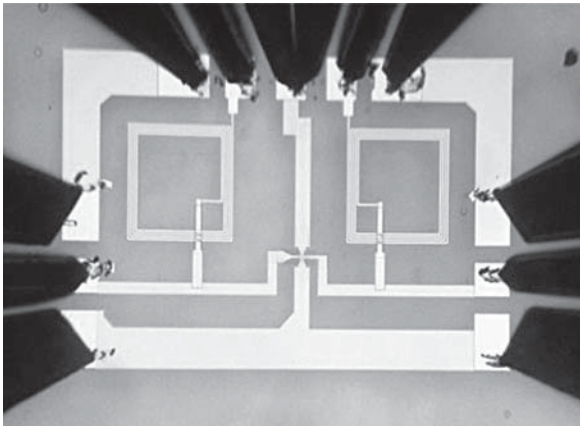
**Первая графеновая ИС.** Разработчики такой ИС (графенового СВЧ-смесителя на диапазон 10 ГГц)



**Рис. 10.4.** Транзистор на основе молибденита.

<http://www.lanepa.org/uploads/posts/2011-08/rsdavehk8v.jpg>

(рис. 10.5, [130]) презентовали это устройство для доказательства возможности амбиполярной работы нелинейных чипов на терагерцевых скоростях.



**Рис. 10.5.** Интегральная схема графенового СВЧ-смесителя на диапазон 10 ГГц.

Фото: AAAS/Sciencen <http://spectrum.ieee.org/image/1871417>

**Амбиполярность** — новое качество схемотехники. Многочисленные публикации свидетельствуют о возможностях амбиполярной наносхемотехники как для радиотехнических приложений, так и для цифровой аппаратуры (см., например, [131]–[133]).

**Амбиполярная схемотехника.** Амбиполярный транспорт квазичастиц открыл возможность применения эффекта одновременного дозированного использования электронного и дырочного токов. Амбиполярный эффект, наблюдающийся в графене, CNT, Si-нанопроводах и органических транзисторах, придает наносхемотехнике новые свойства [134].

Вернемся к рассмотрению транзисторного включения ленты графена, упоминавшемся ранее (рис. 10.6, *a*).

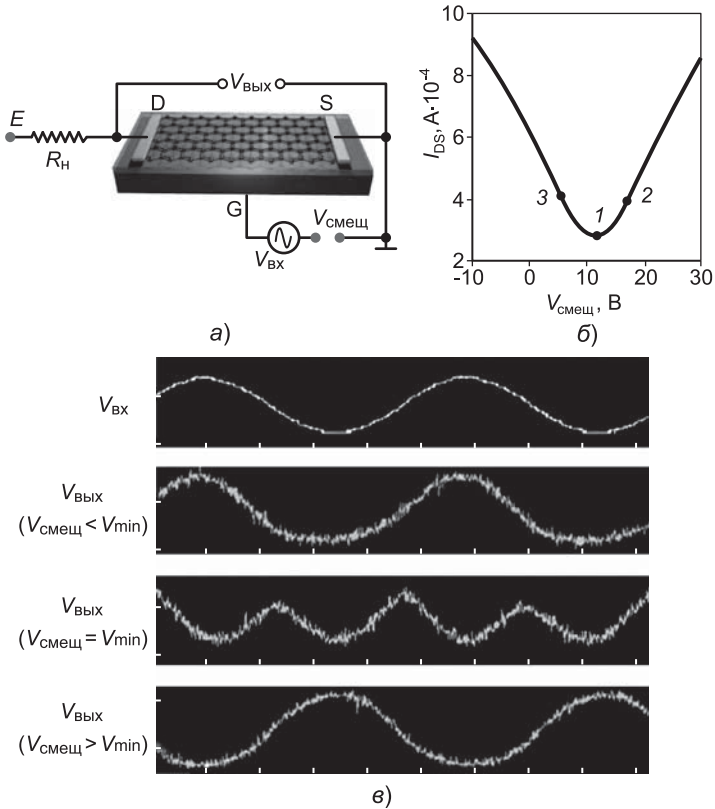
Путем изменения напряжения на затворе эта цепь может быть сконфигурирована как МДП-усилитель с *n*- или *p*-каналом либо в виде структуры, использующей суперпозицию двух типов проводимости. В результате цепь может работать либо в режиме усилителя с общим истоком или с общим стоком, либо в режиме умножителя частоты и устройств модулирования и манипуляции сигналов [134].

Три характерные рабочие точки амбиполярной вольт-амперной характеристики (ВАХ) на рис. 10.6, *б* усилителя, изображенного на рис. 10.6, *a*, соответствуют:

- 1 — минимуму  $V_{\min}$  ВАХ и равенству  $V_{\text{сmeц}} = V_{\min}$  (средняя точка Дирака с минимальной проводимостью, где вклад электронов и дырок в перенос заряда одинаков);
- 2 — неравенству  $V_{\text{сmeц}} > V_{\min}$ , электронный тип проводимости;
- 3 — неравенству  $V_{\text{сmeц}} < V_{\min}$ , дырочный тип проводимости.

Эти рабочие точки позволяют получить три режима работы: усилитель, инвертор, нелинейный преобразователь.

Как видно из рис. 10.6, *в*, в режиме, определяемом точкой 3, выходное колебание  $V_{\text{вых}}$  синфазно с синусоидальным входным сигналом  $V_{\text{вх}}$ .



**Рис. 10.6.** Многофункциональный однотранзисторный усилитель.

Изображения заимствованы из

[http://www.oleny.ru/images/news/AUPGU.jpg](http://www oleny.ru/images/news/AUPGU.jpg)

и <http://phys.org/news/2010-10-triple-mode-transistors-potential-graphene-based-amplifiers.html>

При  $V_{\text{смещ}} > V_{\text{min}}$  (точка 2) сигнал на выходе находится в противофазе со входным сигналом. Реализуется режим инвертора.

При  $V_{\text{смещ}} = V_{\text{min}}$  (точка 1) схема работает в режиме умножения входной частоты и может выполнять другие операции нелинейной радиотехники: модуляцию, манипуляцию и т. д. [68].

Рассматриваемую амбиполярную структуру можно специализировать применительно к цифровой или аналоговой схемотехнике [135, 136]. Специализация достигается путем сдвига точки Дирака вдоль входной оси (рис. 10.7).

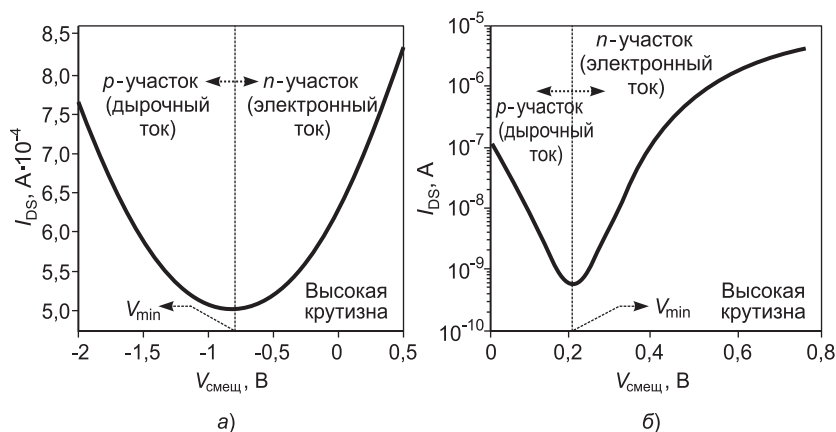
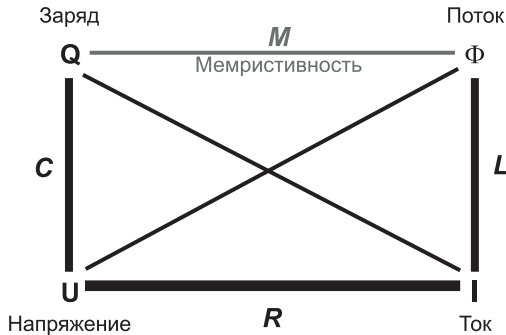


Рис. 10.7. Амбиполярные ВАХ для аналоговой (а) и цифровой (б) схемотехники

**Мемристор как революционная схемотехническая структура.** Мемристор (*memristor*, от *memory* — «память», и *resistor* — «электрическое сопротивление») — пассивный элемент в электронике, способный изменять свое сопротивление. Мемристор может быть описан как двухполюсник с нелинейной вольт-амперной характеристикой, обладающий гистерезисом. Теория такого двухполюсника была создана в 1971 году профессором Леоном Чуа (*L. O. Chua*), который назвал мемристор «потерянным» схемным элементом [137].

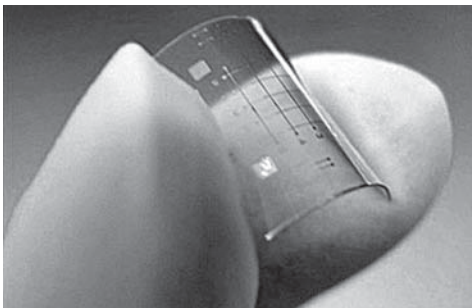
На рис. 10.8 показаны феномены электрических цепей ( $Q$ ,  $\Phi$ ,  $U$ ,  $I$ ) вместе с известными типами пассивных компонентов ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ). Выделена исследованная Чуа «потерянная» связь между зарядом  $Q$  и потоком  $\Phi$ . Компонент, соответствующий этой связи и ранее считав-



**Рис. 10.8.** Мемристорность (памятливость) возникает в наноразмерных масштабах при переносе заряда посредством сочетания электронного и ионного механизмов переноса

шийся лишь теоретическим объектом, был реализован в 2008 г. [138].

В отличие от теоретической модели устройство не накапливает заряд, подобно конденсатору, и не поддерживает магнитный поток, как катушка индуктивности. Работа устройства обеспечивается за счет химических (наноионных) превращений. Например, переключение в мемристоре реализуется перемещением ионов кислорода в зоне пересечения шин из оксида графена и алюминия [139] (рис. 10.8).



**Рис. 10.9.** Графеновый мемристор на прозрачной гибкой подложке. Фото: Sung-Yool Choi

При таком обмене ионами кислорода резко изменяется проводимость пересечения, и мемристор переключается (ON $\leftrightarrow$ OFF).

Наличие гистерезиса (рис. 10.10) позволяет использовать мемристор в качестве ячейки памяти. Резистивное сопротивление  $R_M = M$ , где  $M$  — наклон кривой ВАХ. Величина  $M$  зависит от того, насколько долго через элемент протекал ток, т. е. от количества заряда, прошедшего через элемент ранее. В нуле кривые  $U$  и  $I$  пересекаются. Это значит, что  $M$  покоящегося мемристора может быть различным и зависит от его предыстории.

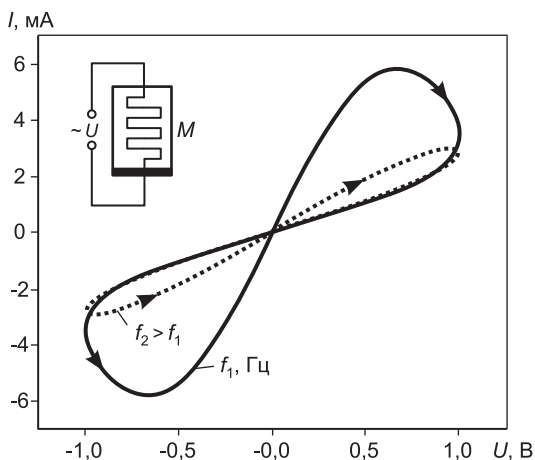


Рис. 10.10. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) мемристора

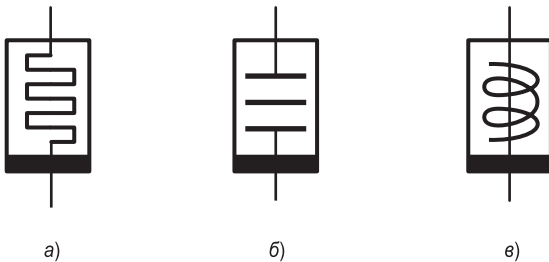
**Универсальный элемент.** В принципе, во многих случаях мемристоры могут заменить транзисторы. Теоретически они могут быть более емкими и быстрыми, чем современная флеш-память. Их блоки могут заменять собою оперативную память и жесткие диски. Умение мемристоров «запоминать» заряд позволит отказаться от загрузки системы. В памяти компьютера, отключенного от питания, будет храниться его последнее состояние. Мемристор можно повторно включать и начинать работу

с точек остановки работы. Короткие импульсы тока не меняют состояния мемристора. Величина тока при включении покажет состояние мемристора как элемента аналоговой памяти.

Благодаря этим особенностям на основе мемристора можно строить новые реконфигурируемые вычислительные и цифроаналоговые структуры, в том числе системы искусственного интеллекта.

Таким образом, мемристор — универсальный схемный элемент, применимый в цифровой, аналоговой и цифроаналоговой электронике и реализуемый в различных технологических базисах.

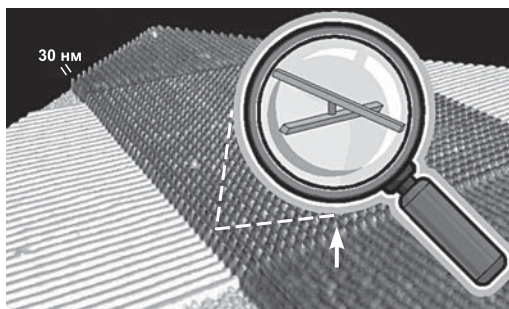
**Другие мемро-элементы.** Мемристивность может быть присуща пассивным двухполюсникам. На рис. 10.11 показаны мемро-элементы  $L$  и  $C$ , предсказанные и изученные в [140].



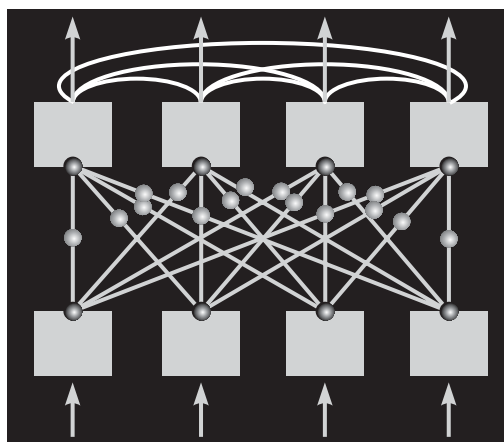
**Рис. 10.11.** Мемристор (а) и гипотетические мемро-элементы: мемроконденсатор (б) и мемроиндуктивность (в)

**Новая архитектура [141, 142].** Системы с мемристорами преодолевают ограничения классической концепции фон Неймана. Например, массив мемристоров (рис. 10.12, [143]) как средство создания систем дает возможность пользователю программировать готовый продукт, реконструировать аппаратуру в процессе ее эксплуатации и работы в реальном масштабе времени и т. д. (рис. 10.13).

**Мемристивная КМОП ИС.** В такой гибридной схеме мемристоры берут на себя роль переключателей и конфигурирующих устройств (рис. 10.14, [144]).

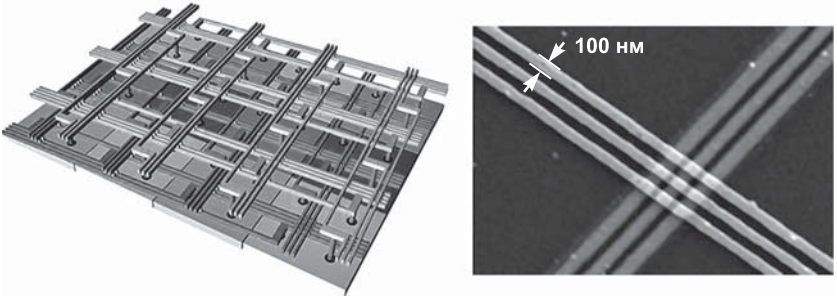


**Рис. 10.12.** Массив мемристоров — новое средство создания систем [65]



**Рис. 10.13.** Мемристоры (светлые точки) как основа реконфигурации блоков резервированной аппаратуры высокой надежности [66, 67]

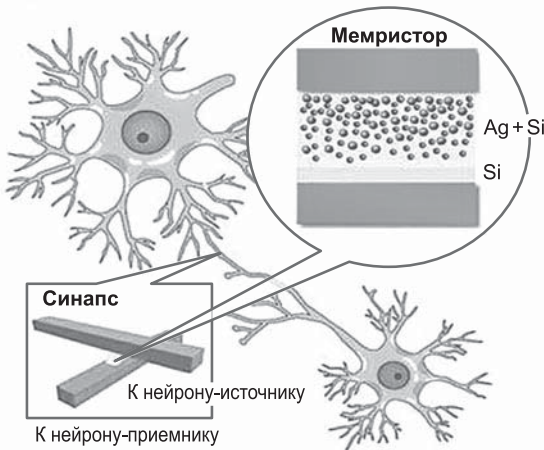
**Нейрон и его модель.** Как известно, биологический нейрон представляет собой тело диаметром от 3 до 100 мкм (ядро и органеллы, рис. 10.15). Синапсы осуществляют взвешенные связи выхода нейрона с входами других нейронов. Связи с положительным весом называются *возбуждающими*, а с отрицательным — *тормозящими*.



**Рис. 10.14.** Гибридная схема мемристивной КМОП ИС.

Серым выделен КМОП-слой, синим — проводники, формирующие мемристоры. На стандартной КМОП ИС размещено 10 тыс. мемристоров [66].

<http://www.scidacreview.org/0804/images/hardware09.jpg>



**Рис. 10.15.** Нейрон и мемристор

(<http://www.nanowerk.com/spotlight/id15951.jpg>)

Аксон — единственный выход нейрона. Сигнал с аксона может поступать на произвольное число входов других нейронов.

Модель нейрона (рис. 10.16 [145]) включает в себя взвешенный сумматор 2, выход которого определяется через его входы 1 и матрицу весов  $w_1, w_2, \dots, w_N$ .

Вычислитель 3 передаточной функции формирует сигнал аксона. Выход вычислителя связан со входами 4 внешних нейронов.

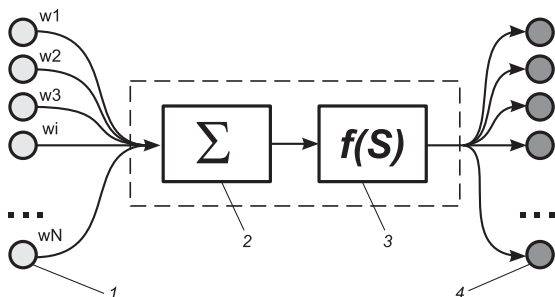


Рис. 10.16. Модель нейрона

**Мемристор — основа систем ИИ.** Скорее всего, мемристор создаст основу наносистем, эмулирующих работу мозга [146], и возьмет на себя функции реконфигурации ИИ и организации нейронных сетей, создавая или разрывая связи между блоками системы ИИ (рис. 10.17).

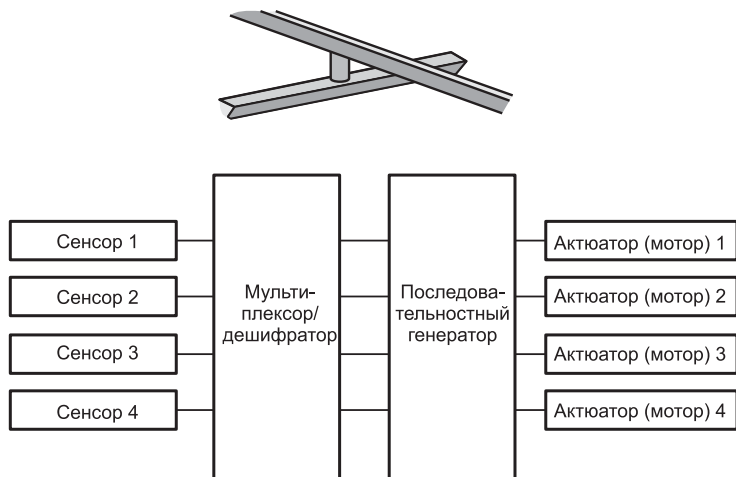


Рис. 10.17. Мемристорная система искусственного интеллекта (ИИ): *a* — мемристорный контакт; *б* — структурная мультисенсорная схема с актуаторами

## МНОГОЛИКИЙ ГРАФЕН

**Нанопотоника.** Как следует из материалов гл. 9, эффективность фотопреобразователей напрямую связана с плазмонными резонансами и поглощениями фотонов графеном. Высокоэффективная фотоника графена открывает возможности построения как широкополосных преобразователей солнечного света, так и узкополосных систем оптической связи, использующих присущее графену амбиполярное управление.

Рукотворное графеновое «абсолютно черное тело», являясь результатом конвергенции фотоники и плазмоники, создает новую, экологически безупречную основу энергетики будущего (см. также [147]).

**Атомарная визуализация и нанолитография.** Плазмон-поляритонные волны, естественным образом преодолевающие предел Релея, открыли невероятные возможности для развития микроскопии отдельных атомов и нанолитографии.

**Биоинформатика графена** базируется на освоении терагерцевого диапазона волн, начиная от его нижнего, миллиметрового, участка.

**Миллиметровое излучение** соответствует частотам от 300 ГГц до 6 ТГц. Эти СВЧ-колебания одновременно являются инфракрасными тепловыми волнами.

Длительное время миллиметровый участок спектра считался непригодным для практического использования, так как отсутствовала элементная база и не было технически приемлемых средств генерации, приема, и канализации колебаний.

Между тем это . . . голоса живых клеток [148].

**Голоса живых клеток.** Каждая живая клетка окружена чрезвычайно тонкой оболочкой — мембраной, толщиной иногда всего в две молекулы. В мембране имеются каналы, через которые клетка контактирует с окружающей средой. Каналы обладают способностью пропускать ионы и тем самым регулировать как условия жизни клетки, так и отклонения от ее нормального состояния при заболеваниях. Вся жизнедеятельность организма обусловлена состоянием и функционированием мембран.

**Проницаемость мембраны** зависит от напряженности электрического поля  $E$ , проходящего через ее оболочку. Разность потенциалов между внутренней и внешней поверхностями оболочки клетки составляет доли микровольта, но при наноразмерной толщине мембраны  $E$  может составлять десятки тысяч вольт на сантиметр. Проникающие через мембрану ионы излучают радиоволны миллиметрового диапазона. Таким образом, тело человека (и любого другого живого существа вплоть до амебы, бактерии или не засохших клеток растения) является не только антенной, принимающей любые радиоволны, но и генератором — излучателем радиоволн в СВЧ-диапазоне. Это воистину голос всего живого [149–151].

**Клетки излучают.** Вибраторами, излучающими радиоволны в миллиметровом диапазоне, являются отдельные молекулы и атомы (ионы) клеток живого организма. Все клетки любого организма излучают радиоволны. Видимо, эта способность появилась еще у самых первых одноклеточных миллиард лет назад и является важнейшим признаком отличия живого от неживого.

У человека, несомненно, существует внутренняя информационная система (подсознание, биотоки, нервная и лимфатическая электропроводности), обеспечивающая сложнейший симбиоз многих миллиардов клеток и тем самым — живучесть организма как единого целого. Клетки головного мозга, как и любые другие живые клетки, генерируют радиоволны. Роль совокупности внешних антенн для такой системы играют биологически активные точки акупунктуры — интерфейсы подсистем организма.

Через них осуществляются передача и прием СВЧ-излучения. При акупунктурном воздействии к этим точкам можно подключиться извне.

Внешнее радиоизлучение поступает не только от окружающей живой природы, но и от других людей. Вероятно, феномен кожного зрения связан с изменением потенциалов на коже в результате воздействия внешнего или отраженного СВЧ-сигнала.

Несколько лет назад опыты одного индийца, работающего в США [152], показали, что под воздействием чужого взгляда разность электрических потенциалов на коже человека меняется (вот откуда идет ощущение чужого взгляда на себе!). Такое воздействие может оказывать СВЧ-радиоизлучение, идущее из глаз (своеобразных антенн нашего мозга). Интересно, а если посмотреть в чужие глаза, как изменится разность потенциалов на сетчатке этих глаз, и какие электроимпульсы побегут в чужой мозг?

В растениях имеется такая же электрическая система сигнализации, как у животных или у человека [152].

Все живые клетки обладают этим древнейшим средством связи и симбиоза. Исследователи подвергали растения воздействию различных внешних раздражителей, и приборы типа «детекторов лжи» (фиксирующие изменение разности потенциалов) регистрировали у растений электрические импульсы, подобные нервным реакциям человека и животных. Доказано, что растение, меняя электрические потенциалы в своих листьях, посылает другому сообщения об опасности. Действует все тот же древний механизм генерации СВЧ-радиоволн оболочками клеток.

**Миллиметровая резонансная терапия (МРТ)**, как новое направление в медицине, появилась в конце 1970-х — начале 1980-х годов. Родиной ее является бывший Советский Союз. В те годы было обнаружено позитивное воздействие волн миллиметрового диапазона на биологические объекты.

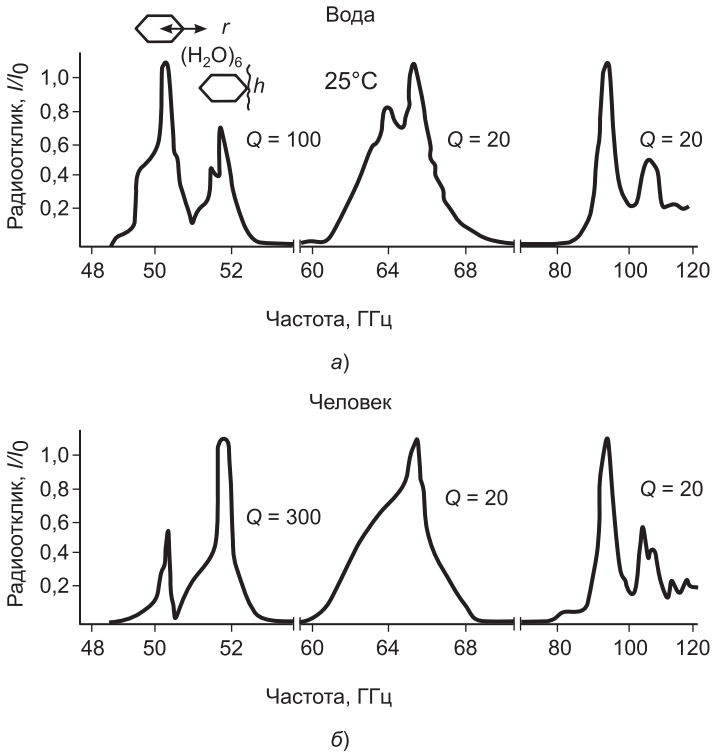
После обнаружения такого воздействия стали разрабатываться медицинские приборы («Явь-КВЧ», «Электро-

ника-КВЧ», «Порог 1», «Порог 2» и др.), появились теоретические работы по объяснению механизмов этого воздействия. В первом приближении теоретические выкладки строились на резонансном взаимодействии волн (частоты 50–70 ГГц) и живой клетки [153–155].

**Осмысление роли воды.** Вода является основным компонентом живых организмов. Организм человека состоит в среднем на 75% из воды, медуза — на 98%, 4-месячный эмбрион человека — на 92%, сердце — на 80%, головной мозг — на 75%. Первоначальные представления о роли водной среды в жизнедеятельности не учитывали структурных и радиоволновых свойств воды. На самом деле, система «молекулярная структура воды и резонансные волны» представляется наиболее глубокой и универсальной системой гомеостаза на молекулярно-полевом уровне [153–155].

**Особая роль миллиметровых (ММ) волн** в природе [155] оказалась связанной с резонансным взаимодействием ММ-волн с водными и биологическими средами. Резонансные спектры воды (при 25°C) и тканей организма человека представлены на рис. 11.1. Спектр СВЧ-радиоизлучения клеток живого организма является сплошным и широкополосным [153–155]. Как видно из рис. 11.1, резонансные частоты воды и тканей организма человека идентичны. Это подобие указывает на единую физическую природу взаимодействия ММ-волн с молекулярной водной структурой. Принимая во внимание высокое содержание воды в организме (в среднем около 75%), результат вполне объясним [155]. Из рис. 11.1 видно, что ширина резонансной кривой спектра человека меньше, чем у такой же кривой спектра воды. Фильтровать и модифицировать излучение, т. е. делать его более узкополосным и модулированным, может только мозг.

В исследованном [155] диапазоне частот (1–120 ГГц) резонансы наблюдались только в трех поддиапазонах: вблизи 50, 65 и 100 ГГц, причем добротность в поддиапазоне 50 ГГц у человека выше по сравнению с водой



**Рис. 11.1.** Резонансные спектры воды (а) и тканей организма человека (б) [155]

в соотношении 300 и 100 и падает в обоих случаях до 20 в двух других поддиапазонах резонансных частот.

**Миллиметровая наноэлектроника** позволит раскрыть многие тайны функционирования беспроводных биосистем, создаст возможности управления ими, прояснит опасности нейрофизиологического оружия и технологию противодействия ему.

**Спинтроника графена. Фильтрация электронов.** Фильтрация фермионов по их спидам является важнейшей для спинтроники. Два типа долин в графене можно рассматривать как два резервуара для носителей разного

знака поляризации. При этом, как показано в [156], фильтрация возможна с помощью полупрозрачной линейной неоднородности в графене. Такую технологию уже успели назвать VALLEYTRONICS.

В качестве фильтра для разделения разнополярных носителей можно использовать линейную неоднородность решетки графена (рис. 11.2, см. также цв. вкл.) [156, 157].

Входящий поток электронов (с компонентами  $K$  и  $K'$  и углом  $\alpha$ ) достигает линии дефекта. Электроны типа  $K$  (из зеленого резервуара) при достаточно большом угле  $\alpha$  проходят через фильтр, а электроны типа  $K'$  (из красного резервуара) отражаются от линейного дефекта. Таким образом, униполяризованные носители отфильтровываются.

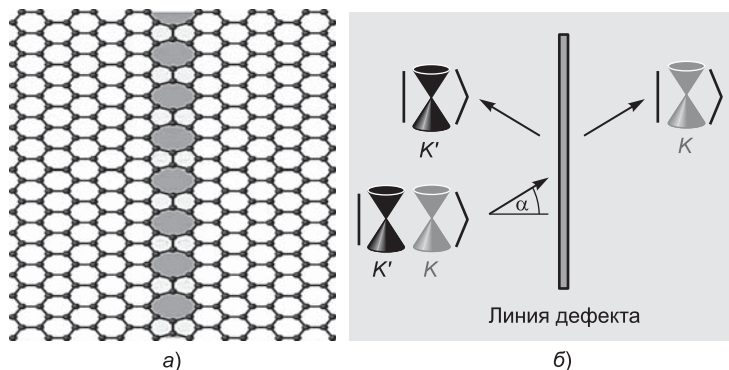


Рис. 11.2. Фильтрация — один из способов разделения разнополяризованных электронов: *а* — линейный дефект; *б* — принцип фильтрации

**Геномика графена.** Секвенирование биополимеров (белков и нуклеиновых кислот — ДНК и РНК) заключается в определении их первичной аминокислотной или нуклеотидной последовательности (от англ. *sequence* — *последовательность*). В результате получается линейное символьное описание, которое сжато поясняет атомную структуру молекулы [158].

Наиболее продвинутые методы позволяют секвенировать не более 100 фрагментов ДНК в день. В настоящее время расшифрована примерно половина активных генов человека, что составляет 3% его генома. О важности такой расшифровки для медицинских целей написано немало в общедоступной литературе. В первую очередь она ведется для тех участков генома, где расположены активные гены, в особенности гены, имеющие отношение к болезням человека.

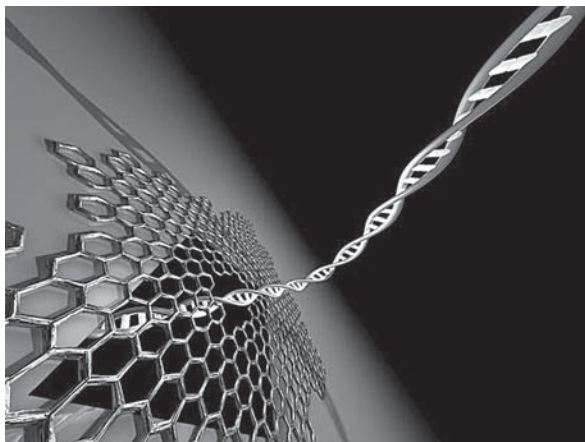
Нужно ли расшифровывать остальные 97%? Наверное, нужно, хотя бы для того, чтобы подойти к пониманию роли этого огромного количества как будто «молчащей» наследственной информации. Неужели это пустой балласт? Или эта «внегенная» информация играет какую-то роль в обеспечении жизнедеятельности человека во всех ее аспектах?

**Геном как книга.** Геном человека — полный набор генов, упакован в 23 пары хромосом. Хромосомы нумеруют в порядке уменьшения их размера от самой большой (1-й), до самой маленькой (22-й). У женщин 23-я пара содержит две одинаковые хромосомы (их называют X-хромосомами), а у мужчин — две разные хромосомы (X-хромосому и Y-хромосом).

В геноме с помощью генетического кода записаны все превратности и достижения эволюции нашего вида, начиная с самых дальних глубин геологических эпох. У нас есть гены, которые не изменились с того времени, когда зашевелилось первое живое одноклеточное существо. Одни гены появились, когда наши предки были червями, а другие — когда они стали рыбами.

Наш геном — это летопись вида, начатая 4 млрд лет назад и продолжающаяся до сегодняшнего дня. Некоторые гены зафиксировались в настоящем виде потому, что наши предки пережили эпидемию страшной болезни. А есть еще гены, с помощью которых можно проследить миграции людей по Земле за последние тысячелетия [159].

**Графен и ДНК.** Протаскивание единичной молекулы ДНК через нанометровое отверстие в листе графена из-



**Рис. 11.3.** Анализ молекулы ДНК целиком, без мощных вычислений

меняет характеристики проводимости листа (рис. 11.3), [160–162].

**Скоростное секвенирование ДНК** основано на ионной чувствительности кромок (нанопор) графеновых лент. Присутствие ионного канала мутантной формы мембранного белка дрожжей *порина А* в водном растворе хлорида калия обеспечивает фиксацию разности потенциалов, зависящую от типа нуклеотида ДНК. Разность потенциалов возникает по разные стороны мембраны при проталкивании ДНК через нанопору ионного канала. При вхождении в ионный канал молекула ДНК частично перекрывает поток ионов, и по величине уменьшения тока легко понять, какой именно из четырех типов нуклеотидов — аденин, гуанин, тимин или цитозин — проходит в данный момент через нанопору [162].

**Перемещение ДНК.** Природа для перемещения ДНК-молекулы использует механизм репликации. Репликация заключается в постройке комплементарной цепи на имеющейся матрице ДНК.

Было продемонстрировано [163] использование репликации для перемещения цепочки ДНК сквозь отверстие в монослое графена (см. рис. 11.3).

Пропускание цепи ДНК сквозь ионо-чувствительный канал отверстия монослоя должно происходить с постоянной скоростью, достаточной для того, чтобы ионный ток успевал измениться и быть зафиксированным.

Такая технология [163] базировалась на использовании дрожжевого белка порина [164].

К порину был присоединен ДНК-вирус  $\Phi 29$  — генетический паразит бактерий *Bacillus subtilis*. Полимераза  $\Phi 29$  обеспечила равномерное протаскивание ДНК через канал с нужной скоростью, подобно репликации ДНК.

Демонстрация этой технологии для шести различных цепочек ДНК длиной от 42 до 53 нуклеотидов показала прохождение через пору каждого нуклеотида цепи ДНК в среднем за 28 мс. Величины изменений тока ионов через канал при прохождении ДНК оказались характерными для каждого из четырех нуклеотидов (в окрестности тока 40 нА). Фиксация этих изменений определяет нуклеотидную последовательность ДНК, причем намного быстрее, чем в применяемых ныне методах секвенирования [163].

**Моделирование биосенсинга.** Скоростное секвенирование ДНК определяется признаками, позволяющими опознать каждый из четырех нуклеотидов, встречающих решетку графена, характерным сочетанием атомов. Эти признаки приводят к уникальному изменению рисунка проводимости и иных свойств графенового листа.

Моделирование с помощью неравновесной функции Грина в теории функционала плотности показало зависимость признаков различимости нуклеотидов от конфигурации краев графеновой ленты [165, 166].

Биосенсинг графена, обладающего чувствительностью к одиночным атомам, представляется важнейшим компонентом нового, Шестого технологического уклада.

**Пути в будущее.** Графен предопределяет развитие новых высокотехнологичных сфер научной и промышленной деятельности, например, в терагерцевой электронике, в электродинамике моноатомных метаматериалов, в технологии резонансных поглотителей энергии, в частности фотопреобразователей для солнечной энергетики.

Эти пути обеспечат фундамент конвергентной индустрии будущего.

Научная база такой индустрии будет развиваться на основе открываемых графеном возможностей управления квазичастицами, фильтрации электронов, распознавания информационных сигналов живого мира, скоростного секвенирования ДНК и т. д.

Предложения о системном, конвергентном развитии этих направлений активно обсуждаются научным сообществом. Примером могут служить дискуссии о путях развития так называемой метатроники [167]–[171].

**Метатроника** пока выглядит как концепция конвергенции фотоники, спинтроники, интегральной и магнитооптики. Эти направления изучают взаимодействия электромагнитных волн со средами. Появление метасред и современные взгляды на общность волновых процессов макро- и наномира предопределяют новизну и инновационную эффективность указанной конвергенции.

**Автор надеется**, что, ознакомившись с материалами этой книги, читатель оценит графен как путь в будущее и как источник идей для построения фундамента Шестого технологического уклада.

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Drissi L. B., Saidi E. H. and Bousmina M.* Graphene and Cousin Systems, 2011, <http://arxiv.org/pdf/1108.1748.pdf>
2. *Jean-Noel Fuchs Mark Oliver Goerbig.* Introduction to the Physical Properties of Graphene. Lecture Notes 2008, <http://chercheurs.lps.u-psud.fr/GOERBIG/CoursGraphene2008.pdf>
3. *Eric Plum.* Chirality and Metamaterials. Extended Edition, February 2010, [http://www.orc.soton.ac.uk/publications/theses/4781\\_ep/4781\\_ep\\_A.pdf](http://www.orc.soton.ac.uk/publications/theses/4781_ep/4781_ep_A.pdf)
4. *Cai Wenshan, Shalaev Vladimir.* Optical Metamaterials. Fundamentals and Applications Springer; pp.112, 1st Ed. 2009 ISBN-10: 1441911502, ISBN-13: 978-1441911506, <http://www.amazon.com/Optical-Metamaterials-Fundamentals-Applications-Wenshan/dp/1441911502>
5. *Michael A. Morrison, Homer L. Dodge.* The Delights of the Appendices to The Joy of Quantum Physics, August 3, 2010, [http://eg.bucknell.edu/koutslts/Ph332/Text/JQP\\_Appendices\\_only.pdf](http://eg.bucknell.edu/koutslts/Ph332/Text/JQP_Appendices_only.pdf)
6. *Гордиенко А. Б., Золотарев М. Л., Кравченко Н. Г.* Векторный и тензорный анализ: электронное учебное пособие (текстографические учебные материалы) [Электронный ресурс] / КемГУ 2011, [http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA\\_DISK\\_FIN/OVTA\\_V2/met.html](http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA_DISK_FIN/OVTA_V2/met.html) [http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA\\_DISK\\_FIN/OVTA\\_V2/contents.htm](http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA_DISK_FIN/OVTA_V2/contents.htm)
7. *Фейнман Ричард.* Статистическая механика. Курс лекций, [http://www.e-reading.org.ua/djvureader.php/133974/1/Feinman\\_Statisticheskaya\\_mehanika\\_Kurs\\_lekciii.html](http://www.e-reading.org.ua/djvureader.php/133974/1/Feinman_Statisticheskaya_mehanika_Kurs_lekciii.html)
8. *Бройль Луи де.* Революция в физике. — М.: Атомиздат, 1965, [http://www.philosophy.nsc.ru/BIBLIOTECA/HISTORY\\_OF\\_PHYSIK/%D0%91%D1%80%D0%BE%D0%B9%D0%BB%D1%8C.pdf](http://www.philosophy.nsc.ru/BIBLIOTECA/HISTORY_OF_PHYSIK/%D0%91%D1%80%D0%BE%D0%B9%D0%BB%D1%8C.pdf)
9. *Robert D. Klauber.* Spinors: Spin S Fields, Quantum Field Theory 4, Version Date July 23, 2012, <http://www.quantumfieldtheory.info/Chap04.pdf>,

<http://www.quantumfieldtheory.info> / Электротехнические материалы. Интернет-лекции. <http://sermir.narod.ru/lec/lect2.htm>

10. *Peierls R. E.* Quelques proprietes typiques des corps solides. Ann. I. H. Poincare 5, 177–222 (1935).
11. *Landau L. D.* Zur Theorie der phasenumwandlungen II. Phys. Z. Sowjetunion, 11, 26–35 (1937).
12. *Wallace P. R.* «The Band Theory of Graphite», Phys. Rev. 71, 622 (1947) DOI: 10. 1103 / Phys. Rev. 71. 622.
13. *H. P. Boehm, A. Clauss, G. O. Fischer, U. Hofmann* (1962). Das Adsorptionsverhalten sehr dünner Kohlenstofffolien. Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie 316 (3–4): 119–127. doi:10.1002/zaac.19623160303.
14. *Weller, T. E., Ellerby, M., Saxena, S. S., Smith, R. P. & Skipper, N. T.* Superconductivity in the intercalated graphite compounds C6Yb and C6Ca, Nature Phys. 1, 39–41 (2005).
15. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva and A. A. Firsov.* «Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films», Science 306, 666 (2004) DOI:10.1126/science.1102896.
16. *A. K. Geim.* Graphene: status and prospects, Science 324, 1530-1534 (2009), DOI:10.1126/science. 1158877э.
17. [www.bioon.com/trends/UploadFiles/201010/2010100616220169.doc](http://www.bioon.com/trends/UploadFiles/201010/2010100616220169.doc)
18. *A. Barth, W. Marx.* Graphene — A rising star in view of scientometrics. arXiv:0808.3320 <http://www.library.cornell.edu/> <http://arxiv.org/abs/0808.3320>
19. *A. K. Geim and K. S. Novoselov.* The rise of grapheme. Nature materials. Vol. 6, march 2007, [www.nature.com/naturematerials](http://www.nature.com/naturematerials)
20. Global Graphene-Based Products Market To Be Worth \$ 67 Million In 2015 And \$ 675 Million In 2020. Electronics Industry Market Research and Knowledge Network. <http://www.electronics.ca>, <http://www.graphene-info.com/eu-suggests-10-year-31-billion-graphene-program>.
21. A roadmap for graphene. October 10, 2012. Konstantin Novoselov released a graphene roadmap <http://phys.org/http://phys.org/news/2012-10-roadmap-graphene.html>
22. Graphene market skyrocketing through 2020, BCC Research. [www.electroiq.com/articles/stm/2011/06](http://www.electroiq.com/articles/stm/2011/06)
23. Maxwell and Nanotek instruments to collaborate on state funded graphene based ultracapacitor research, Posted: 29

- Jun 2011 11:13 AM PDT <http://www.graphene-info.com/>  
<http://www.dailymarkets.com/stock/2011/06/29/maxwell-technologies-to-receive-funding-for-energy-storage-technology-development-programs>
24. Paola De Padova, Claudio Quaresima, Jose Avila, Emmanouil Frantzeskakis, Maria Carmen Asensio, Andrea Resta, Bénédicte Ealet, and Guy Le Lay. Silicene: Compelling Experimental Evidence for Graphenelike Two-Dimensional Silicon Patrick Vogt<sup>1,2</sup>, Phys. Rev. Lett. 108, 155501 (2012) [5 pages].
  25. Devin Powell. Silicene: It could be the new graphene. Science News, April 23rd, 2011; Vol.179 #9 (p. 14).
  26. Fleurence, R. Friedlein, Y. Wang and Y. Yamada-Takamura. «Experimental evidence for silicene on ZrB<sub>2</sub>(0001)». Symposium on Surface and Nano Science 2011 (SSNS'11) Shizukuishi, Japan, 2011.01.21.
  27. G. G. Guzmán-Verri, L. C. Lew Yan Voon. Electronic structure of silicon-based nanostructures. Phys. Rev. B 76, 075131 (2007), DOI: 10. 1103 / Phys. Rev. B. 76. 075131.
  28. A. Kara, C. Léandri, M. E. Dávila, P. de Padova, B. Ealet, H. Oughaddou, B. Aufray, G. Le Lay. Physics of Silicene Stripes // препринт arXiv:0811.2611 (17 November 2008).
  29. A duo of graphene mimics, Nature 483, 282 (2012).
  30. Radisavljevic B.; Radenovic A.; Brivio J.; Giacometti V.; Kis A. Single-layer MoS<sub>2</sub> transistors Nature Nanotechnology (ISSN: 1748–3395), vol. 6, p. 147 Publication date: 2011.
  31. A new transistor: Thinner than silicon and better than graphene, Nano Summer School 2012. Introduction to Bionanotechnology at the University of Oxford. [www.conted.ox.ac.uk/nanotech\\_summer](http://www.conted.ox.ac.uk/nanotech_summer)
  32. Geoff Musick, Rebecca Cioffi, Yunhao Cao, Tu Hong, Yaqiong Xu. Creating a junction between single layer graphene and single layer MoS<sub>2</sub>. <http://www.vanderbilt.edu/vinse/reu/sites/reu.com/files/pt/posters/Geoff%20Musick%20Student%20Poster.pdf>
  33. C. Casiraghi, S. Pisana, K. S. Novoselov, A. K. Geim, A. C. Ferrari. MXene — New Family of 2-D Metal Carbides and Nitrides. Advanced Materials, Two-Dimensional Nanocrystals Produced by Exfoliation of Ti<sub>3</sub>AlC<sub>2</sub>, August 22, 2011.
  34. M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov. Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. Solid State Communications, 143 (2007), 3–13.

35. *K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene, *Nature* 438, 197–200 (10 November 2005)/ doi:10.1038/nature04233.
36. *M. I. Katsnelson.* Graphene: carbon in two dimensions. Cambridge University 2012, [http://www.condmat.physics.manchester.ac.uk/pdf/mesoscopic/news/graphene/MaterialsToday\\_2006.pdf](http://www.condmat.physics.manchester.ac.uk/pdf/mesoscopic/news/graphene/MaterialsToday_2006.pdf)
37. *Klein O.* Die reflexion von elektronen an einem potentialsprung nach der relativistischen dynamic. von Dirac. *Z. Phys.* 53, 157–165 (1929).
38. *M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov and A. K. Geim.* Chiral tunnelling and the Klein paradox in grapheme. *Nature physics* vol. 2 September 2006, [www.nature.com/naturephysics](http://www.nature.com/naturephysics)
39. *Krekora P., Su Q. & Grobe R.* Klein paradox in spatial and temporal resolution. *Phys. Rev. Lett.* 92, 040406 (2004).
40. *Вонсовский С. В., Свирский М. С.* Парадокс Клейна и дрожащее движение электрона в поле с постоянным скалярным потенциалом // *Успехи физических наук.* — 1993. Том 163. № 5. — С. 115–118.
41. *K. S. Novoselov, D. Jiang, T. Booth, V. V. Khotkevich, S. M. Morozov, A. K. Geim.* Two Dimensional Atomic Crystals, *Science* 306, 666–669 (2004). <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0503533.pdf>
42. *Соколик А. А.* Графен и его свойства. <http://nuclphys.sinp.msu.ru/nseminar/17.05.11.pdf>
43. *K. Novoselov, A. Geim et al.* Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene, *Nature* 438, 197 (2005).
44. *Y. Zhang, Y. Tan, H. Stormer and P. Kim.* Experimental observation of the quantum Hall effect and Berrys phase in graphene, *Nature* 438, 201 (2005).
45. *von Klitzing, K.; Dorda, G.; Pepper, M.* New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance *Physical Review Letters*, vol. 45, No. 6, p. 494–7 (1980).
46. *Y. Zhang, Y. Tan, H. Stormer and P. Kim.* Experimental observation of the quantum Hall effect and Berrys phase in graphene. *Nature* 438, 201 (2005).
47. *C. W. J. Beenakker.* Dirac cones near the Fermi energy. K and K' valleys. Effective Hamiltonian (based on tight binding method) [physics.kaist.ac.kr/~xe/module =file&act...file\\_srl..sid...](http://physics.kaist.ac.kr/~xe/module=file&act...file_srl..sid...) RMP 80, 1337 (2008).

48. *Богданов К. Ю.* «Нанотехнологии вокруг нас. Современные применения нанотехнологий». Интернет-видеолекция.
49. Популярные статьи с сайта Богданова К. Ю.
50. *M. Chhowalla.* Rutgers University.  
<http://www.technologyreview.com/Nanotech/20558/>
51. *R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, A. K. Geim.* Fine Structure Constant Defines Visual Transparency of Graphene. *Science*, Vol. 320, 2008, June, [www.sciencemag.org](http://www.sciencemag.org)
52. *A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, and D. van der Marel.* Universal dynamical conductance in graphite, *Phys. Rev. Lett.* 100, 117401 (2008). arXiv:0712.0835v1.
53. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Постоянная тонкой структуры // *Астрономия. Методология. Мировоззрение.* — 1979.
54. *S. V. Morozov, K. S. Novoselov, F. Schedin, D. Jiang, A. A. Firsov & A. K. Geim.* Unusual-form-of-carbon-seen-in-space. Published: Aug. 16, 2011 [http://www.upi.com/Science\\_News/2011/08/16/Unusual-form-of-carbon-seen-in-space/UPI-27181313529041/IAC/NASA/NOAO/ESA/STScI/NRAO](http://www.upi.com/Science_News/2011/08/16/Unusual-form-of-carbon-seen-in-space/UPI-27181313529041/IAC/NASA/NOAO/ESA/STScI/NRAO) Published: Aug. 16, 2011 at 5:10 PM.
55. *Fengnian Xia, Thomas Mueller, Yu-ming Lin, Alberto Valdes-Garcia and Phaedon Avouris.* Ultrafast graphene photodetector, *NATURE NANOTECHNOLOGY*, Vol. 4, 2009.
56. *Long Ju, Baisong Geng, Jason Horng, Caglar Girit, Michael Martin, Zhao Hao, Hans A. Bechtel, Xiaogan Liang, Alex Zettl, Y. Ron Shen & Feng Wang.* Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials. *Nature Nanotechnology* 6, 630–634 (2011) doi:10. 1038/nnano. 2011. 146.
57. *A. K. Geim.* Graphene Update 2011. Лекция, июль 2011, [http://www.youtube.com/results?search\\_query=Geim&q=f](http://www.youtube.com/results?search_query=Geim&q=f)
58. *Changgu Lee, Xiaoding Wei, Jeffrey W. Kysar and James Hone.* Measurement of the Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene *Science* 18 July 2008: Vol. 321, no. 5887, pp. 385–388, DOI: 10.1126/science.1157996.
59. *C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone.* Measurement of the Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene, *Science*, 2008, 321, no. 5887 pp. 385–388, DOI: 10.1126/science.1157996
60. *Tim J. Booth, Peter Blake, Rahul R. Nair, Da Jiang, Ernie W. Hill, Ursel Bangert, Andrew Bleloch, Mhairi Gass, Kostya S. Novoselov, M. I. Katsnelson and A. K. Geim:* Macroscopic Graphene Membranes and Their Extraordinary

- Stiffness, *Nano Lett.*, 2008, 8 (8), pp. 2442–2446, DOI: 10.1021/nl801412y
61. *Alexander A. Balandin, Suchismita Ghosh, Wenzhong Bao, Irene Calizo, Desalegne Teweldebrhan, Feng Miao, Chun Ning Lau.* Superior Thermal Conductivity of Single-Layer Graphene, *Nano Lett.*, 2008, 8 (3), pp. 902–907.
  62. *Yanwu Zhu, Shanthi Murali, Weiwei Cai, Xuesong Li, Ji Won Suk, Jeffrey R. Potts, and Roney S. Ruoff.* Graphene and Graphene Oxide: Synthesis, Properties and Applications, *Advanced Materials Volume 22, Issue 35*, pages 3906–3924, September 15, 2010, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim [www.MaterialsViews.com](http://www.MaterialsViews.com)
  63. *K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, H. L. Stormer.* Ultrahigh electron mobility in suspended graphene. March 2008 Elsevier [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
  64. *F. Schedin, A. K. Geim, S. V. Morozov, E. W. Hill, P. Blake, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov.* Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene. *Nature materials*, 2007, 6, 652–655. [www.nature.com/naturematerials](http://www.nature.com/naturematerials)
  65. Graphene sniffs out dangerous molecules *Nature Materials*, Aug 2007 <http://www.physorg.com/news105009846.html>
  66. Graphene sensor achieves ultimate sensitivity 30 July 2007 <http://www.rsc.org/chemistryworld/News/2007/July/30070703.asp>
  67. Sniffing Out Trouble May 02, 2008, <http://www.lbl.gov/>
  68. *Yong P. Chen, Igor Jovanovic.* Graphene based sensors for detecting special nuclear materials Academic Research Initiative (ARI) Grantees Conference, Washington DC April 8, 2009, [http://www.physics.purdue.edu/quantum/Talks/ari\\_2009b.pdf](http://www.physics.purdue.edu/quantum/Talks/ari_2009b.pdf)
  69. *J. S. Bunch et al.* Ionic Transport across Atomically Thin Graphene Membranes *Nano Letters* 8, 2458 (2008).
  70. Oxford Nanopore to commercialize Harvard's Graphene DNA Sequencing technology, *Graphene Info Posted: 11 Mar 2011 05:28 AM PST.*
  71. Случайное открытие, способное перевернуть ближайшее будущее. Опять графен. 11 сентября, 2010 — 21:10 — [vik http://www.ehorussia.ru/new/node/1115](http://www.ehorussia.ru/new/node/1115)
  72. *N. Levy, S. A. Burke, K. L. Meaker, L. M. Panlasigui, L. A. Zettl, Guinea, A. H. Castro Neto, M. F. Crommiel.* Strain-Induced Pseudo-Magnetic Fields Greater Than 300

- Tesla in Graphene Nanobubbles. *Science*, 2010, V. 329, 544–547 p. [www.sciencemag.org](http://www.sciencemag.org)
73. *S. M.-M. Dubois, Z. Zanolli, X. Declerck, and J.-C. Charlier*. Electronic properties and quantum transport in Graphene-based nanostructures/ *Eur. Phys. J. B* (2009). DOI: 10.1140/epjb/e2009-00327.
74. *Раков Э. Г.* Нанотрубки и фуллерены: учебное пособие. — М.: Университетская книга, Логос, 2006. — 376 с.
75. *A. Veligura*. Graphene: relativistic physics in 2D. Адаптировано из <http://www.rug.nl/fmns-research/zernike/education/topmasternanoscience/NS190Veligura.pdf>
76. *A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim*. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 81, 109–162, January–March 2009.
77. *Patrik Recher and Björn Trauzettel*. A defect controls transport in graphene. *Physics* 4, 25 (2011) DOI: 10.1103 / Physics. 4. 25.
78. Relativistic Quantum Mechanics. Lecture Notes by W. B. von Schlippe, PNPI and SPbSU [www.phys.spbu.ru/.../studentlectures/schlip](http://www.phys.spbu.ru/.../studentlectures/schlip)
79. [wikipedia.org/wiki/Матрицы\\_Дирака](http://wikipedia.org/wiki/Матрицы_Дирака).
80. *N. Levy, S. A. Burke, K. L. Meaker, L. M. Panlasigui, L. A. Zettl, Guinea, A. H. Castro Neto, M. F. Crommiel*, Strain-Induced Pseudo-Magnetic Fields Greater Than 300 Tesla in Graphene Nanobubbles. *Science*, 2010, V. 329, 544–547 p. [www.sciencemag.org](http://www.sciencemag.org)
81. *Волькенштейн М. В.* Молекулярная оптика, М.–Л., 1951, гл. 10.
82. *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\varepsilon$  и  $\mu$  // Успехи физических наук. — 1968. — Т. 10. — С. 509–514. <http://ufn.ru/articles/1967/7/d/>
83. Physicists Propose a Method to Observe Dirac Monopoles — [PhysOrg.com](http://PhysOrg.com), 28.07.2009.
84. *J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart*. Magnetism from Conductors, and Enhanced Non-Linear Phenomena, *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 47, 2075 (1999).
85. *John B. Pendry and David R. Smith*. Reversing Light: Negative Refraction Physics Today 2003 December.
86. *Stacey Higinbotham*. Metamaterials and how to make something invisible [gigaom.com](http://gigaom.com/), Apr.24, 2012, <http://gigaom.com/>

87. Sphere of silence. Cloak of silence' design. Physics world, 2008 Jan.17, <http://physicsworld.com/cws/home>
88. *R. Marques, F. Martin, M. Sorolla*. Metamaterials with Negative Parameters, Wiley 2008, 215 pp. ISBN 978-0-471-74582-2.
89. *Jason Valentine, Shuang Zhang, Thomas Zentgraf, and Xiang Zhang*. Negative Index Fishnet Metamaterials: Achieving a Low Loss and Broadband Response Through Coupling, Proc.of the IEEE, 2011, 0018-9219, pp. 1–9.
90. *E. N. Economou*. Surface Plasmon-polaritons on thin metal films. Phys. Rev. Vol. 182, 539–554 (1969).
91. *J. J. Burke, G. I. Stegeman, T. Tamir*. Surface-polariton-like waves guided by thin, lossy metal films, Phys. Rev. B, Vol. 33, 5186–5201 (1986).
92. *D. O. Guney, Th. Koschny, and C. M. Soukoulis*. Surface plasmon driven electric and magnetic resonators for metamaterial, Phys. Rev. B 83, 045107 2011. <http://arxiv.org/pdf/1104.1956.pdf>
93. *Robert W. Boyd and Daniel J. Gauthier*. Transparency on an optical chip. — Nature, Vol. 441, June 2006, p.701–702. [http://www.phy.duke.edu/research/photon/qelectron/pubs/Nature441\\_701.pdf](http://www.phy.duke.edu/research/photon/qelectron/pubs/Nature441_701.pdf) (Перевод: Фотоника. 2007, Выпуск 1, с. 28–30).
94. *Robert D. Klauber*. Spinors: Spin 1/2 Fields, Quantum Field Theory Chapter 4, Version Date July 23, 2012, <http://www.quantumfieldtheory.info/Chap04.pdf>, <http://www.quantumfieldtheory.info/>
95. *Гордиенко А. Б., Золотарев М. Л., Кравченко Н. Г.* Векторный и тензорный анализ: электронное учебное пособие (текстографические учебные материалы) [Электронный ресурс] / КемГУ 2011. [http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA\\_DISK\\_FIN/OVTA\\_V2/met.html](http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA_DISK_FIN/OVTA_V2/met.html) [http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA\\_DISK\\_FIN/OVTA\\_V2/contents.html](http://physic.kemsu.ru/pub/library/OVTA_DISK_FIN/OVTA_V2/contents.html)
96. *A. A. Dubinov, V. Ya. Aleshkin, V. Mitin, T. Otsuji, and V. Ryzhii*. Terahertz surface plasmons in optically pumped graphene structures. Journal of Physics: Condensed Mater, 23 (2011) 145302 (8pp) doi:10.1088/0953-8984/23/14/145302, <http://www.ee.buffalo.edu/faculty/mitin/Papers/217.pdf>
97. *Sukosin Thongrattanasiri, Frank Koppens, Darrick Chang, and Javier García de Abajo*. Graphene Plasmonics Metamaterials, October 2011, <http://nanophotonics>.

- csic.es/static/presentations/2011-10-10\_ Thongrattanasiri\_ Metamaterials\_graphene.pdf
98. *Frank H. L. Koppens, Darrick E. Chang, and F. Javier García de Abajo.* Graphene plasmonics: A platform for strong light-matter interaction arXiv:1104.2068v1.
  99. *Ignacio Llatser, Christian Kremers, Albert Cabellos-Aparicio, Josep Miquel Jornet, Eduard Alarco'n, Dmitry N. Chigrin.* Graphene-based nano-patch antenna for terahertz radiation. [www.elsevier.com/locate/photronics](http://www.elsevier.com/locate/photronics). Elsevier-2012 / Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com) PNFA-350.
  100. *D. N. Chigrin.* Graphene-based nano-patch antenna for terahertz radiation *Photon Nanostruct: Fundam Appl* (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.photonics.2012.05.011> <http://users.ece.gatech.edu/jmjm3/publications/pan2012.pdf>
  101. *Raether, Heinz* (1988). *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings.* Springer Tracts in Modern Physics 111. New York: Springer-Verlag. ISBN 0-387-17363-3. (Germany: ISBN 3-540-17363-3).
  102. *Cottam, Michael G.* (1989). *Introduction to Surface and Superlattice Excitations.* New York: Cambridge University Press. ISBN [[Special:BookSources/100521321549/100521321549]]. (Germany: ISBN 100521321549).
  103. Prof. Albert Polman, Nanophotonics lecture series, Utrecht University, 2010–2011, <http://www.erbium.nl/nanophotonics>
  104. *Ignacio Llatser, Christian Kremers, Albert Cabellos-Aparicio, Josep Miquel Jornet, Eduard Alarco'n, Dmitry N. Chigrin.* Graphene-based nano-patch antenna for terahertz radiation. [www.elsevier.com/locate/photronics](http://www.elsevier.com/locate/photronics). Elsevier-2012/ Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com) PNFA-350.
  105. *S. A. Mikhailov.* Non-linear electromagnetic response of graphene, *Europhysics Letters* 79 (2007) 27002.
  106. *Naresh K, Emami, Ting-Fung Chung, Xingjie Ni, Alexander V. Kidishev, Yong P. Chen and Alexandra Boltasseva.* Electrically Tunable Damping of Plasmonic Resonances with Graphene. American Chemical Society Publications, September 2012.
  107. *Koppens, F. H. L.; Chang, D. E.; García de Abajo, F. J.* *Nano Lett.* 2011, 11 (8), 3370–3377.
  108. *Falkovsky, L.* In *Optical properties of graphene*; IOP Publishing: London, 2008; p. 012004.
  109. *J. M. Pitarke, V. M. Silkin, E. V. Chulkov and P. M. Echenique.* Theory of surface plasmons and surface-plasmon. INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING Rep. Prog.

- Phys. 70 (2007) doi:10.1088/0034-4885/70/1/R01 1–87  
doi:10.1088.
110. *Ritchie R.H. and Eldridge H.B.* (1962). Optical emission from irradiated foils. Phys. Rev. 1962 126 1935.
  111. *I. Crassee et al.* Nature Phys. 7, 48 (2011).
  112. *Prof. Dimitri Basov*, Department of Physics, University of California at San Diego Infrared Nano-spectroscopy and Nano-imaging of Dirac Plasmons in Graphene, <http://usersmeeting.ps.bnl.gov/workshops/file.ashx?id=528>  
[http://pc-news.info/wp-content/uploads/2012/06/plasmons\\_in\\_graphene.jpg](http://pc-news.info/wp-content/uploads/2012/06/plasmons_in_graphene.jpg)
  113. *Zhe Fei, Gregory O. Andreev, Wenzhong Bao, Lingfeng M. Zhang, Alexander S. McLeod, Chen Wang, Margaret K. Stewart, Zeng Zhao, Gerardo Dominguez, Mark Thiemens, Michael M. Fogler, Michael J. Tauber, Antonio H. Castro-Neto, Chun Ning Lau, Fritz Keilmann, Dimitri N. Basov.* Infrared nanoscopy of Dirac plasmons at the graphene-SiO<sub>2</sub> interface. Nature Nano. 2011. 146.
  114. *T. Eberlein, U. Bangert, R. R. Nair, R. Jones, M. Gass, A. L. Bleloch, K. S. Novoselov, A. Geim, and P. R. Briddon.* Plasmon spectroscopy of free-standing graphene films Physical Review B 77, 233406 \_2008\_DOI: 10.1103/PhysRevB.77.233406 PACS number\_s\_: 73.20.\_r, 81.05.Uw, 71.45.Gm, 79.20.Uv.
  115. *Jianing Chen et al.* Optical nano-imaging of gate-tunable graphene plasmons. Nature (2012) doi:10.1038/nature11254.
  116. *C. X. Cong, T. Yu, Z. H. Ni, L. Liu, Z. X. Shen and W. Huang.* Fabrication of graphene nanodisk arrays using nanosphere lithography, 2008, <http://arxiv.org/pdf/0812.5014.pdf>
  117. *Sukosin Thongrattanasiri, Frank Koppens, Darrick Chang, and Javier Garcia de Abajo.* Total light absorption in grapheme arXiv:1106.4460v1 [physics.optics] 22 Jun. 2011 <http://arxiv.org/pdf/1106.4460.pdf>
  118. *T. J. Echtermeyer, L. Britnell, P. K. Jasnós, A. Lombardo, R. V. Gorbachev, A. N. Grigorenko, A. K. Geim, A. C. Ferrari & K. S. Novoselov.* Strong plasmonic enhancement of photovoltage in graphene. Nature Communications 458 doi:10.1038/ncomms1464 Published 30 August 2011, <http://www.condmat.physics.manchester.ac.uk/pdf/mesoscopic/publications/graphene/ncommsPlasmonic2011.pdf>
  119. *Aires Ferreira and N. M. R. Peres.* Complete light absorption in graphene-metamaterial corrugated structures. 18 Jun. 2012 <http://arxiv.org/pdf/1206.3854.pdf>

120. *Григоренко А.* Physical Review, 2008.
121. *T. J. Echtermeyer, L. Britnell, P. K. Jasnós, A. Lombardo, R. V. Gorbachev, A. N. Grigorenko, A. K. Geim, A. C. Ferrari & K. S. Novoselov.* Strong plasmonic enhancement of photovoltage in graphene, Nature Communications 2, Article number: 458 doi:10.1038/ncomms1464, 2011, August.
122. *Wu Zhou, Jaekwang Lee, Jagjit Nanda, Sokrates T. Pantelides, Stephen J. Pennycook and Juan-Carlos Idrobo.* Atomically localized plasmon enhancement in monolayer graphene Nature Nanotechnology 29 January 2012. DOI: 10.1038/NNANO.2011.252.
123. *Belle Dume.* Light-trapping technique helps solar cells thin down by Belle Dume, NanotechWeb, July 6, 2012 View Science 2012 г. July.
124. *Красников Г. Я., Шелепин Н. А.* Развитие отечественного производства кремниевых СБИС. [ousnano.sbras.ru/userfiles/file/Kuznetsov/krasnikov\\_shelepin.ppt](http://ousnano.sbras.ru/userfiles/file/Kuznetsov/krasnikov_shelepin.ppt)
125. *Yanqing Wu, Yu-ming Lin, Ageeth A. Bol, Keith A. Jenkins, Fengnian Xia, Damon B. Farmer, Yu Zhu & Phaedon Avouris.*
126. High-frequency, scaled graphene transistors on diamond-like carbon.
127. Y. Q. Wu of IBM Res, 2010 IEEE Int. ED Meeting (IEDM), San Francisco, Dec. 6–8, 2010.
128. A new transistor: Thinner than silicon and better than graphene Nano Summer School 2012. Introduction to Bionanotechnology at the University of Oxford, [www.conted.ox.ac.uk/nanotech\\_summer](http://www.conted.ox.ac.uk/nanotech_summer), <http://www.nanowerk.com/news/newsid=19914.php>
129. *Radisavljevic, B.; Radenovic, A.; Brivio, J.; Giacometti, V.; Kis, A.* Universal Conductance Fluctuations in a Multi-Subband Quantum Well. 147 Publication date: 2011.
130. First Graphene Integrated Circuit IBM researchers take next step in building graphene-based electronics By *Neil Savage* / June 2011.
131. *X. Yang and K. Mohanram.* Ambipolar electronics, Rice University Tech. Report, TREE 1002, 2010, March 2.
132. *M. H. B. Jamma et al.* Programmable logic circuits based on ambipolar CNFET, in Proc. Design Automation Conference, pp. 339–340, 2008.
133. *M. H. B. Jamma et al.* Logic circuits with ambipolar CNTFETs: novel opportunities for multi-level logic

- synthesis, in Design Automation and Test in Europe, pp. 622–627, 2009.
134. Xuebei Yang, Guanxiong Liu, Alexander A. Balandin and Kartik Mohanram / Triple-Mode Single-Transistor Graphene Amplifier and Its Applications, ACS Nano, 2010, 4(10), pp. 5532–5538 DOI: 10.1021/nn1021583, www.acsnano.org, <http://ndl.ee.ucr.edu/Balandin-Graphene-Circuit.pdf>
  135. Yang and Mohanram. Ambipolar electronics, Rice University Technical Report, TREE1002, 2010 March 2.
  136. Palacios, T., A. Hsu, and Han Wang. Applications of graphene devices in RF communications. Communications Magazine, IEEE 48.6 (2010): 122–128. ©2010, IEEE.
  137. Chua, L. O. (1971), Memristor—The Missing Circuit Element, IEEE Transactions on Circuit Theory CT-18 (5): 507–519, doi:10.1109/TCT.1971.1083337.
  138. Tour, J. M.; He, T. (2008). Electronics: The fourth element, Nature 453 (7191): 42–43, Bibcode 2008 Natur.453...42T, doi:10.1038/453042a, PMID 18451847.
  139. Prachi Patel. Flexible Graphene Memristors. IEEE Spectrum, October 2010.
  140. D. Ventra et al. Circuit Elements with Memory: Memristors, Memcapacitors, and Meminductors. Proceedings of the IEEE, vol.97, No.10, October 2009.
  141. Greg Snider. Cortical Computing with MEMRISTIVE NANODEVICES, SCID ACREVIEW WINTER 2008, www.scidacreview.org
  142. Stanley Williams. Nature 453, 80–83 (1 May 2008), SCID ACREVIEW WINTER 2008, www.scidacreview.org
  143. Greg Snider. Optical Suppression of Ionized Impurity Scattering in Vertical Hot-Electron Transport. Hewlett-Packard Laboratories, CNNA February 3, 2010.
  144. Greg Snider. HP. Cortical Computing with MEMRISTIVE NANODEVICES, SCID ACREVIEW WINTER 2008, www.scidacreview.org
  145. Sung Hyun Jo, Ting Chang, Idongesit Ebong, Bhavitavya B. Bhadviya, Pinaki Mazumder and Wei Lu. Nanoscale Memristor Device as Synapse in Neuromorphic Systems Nano Lett., 2010, 10 (4), pp. 1297–1301 DOI: 10.1021/nl904092h.
  146. Massimiliano Versace, Ben Chandler. MoNETA: A Mind Made from Memristors. DARPA's new memristor-based approach to AI consists of a chip that mimics how neurons process information.

- <http://spectrum.ieee.org/robotics/artificial-intelligence/moneta-a-mind-made-from-memristors/3>
147. *Philippe Tassin, Thomas Koschny, Maria Kafesaki and Costas M. Soukoulis.* A comparison of graphene, superconductors and metals as conductors for metamaterials and plasmonics. NATURE PHOTONICS, published online 4 March 2012, [www.nature.com/naturephotonics](http://www.nature.com/naturephotonics)
  148. *Девятков Н. Д., Бецкий О. В., Гельвич Э. А., Голант М. Б., Махов А. М., Реброва Т. Б., Севастьянова А., Смолянская А. З.* Воздействие электромагнитных колебаний миллиметрового диапазона длин волн на биологические системы // Радиобиология. — 1980. — № 2. — С. 163–171.
  149. *Пресман А. С.* Электромагнитные поля и живая природа. — М.: Наука, 1968.
  150. *Бецкий О. В.* КВЧ-терапия // Радио. — 1994. — № 7. — С. 4–6.
  151. *Бецкий О. В.* Collective Effects in Vortex Movements in Type-II Superconductors Observed by a Method for Registration of Individual Vortices. Радио, 1999 г., № 3, [http://www.chipinfo.ru/literature/radio/199910/p47\\_48.html](http://www.chipinfo.ru/literature/radio/199910/p47_48.html)
  152. <http://nootelepat.narod.ru/simple.htm> Лучи жизни. . .
  153. Эффекты нетеплового воздействия миллиметрового излучения на биологические объекты // Под ред. акад. *Н. Д. Девяткова.* — М.: ИРЭ АН СССР, 1983. — С. 48–62.
  154. *Девятков Н. Д., Голант М. Б., Бецкий О. В.* Миллиметровые волны и их роль в процессах жизнедеятельности. — М.: Радио и связь, 1991.
  155. *Н. И. Синицын, В. И. Петросян, В. А. Ёлкин, Н. Д. Девятков, Ю. В. Гуляев, В. Бецкий.* Особая роль системы «миллиметровые волны — водная среда» в природе // Биомедицинская радиоэлектроника. — 1998. — № 1. — С. 5–23.
  156. *D. Gunlycke and C. T. White.* Graphene Valley Filter Using a Line Defect, Phys. Rev. Lett. 106, 136806 (2011).
  157. *Patrik Recher and Bjorn Trauzettel.* A defect controls transport in graphene. Physics 4, 25 (2011) DOI: 10.1103 / Physics. 4. 25.
  158. *Остерман Л. А.* Методы исследования белков и нуклеиновых кислот: пособие для студентов. — М.: МЦНМО, 2002. — 248 с.
  159. *Мэтт Ридли (Matt Ridley).* Genome. The autobiography of a Species in 23 Chapters. Эксмо, 2008, 432 с. 60×90/16,

- ISBN 978-5-699-30682-4, 0-06-093290-2. <http://readr.ru/mett-ridli-genom.html?page=1###ixzz1i7yX7jso>
160. <http://www.udel.edu/udaily/2012/mar/graphene-genetic-sequencing-032212.html> Oxford Nanopore to commercialize Harvard's Graphene DNA Sequencing technology
161. Graphene Info 11 Mar 2011 05:28 AM PST [http://img.sci-lib.com/2010/07/29/b\\_797](http://img.sci-lib.com/2010/07/29/b_797)
162. *Elizabeth A. Manrao, Ian M. Derrington, Andrew H. Laszlo, Kyle W. Langford, Matthew K. Hopper, Nathaniel Gillgren, Mikhail Pavlenok, Michael Niederweis & Jens H. Gundlach.* «Reading DNA at single-nucleotide resolution with a mutant MspA nanopore and phi29 DNA polymerase». *Nature Biotechnology* Volume: 30, Pages: 349–353.
163. *Stuart Lindsay, Jin He.* DNA Sequencing by Molecular Recognition and Nanoscale Manipulation of Single Molecules AzTE Case # M07-056, M08-058, M08-120, M08-121 & M08-145. *Sov. Phys.-JETP* 64, 1248–1255 (1986).
164. Порин (белок 29 кДа) дрожжей. <http://humbio.ru/humbio/mit33/00055fb4.htm>
165. *Kamal K. Saha, Marija Drndić, and Branislav K. Nikolic.* DNA Base-Specific Modulation of Microampere Transverse Edge Currents through a Metallic Graphene Nanoribbon with a Nanopore. *Nano Letters* 2012 12 (1), p. 50–55.
166. *Martin Puma.* Graphene in biosensing, Review, *Materialstoday*. July–August 2011. Vol. 14, No 7–8, 308–315.
167. *Nader Engheta.* From Electronics to Metatronics to Graphene Metamaterials. WORKSHOP 'PASSION FOR PHOTONS. 2011, SEPTEMBER 29, 2011.nanometa, 978-1-4244-6051-9/11/\$ 26.00 ©2011 IEEE <http://www.ursi.org/proceedings/procGA11/ursi/BD1-10.pdf>  
[http://2011.nanometa.org/nanometa\\_program\\_2011.pdf](http://2011.nanometa.org/nanometa_program_2011.pdf)
168. *Nader Engheta.* From Metatronics to Graphene Nanocircuits. *nanometa* (2010) Volume: 144107, Issue: 2008, Pages: 144107.
169. META'12, Paris–France. 3rd International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics, April 19–22, 2012, [http://metaconferences.org/documents/meta\\_booklet.pdf](http://metaconferences.org/documents/meta_booklet.pdf)
170. *Nader Engheta.* Taming Light and Electrons with Metamaterials [http://nanohub.org/resources/11394/download/Nader\\_Presentation\\_March\\_4\\_2011.pdf](http://nanohub.org/resources/11394/download/Nader_Presentation_March_4_2011.pdf)

171. *Nader Engheta*. Metatronics: Merging Electronics, Photonics and Magnetics into One Paradigm.  
[http://www.eucap2011.org/files/Abstract\\_Engheta.pdf](http://www.eucap2011.org/files/Abstract_Engheta.pdf)
172. *Brey L. and Fertig H.A.* Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation Phys. Rev. B. 73, 235411 (2006) DOI:10.1103 / Phys. Rev. B. 73.235411  
Препринт.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аристотель (384–322 до н. э.) — великий древнегреческий философ
- Бозе Шатъендранат (1894–1974) — индийский физик
- Бор Нильс (1885–1962) — один из создателей современной физики
- Бройль Луи де (1892–1987) — один из основоположников квантовой механики
- Бугер Пьер (1698–1758) — французский физик, один из основателей фотометрии
- Ван дер Ваальс Ян Дидерик (1837–1923) — голландский физик
- Верде (M. Verdet, 1824–1866) — французский математик
- Веселаго В. Г. (род. 1929 г.) — советский, российский физик
- Гейм А. К. (род. 1958 г.) — советский, нидерландский и британский физик
- Гордон Вальтер (1893–1939) — немецкий физик-теоретик
- Демокрит (ок. 460–ок. 370 гг. до н. э.) — великий древнегреческий философ, один из основателей атомистики и материалистической философии
- Дирак Поль (1902–1984) — один из создателей квантовой механики
- Друде Пауль (1863–1906) — немецкий физик
- Клейн Оскар (1894–1977) — шведский физик-теоретик
- Клитцинг Клаус фон (род. 1943 г.) — немецкий физик
- Ландау Л. Д. (1908–1968) — советский физик-теоретик
- Лоренц Хендрик (1853–1928) — нидерландский физик
- Максвелл Джеймс (1831–1879) — основатель современной электродинамики
- Новоселов К. С. (род. 1974) — российский и британский физик

- Ньютон Исаак (1643–1727) — английский физик, математик и астроном
- Ом (1789–1854) — знаменитый немецкий физик
- Пайерлс (Peierls sir Rudolf Ernst 1907–1995) — английский физик-теоретик
- Паули (Wolfgang Ernst 1900–1958) — принцип запрета, спин, спиноры
- Планк Макс (1858–1947) — основоположник квантовой физики
- Пойнтинг (1852–1914) — британский физик
- Резерфорд Эрнест (1871–1937) — автор планетарной модели атома, «отец» ядерной физики
- Рэлей Джон Уильям (1842–1919) — британский физик
- Томсон (сэр Джозеф Джон, 1856–1940) — физик, открывший электрон
- Фарадей Майкл (1791–1867) — основоположник учения об электромагнитном поле
- Фейнман Ричард (1918–1988) — один из создателей квантовой электродинамики
- Ферми Энрико (1901–1954) — один из основоположников квантовой физики
- Холл Эдвин (1855–1938) — американский физик, открыл эффект, названный его именем
- Шрёдингер Эрвин (1887–1961) — один из создателей квантовой механики
- Эйнштейн Альберт (1879–1955) — один из основателей современной теоретической физики.

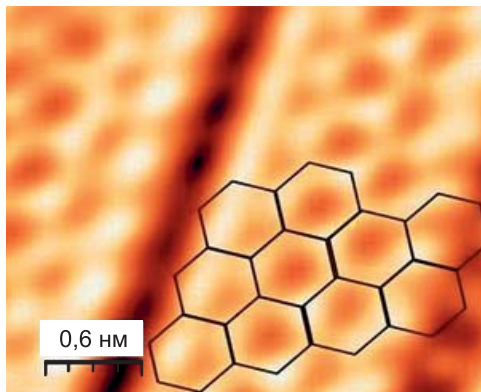


Рис. 1.4

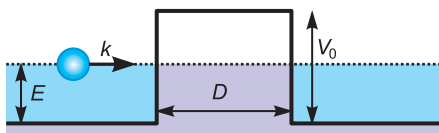


Рис. 2.1

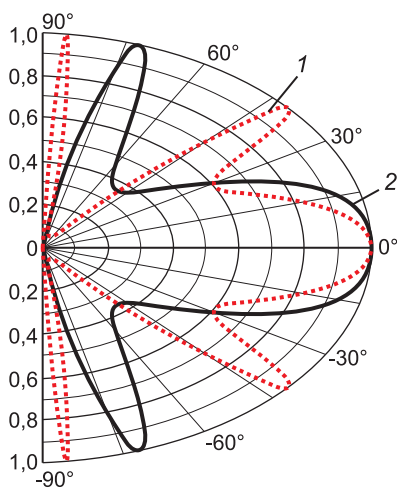


Рис. 2.2

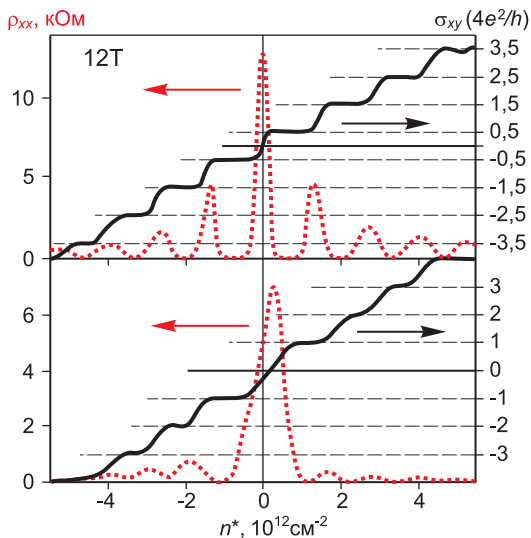


Рис. 2.5

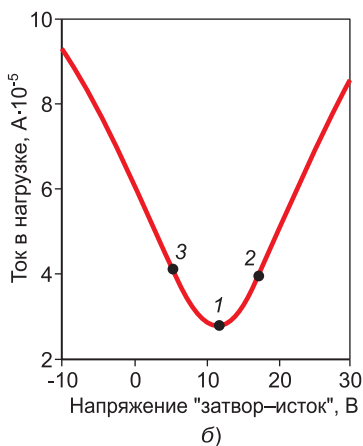
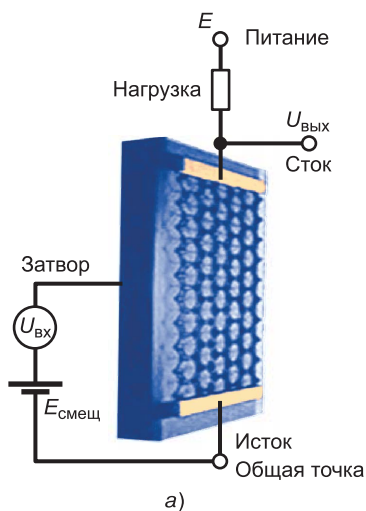


Рис. 2.7



Рис. 2.14

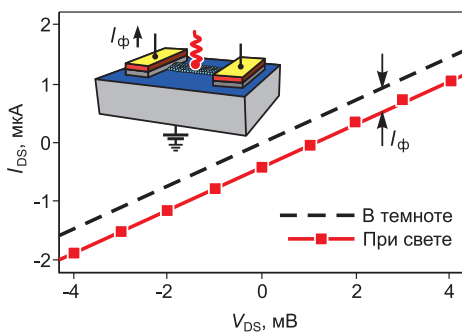


Рис. 2.15

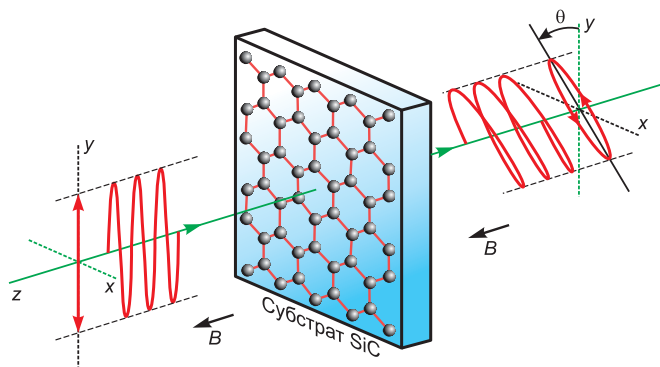


Рис. 3.2

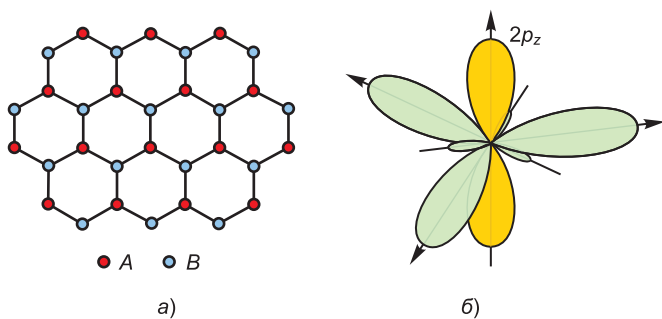


Рис. 4.1

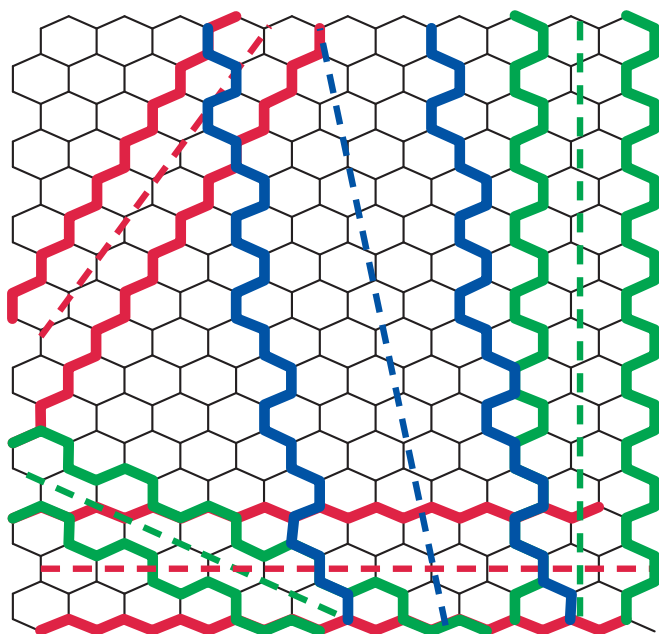


Рис. 4.4

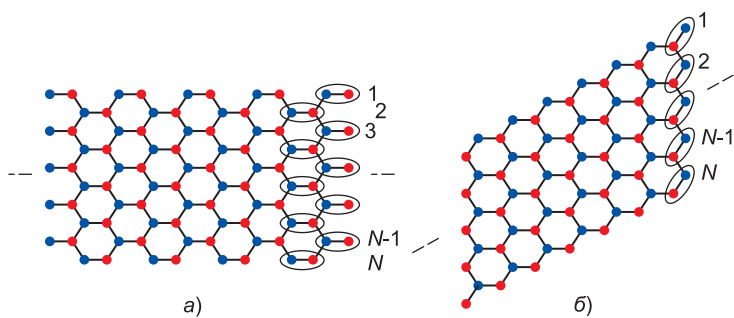


Рис. 4.5

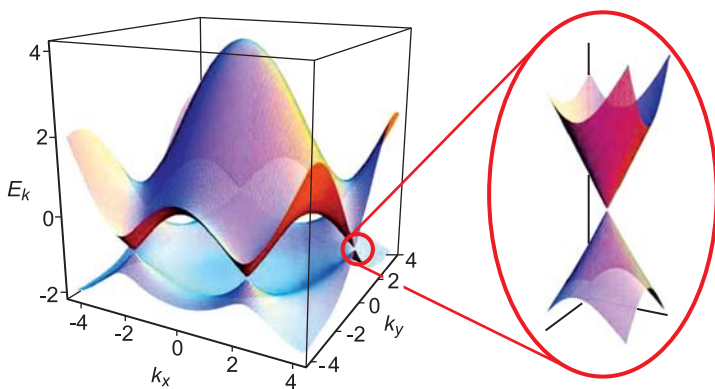


Рис. 4.13

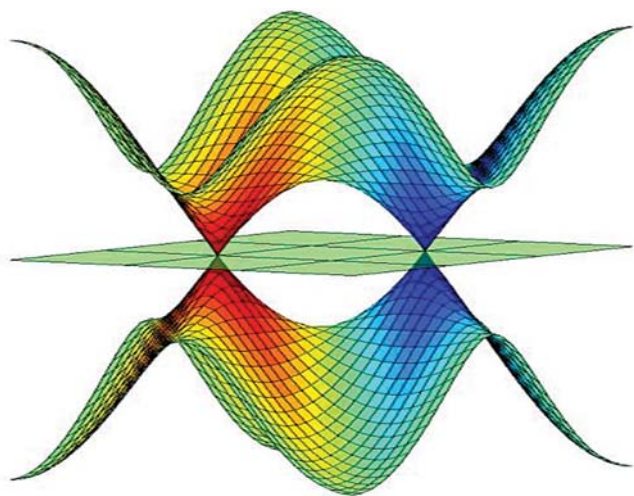


Рис. 4.14

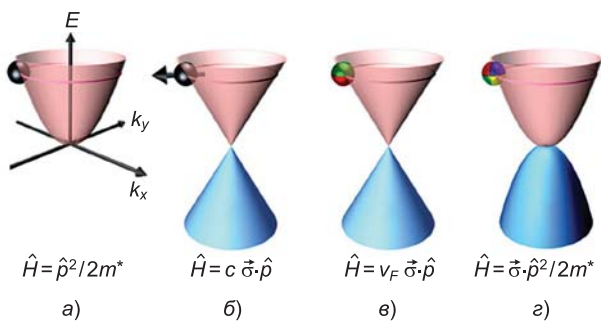


Рис. 7.1

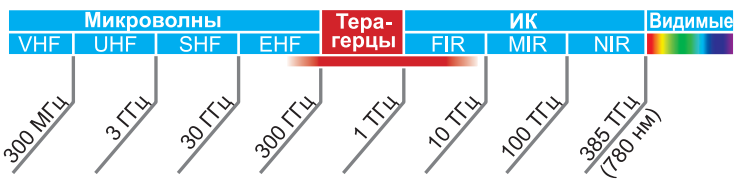


Рис. 9.1

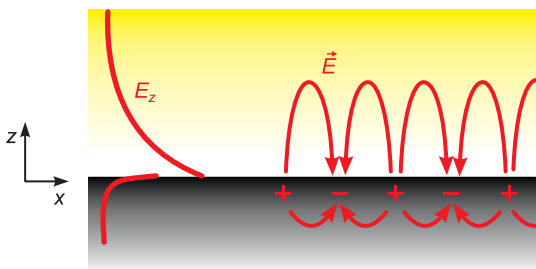


Рис. 9.5

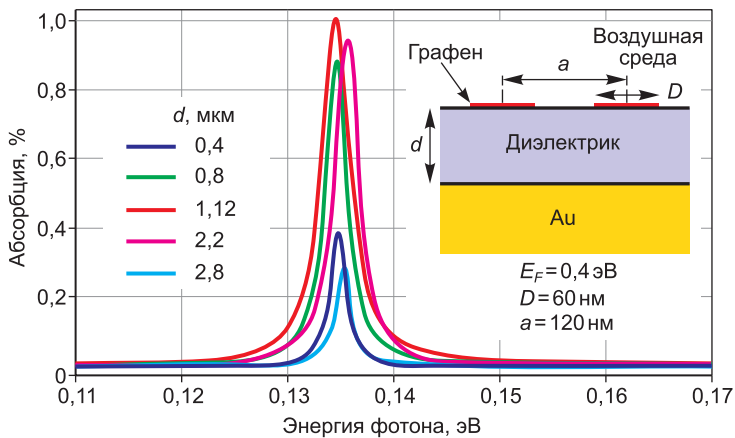


Рис. 9.10



# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	<b>3</b>
<b>Глава 1. Графен в наноразмерном мире</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 2. Квантовая электродинамика графена</b> .....	<b>12</b>
<b>Глава 3. Свойства и парадоксы графена</b> .....	<b>32</b>
<b>Глава 4. Атомы в графене</b> .....	<b>39</b>
<b>Глава 5. Волновые уравнения</b> .....	<b>56</b>
<b>Глава 6. Фермионы и матрицы</b> .....	<b>65</b>
<b>Глава 7. Уравнение Дирака и его решение</b> .....	<b>78</b>
<b>Глава 8. Метаматериалы и электродинамика</b> .....	<b>85</b>
<b>Глава 9. Плазмоника графена</b> .....	<b>109</b>
<b>Глава 10. Графеновая электроника</b> .....	<b>127</b>
<b>Глава 11. Многоликий графен</b> .....	<b>141</b>
<b>Литература</b> .....	<b>151</b>
<b>Именной указатель</b> .....	<b>166</b>

*Научное электронное издание*

**Алексенко** Андрей Геннадьевич

**ГРАФЕН**

Редактор *Т. Г. Хохлова*

Художественный редактор *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*

Корректор *Е. Н. Клитина*

Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

Подписано 27.11.13. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 10,5.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: [binom@Lbz.ru](mailto:binom@Lbz.ru), <http://www.Lbz.ru>

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 10-й для операционных систем Windows, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry